THOMSON

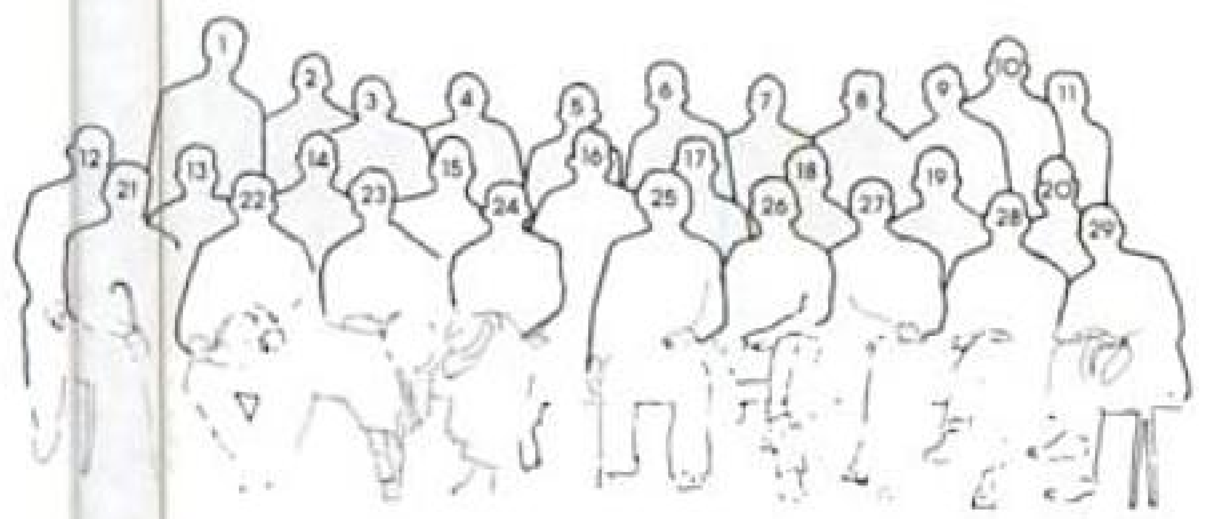
FÍSICA MODERNA

TERCERA EDICIÓN

RAYMOND A. SERWAY / CLEMENT J. MOSES / CURT A. MOYER

Contenido breve

Contenido



1. A. Piccard
2. E. Henriot
3. P. Ehrenfest
4. E. Herzen
5. Th. de Donder
6. E. Schrödinger
7. E. Verschaffelt
8. W. Pauli
9. W. Heisenberg
10. R.H. Fowler
11. L. Brillouin
12. P. Debye
13. M. Knudsen
14. W.L. Bragg
15. H.A. Kramers
16. P.A.M. Dirac
17. A.H. Compton
18. L.V. de Broglie
19. M. Born
20. N. Bohr
21. I. Langmuir
22. M. Planck
23. M. Curie
24. H.A. Lorentz
25. A. Einstein
26. P. Langevin
27. C.E. Guye
28. C.T.R. Wilson
29. O.W. Richardson

Los "arquitectos" de la física moderna. En esta fotografía se encuentran muchos científicos eminentes, los cuales participaron en el Quinto Congreso Internacional de Física, efectuado en 1927 por el Solvay Institute en Bruselas. Tanto en ésta como en otras conferencias similares, realizadas regularmente desde 1911, los científicos podían discutir y compartir los desarrollos más importantes en física atómica y nuclear. Este selecto grupo de científicos incluye a 15 ganadores del Premio Nobel de Física y a tres del de química. (*Fotografía cortesía de AIP Niels Bohr Library.*)

1

Relatividad I

Contenido del capítulo

A fines del siglo XIX los científicos creían saber casi todo lo que había por conocer de la física. Las leyes de movimiento de Newton y su teoría de la gravitación universal, el trabajo teórico de Maxwell concerniente a la unificación de la electricidad y el magnetismo, así como las leyes de la termodinámica y la teoría cinética, empleaban métodos matemáticos para explicar con éxito una amplia variedad de fenómenos.

No obstante, a principios del siglo XX una revolución extraordinaria conmocionó el mundo de la física. En 1900, Planck estableció las ideas básicas que condujeron a la teoría cuántica, y en 1905, Einstein formuló su teoría especial de la relatividad. La emoción de la época se refleja en las propias palabras de Einstein: "Era una época maravillosa para vivir". Ambas ideas habrían de impactar profundamente nuestro conocimiento sobre la naturaleza. En unas cuantas décadas estas teorías inspiraron nuevos desarrollos y teorías en los campos de la física atómica, la física nuclear y la física de la materia condensada.

Aunque la física moderna ha conducido a una multitud de logros tecnológicos importantes, la historia aún continúa. Durante nuestra existencia seguirá habiendo descubrimientos, muchos de los cuales profundizarán o refinarán nuestra comprensión de la naturaleza y el mundo que nos rodea. Sigue siendo "una época maravillosa para vivir".

1.1 RELATIVIDAD ESPECIAL

Las ondas de luz y otras formas de radiación electromagnética se desplazan por el espacio libre a la velocidad $c = 3 \times 10^8$ m/s. Como se verá en este capítulo, la velocidad de la luz establece un límite superior para la velocidad de las partículas, de las ondas y de la transmisión de información.

Casi todas nuestras experiencias cotidianas tienen que ver con objetos que se mueven a velocidades mucho menores que la de la luz. La mecánica newtoniana y los primeros conceptos sobre el espacio y el tiempo fueron planteados para describir el movimiento de tales objetos, y este formalismo describe con éxito una amplia variedad de fenómenos. Aunque la mecánica newtoniana funciona muy bien a bajas velocidades, fracasa cuando se aplica a partículas cuyas velocidades se aproximan a la de la luz. Experimentalmente es posible probar las predicciones de la teoría newtoniana a altas velocidades acelerando un electrón a través de una gran diferencia de potencial. Por ejemplo, es posible acelerar un electrón hasta una velocidad de $0.99c$ usando una diferencia de potencial de varios millones de volts. Según la mecánica newtoniana, si la diferencia de potencial (así como la energía correspondiente) se incrementa por un factor de 4, entonces la velocidad del electrón debe duplicarse a $1.98c$. Sin embargo, los experimentos muestran que la velocidad del electrón —así como las velocidades de todas las demás partículas del universo— siempre es menor que la velocidad de la luz, sin importar la magnitud del voltaje con el que es acelerado. En parte, debido a que no establece un límite superior a la velocidad que puede alcanzar una partícula, la mecánica newtoniana contradice los resultados experimentales modernos, por lo cual resulta evidente que es una teoría limitada.

En 1905, a la edad de 26 años, Einstein publicó su *teoría especial de la relatividad*. Respecto a esta teoría, Einstein escribió lo siguiente:

> La teoría de la relatividad surgió de la necesidad de resolver serias y profundas contradicciones en la teoría anterior, de las cuales parecía no haber escapatoria. La fortaleza de la nueva teoría radica en la consistencia y simplicidad con las que resuelve todas estas dificultades, utilizando sólo unas cuantas suposiciones muy convincentes. . .[1]

Aunque Einstein realizó muchas contribuciones importantes a la ciencia, la teoría de la relatividad por sí sola representa uno de los logros intelectuales más importantes del siglo XX. Con esta teoría es posible predecir correctamente observaciones experimentales en el intervalo de velocidades que van desde el reposo hasta velocidades que se aproximan a la de la luz. La mecánica newtoniana, que fue aceptada por más de 200 años, constituye de hecho un caso límite de la teoría especial de la relatividad de Einstein. En este capítulo y en el siguiente se proporciona una introducción a la teoría especial de la relatividad, que aborda el análisis de eventos físicos vistos desde sistemas de coordenadas que se desplazan en forma paralela, con velocidad constante uno respecto al otro. En el capítulo 2 también se incluye una breve introducción a la relatividad general, la cual describe los eventos físicos desde sistemas de coordenadas que experimentan un movimiento general o acelerado entre sí.

En este capítulo se demuestra que la teoría especial de la relatividad puede deducirse a partir de dos postulados básicos:

1. Las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia que se mueven uniformemente entre sí. Es decir, leyes fundamentales

[1] A. Einstein y L. Infeld, *The Evolution of Physics*. Nueva York, Simon and Schuster, 1961.

como $\Sigma F = d\mathbf{p}/dt$ tienen la misma forma matemática para todos los observadores que se desplazan a velocidad constante entre sí.

2. La velocidad de la luz en el vacío siempre resulta ser igual a 3×10^8 m/s, y el valor medido es independiente del movimiento del observador o del movimiento de la fuente de luz. Es decir, la velocidad de la luz es la misma para todos los observadores que se desplazan a velocidad constante.

Aunque se sabe muy bien que la relatividad desempeña un papel esencial en la física teórica, también tiene aplicaciones prácticas; por ejemplo, en el diseño de aceleradores de partículas, en unidades del sistema de posicionamiento global (GPS, por sus siglas en inglés) y en las pantallas de TV de alto voltaje. ¡Observe que estos dispositivos sencillamente no funcionarían si fueran diseñados utilizando la mecánica newtoniana! Ya habrá oportunidad de utilizar los resultados de la relatividad en muchos temas subsecuentes en este texto.

1.2 EL PRINCIPIO DE LA RELATIVIDAD

Para describir un evento físico es necesario establecer un sistema de referencia, como el que está fijo en el laboratorio. Recuerde de sus estudios de mecánica que las leyes de Newton se cumplen en los sistemas de referencia inerciales. *Un sistema de referencia inercial es aquel en el que un objeto sobre el que no actúan fuerzas se mueve en línea recta a velocidad constante* —de ahí el nombre "sistema inercial", porque un objeto observado desde este sistema cumple la primera ley de Newton: la ley de la inercia.[2] Más aún, cualquier marco o sistema que se mueve a velocidad constante con respecto a un sistema inercial también debe ser un sistema inercial. Por tanto, para aplicar las leyes de Newton no hay ningún sistema inercial preferido.

Sistema de referencia inercial

Según el **principio de relatividad newtoniana,** las leyes de la mecánica deben ser las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales. Por ejemplo, si se realiza un experimento cuando se está en reposo en un laboratorio, y un observador en un camión que se mueve a velocidad constante realiza el mismo experimento, las leyes de Newton pueden aplicarse a ambas observaciones. Específicamente, si en el laboratorio o en el camión se lanza una pelota hacia arriba, ésta asciende y luego regresa a manos de quien la lanzó. Es más, en el camión o en el laboratorio se mide que el intervalo de tiempo entre ambos eventos es el mismo, y puede usarse la segunda ley de Newton en ambos sistemas para calcular este intervalo. Aunque estos experimentos parecen distintos para observadores diferentes (vea la figura 1.1, donde el observador en la Tierra ve una trayectoria distinta de la pelota) y los observadores miden valores diferentes de la posición y la velocidad de la pelota en los mismos tiempos, ambos coinciden en la validez de las leyes de Newton y principios, como la conservación de la energía y la conservación de la cantidad de movimiento. Lo anterior quiere decir que ningún experimento que implique mecánica es capaz de detectar cualquier diferencia esencial entre los dos sistemas de referencia inerciales. Lo único que puede detectarse es el movimiento relativo de un sistema con respecto al otro. Es decir, el concepto de movimiento *absoluto* a través del espacio carece de significado, así como el concepto de un único sistema de referencia absoluto. **En efecto, uno de los principios filosóficos sólidos de la ciencia moderna es que todos los observadores son equivalentes y que las leyes de la naturaleza deben tener la misma forma matemática para todos los observadores.** Las leyes de la física que muestran la misma forma

[2]Un ejemplo de *sistema de referencia no inercial* es un sistema de referencia que acelera en línea recta o gira con respecto a un sistema de referencia inercial.

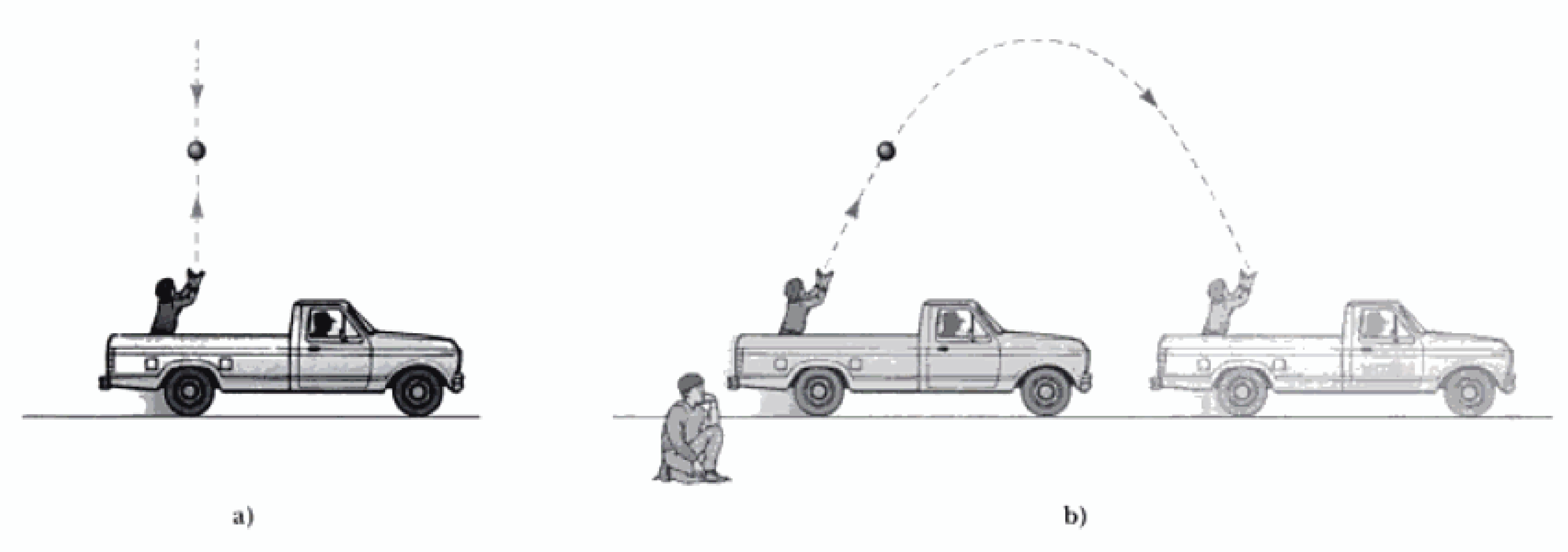


Figura 1.1 a) El observador en la camioneta ve que la pelota describe una trayectoria vertical cuando se lanza hacia arriba. b) El observador en la Tierra ve la trayectoria de la pelota como una parábola.

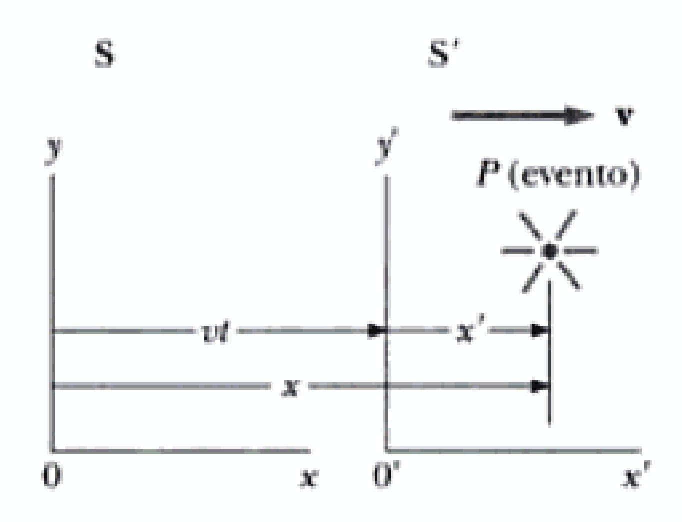


Figura 1.2 Un evento ocurre en el punto P. El evento es visto por dos observadores ubicados en los sistemas de referencia inerciales S y S′, donde S′ se mueve a una velocidad **v** con respecto a S.

matemática para observadores con movimientos distintos en lugares diferentes se dice que son *covariantes.* Más tarde en esta sección se proporcionarán ejemplos específicos de leyes físicas covariantes.

A fin de demostrar la equivalencia subyacente de las mediciones efectuadas en sistemas de referencia distintos, y por tanto la equivalencia de sistemas de referencia diferentes para hacer física, se requiere una fórmula matemática que de manera sistemática relacione las mediciones hechas en un sistema de referencia con las mediciones realizadas en otro. Una relación de este tipo se conoce como *transformación,* y la que satisface la relatividad newtoniana es la denominada *transformación galileana,* llamada así en honor de Galileo. Esta transformación puede deducirse como sigue.

Considere dos sistemas o marcos inerciales S y S′, como se muestra en la figura 1.2. El sistema S′ se mueve a velocidad constante **v** a lo largo de los ejes xx', donde **v** se mide con respecto al sistema S. Los relojes en S y S′ están sincronizados, y los orígenes de S y S′ coinciden en $t = t' = 0$. Se supone que en el punto P ocurre un evento, un fenómeno físico como el destello de una lámpara. Un observador en el sistema S describiría el evento con coordenadas espacio-tiempo (x, y, z, t), mientras un observador en S′ usaría (x', y', z', t') para describir el mismo evento. Como puede observarse, de la figura 1.2, estas coordenadas están relacionadas a través de las ecuaciones

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned} \tag{1.1}$$

Transformación galileana de coordenadas

Estas ecuaciones constituyen lo que se denomina **transformación galileana de coordenadas.** Observe que se *supone* que la cuarta coordenada, el tiempo, es la misma en ambos sistemas inerciales. Es decir, *en mecánica clásica, todos los relojes funcionan al mismo ritmo, sin importar su velocidad,* de modo que el instante en que ocurre un evento para un observador en S es el mismo en que ocurre en S′. En consecuencia, el intervalo de tiempo entre dos eventos consecutivos debe

ser el mismo para ambos observadores. Aunque esta suposición puede parecer evidente, resulta *incorrecta* cuando se abordan situaciones en las que v es comparable a la velocidad de la luz. De hecho, este punto constituye una de las diferencias más profundas entre los conceptos newtonianos y las ideas contenidas en la teoría de la relatividad de Einstein.

Ejercicio 1 Demuestre que aunque los observadores en S y S′ miden diferentes coordenadas para los extremos de una vara que está en reposo en S, ambos observadores coinciden en el valor de la longitud de ésta. Suponga que las coordenadas de los extremos de la vara son $x = a$ y $x = a + l$ en S y use la transformación galileana.

Una consecuencia inmediata e importante de la invariancia de la distancia entre dos puntos bajo la transformación galileana es la invariancia de la fuerza. Por ejemplo, si $F = \dfrac{kqQ}{(x_2 - x_1)^2}$ es la fuerza eléctrica entre dos cargas q, Q localizadas en x_1 y x_2 sobre el eje x en el sistema S, entonces F', la fuerza medida en S′, está dada por $F' = \dfrac{kqQ}{(x_2' - x_1')^2} = F$ ya que $x_2' - x_1' = x_2 - x_1$. De hecho, *cualquier* fuerza debe ser invariante bajo la transformación galileana, en tanto sólo implique las posiciones relativas de las partículas interactuantes.

Ahora suponga que un observador en S mide que dos eventos están separados por una distancia dx y un intervalo de tiempo dt. De la ecuación 1.1 se deduce que el desplazamiento dx' medido por un observador en S′ está dado por $dx' = dx - v\,dt$, donde dx es el desplazamiento medido por un observador en S. Como $dt = dt'$, se encuentra que

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v$$

o bien,

$$u_x' = u_x - v \tag{1.2}$$

Ley galileana de la adición de velocidades

donde u_x y u_x' son las velocidades instantáneas del objeto con respecto a S y S′, respectivamente. Este resultado, que se denomina **ley galileana de la adición de velocidades** (o transformación de velocidad galileana) se utiliza en las observaciones cotidianas y es consistente con nuestras nociones intuitivas de tiempo y espacio.

Para obtener la relación entre las aceleraciones medidas por dos observadores en S y S′, se toma la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 1.2 y se usan los resultados $dt = dt'$ y que v es constante:

$$\frac{du_x'}{dt'} = a_x' = a_x \tag{1.3}$$

Así, observadores en sistemas inerciales distintos miden la misma aceleración para un objeto que se acelera. La terminología matemática establece que las longitudes (Δx), los intervalos de tiempo y las aceleraciones son *invariantes* bajo una transformación galileana. El ejemplo 1.1 establece la distinción entre invariante y covariante y muestra que **las ecuaciones de transformación, además de convertir las mediciones hechas en un sistema inercial a las hechas en otro, pueden usarse para demostrar la covariancia de las leyes físicas.**

EJEMPLO 1.1 $F_x = ma_x$ es covariante bajo una transformación galileana

Suponga que un observador en un sistema inercial S ha demostrado que la ley de Newton $F_x = ma_x$ es verdadera. Demuestre que la ley de Newton también se cumple para un observador en S′ o que es covariante bajo la transformación galileana; es decir, que tiene la forma $F'_x = m'a'_x$. Observe que la masa inercial es una cantidad invariante en la dinámica newtoniana.

Solución Comenzando con la ley establecida $F_x = ma_x$, se usan la transformación galileana $a'_x = a_x$ y el hecho de que $m' = m$ para obtener $F_x = m'a'_x$. Si ahora se supone que F_x sólo depende de las posiciones relativas de m y de las partículas que interactúan con m, es decir, $F_x = f(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots)$, entonces $F_x = F'_x$, porque las Δx's son cantidades invariantes. Así, se encuentra que $F'_x = m'a'_x$ y en este caso sencillo se establece la covariancia de la segunda ley de Newton.

Ejercicio 2 *La conservación de la cantidad de movimiento lineal es covariante bajo la transformación galileana.* Suponga que dos masas m'_1 y m'_2 se mueven en la dirección x positiva a velocidades v'_1 y v'_2, según las mide un observador en S′ antes de una colisión. Después de la colisión, las dos masas se adhieren entre sí y se mueven a una velocidad v' en S′. Demuestre que si un observador en S′ encuentra que la cantidad de movimiento se conserva, también lo hace un observador en S.

La velocidad de la luz

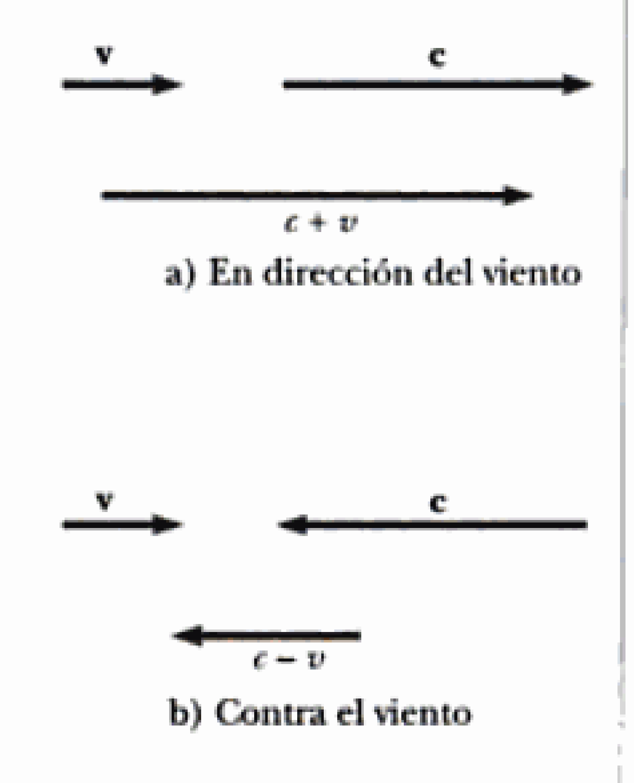
Resulta natural preguntarse si el concepto de relatividad newtoniana y la ley galileana de la adición de velocidades en mecánica también son válidos en electricidad, magnetismo y óptica. Recuerde que Maxwell demostró en la década de 1860 que la velocidad de la luz en el espacio libre estaba dada por $c = (\mu_0\varepsilon_0)^{-1/2} = 3 \times 10^8$ m/s. Los físicos de finales del siglo XIX tenían la certeza de que las ondas de luz (como las conocidas ondas sonoras y de agua) requerían un medio para desplazarse, denominado *éter*,[3] y que la velocidad de la luz era c sólo con respecto al éter o en un sistema de referencia fijo en el éter, denominado sistema del éter. Se esperaba que la ley galileana de la adición de velocidades fuese válida en cualquier otro sistema de referencia que se moviera a una velocidad v con respecto al sistema del éter. Así, se esperaba que la velocidad de la luz en este otro sistema fuese $c - v$ para luz desplazándose en la misma dirección que la del sistema, $c + v$ para luz desplazándose en dirección contraria a la del sistema, y entre estos dos valores para luz desplazándose en una dirección arbitraria con respecto al sistema en movimiento.

Debido a que la existencia del éter y de un sistema preferencial del éter demostraría que la luz era semejante a otras ondas clásicas (en cuanto a requerir un medio para desplazarse), se concedía suma importancia al establecimiento de la existencia de un sistema especial del éter. Ya que la velocidad de la luz es enorme, los experimentos que implicaban tener luz desplazándose en medios en movimiento a velocidades de laboratorio alcanzables en ese entonces, no eran capaces de detectar pequeños cambios en el tamaño de $c \pm v$ antes de finales

[3]Maxwell propuso que la luz y otras ondas electromagnéticas eran ondas que viajaban en un éter luminoso que estaba presente por doquier, incluso en el espacio vacío. Además de su nombre rimbombante, el éter poseía propiedades contradictorias porque debía ser bastante rígido para soportar la alta velocidad de las ondas luminosas, pero lo suficientemente tenue para permitir que los planetas y otros objetos de gran masa circulasen con libertad a través de él, sin resistencia, según se observaba.

del siglo XIX. Los científicos de entonces, conscientes de que la Tierra se mueve rápidamente alrededor del Sol a 30 km/s, decidieron inteligentemente usar a la Tierra misma como el sistema de referencia en movimiento en un intento por mejorar sus posibilidades de detectar estos pequeños cambios en la velocidad de la luz.

Desde nuestro punto de vista como observadores fijos en la Tierra, podemos afirmar que permanecemos estacionarios y que el sistema de referencia especial del éter se mueve con respecto a nosotros a una velocidad v. Determinar la velocidad de la luz en estas circunstancias es lo mismo que determinar la velocidad de un avión que se desplaza en una corriente de aire o viento en movimiento, y en consecuencia se habla de un "viento de éter" que pasa por los aparatos fijos en la Tierra. Si $\mathbf{v}$ es la velocidad del éter con respecto a la Tierra, entonces la velocidad de la luz debe alcanzar su valor máximo, $c + v$, cuando se propaga en la dirección del viento, como se muestra en la figura 1.3a. Asimismo, la velocidad de la luz debe tomar su valor mínimo, $c - v$, cuando se propaga contra el viento, como se muestra en la figura 1.3b, y un valor intermedio, $(c^2 - v^2)^{1/2}$, en la dirección perpendicular al viento de éter, como se muestra en la figura 1.3c. *Si se supone que el Sol está en reposo en el éter,* entonces la velocidad del viento de éter debe ser igual a la velocidad orbital de la Tierra alrededor del Sol, cuya magnitud es aproximadamente 3×10^4 m/s en comparación con $c = 3 \times 10^8$ m/s. Así, el cambio en la velocidad de la luz sería casi de 1 parte en 10^4 para mediciones en las direcciones en contra o a favor del viento, y cambios de este tamaño deben ser detectables. No obstante, como se mostrará en la siguiente sección, ¡todos los intentos por detectar tales cambios y establecer la existencia del éter resultaron infructuosos!



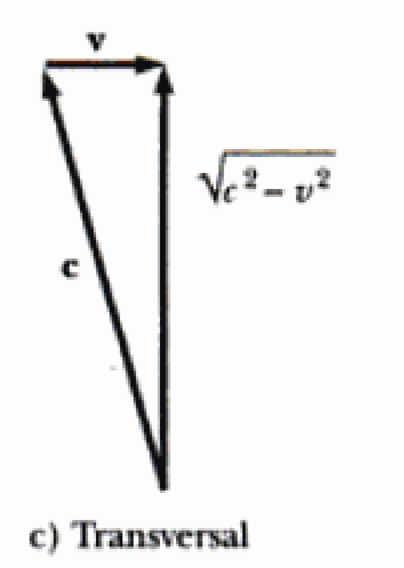


Figura 1.3 Si la velocidad del viento de éter con respecto a la Tierra es $\mathbf{v}$, y $\mathbf{c}$ es la velocidad de la luz con respecto al éter, entonces la velocidad de la luz con respecto a la Tierra es a) $c + v$ en la dirección del viento, b) $c - v$ contra el viento y c) $(c^2 - v^2)^{1/2}$ perpendicular al viento.

1.3 EXPERIMENTO DE MICHELSON-MORLEY

El famoso experimento diseñado para detectar pequeños cambios en la velocidad de la luz con el movimiento de un observador a través del éter fue realizado en 1887 por el físico estadounidense Albert A. Michelson (1852-1931) y el químico estadounidense Edward W. Morley (1838-1923).[4] Es necesario establecer desde un principio que el resultado del experimento fue *negativo,* contradiciendo así la hipótesis del éter. La herramienta experimental altamente precisa perfeccionada por estos pioneros para medir pequeños cambios en la velocidad de la luz fue el interferómetro de Michelson, el cual se muestra en la figura 1.4. Uno de los brazos del interferómetro se alinee a lo largo de la dirección del movimiento de la Tierra a través del éter. La Tierra moviéndose a través del éter sería el equivalente al éter que fluye por la Tierra en la dirección opuesta a velocidad v, como se muestra en la figura 1.4. Este viento de éter que sopla en dirección opuesta debe provocar que la velocidad de la luz medida en el sistema de referencia de la Tierra sea $c - v$ conforme se aproxima al espejo M_2 en la figura 1.4 y $c + v$ después de reflejarse en éste. La velocidad v es la velocidad de la Tierra a través del espacio, y por tanto la velocidad del viento de éter, y c es la velocidad de la luz en el sistema del éter. Los dos haces de luz reflejados en M_1 y M_2 se recombinan y se forma un patrón de interferencia que consta de bandas, o franjas, oscuras y brillantes alternadas.

Durante el experimento, el patrón de interferencia se observó mientras el interferómetro se hacía rotar 90°. Esta rotación modifica la velocidad del viento de éter a lo largo de la dirección de los brazos del interferómetro. El efecto

[4] A. A. Michelson y E. W. Morley, *Am. J. Sci.* 134:333, 1887.

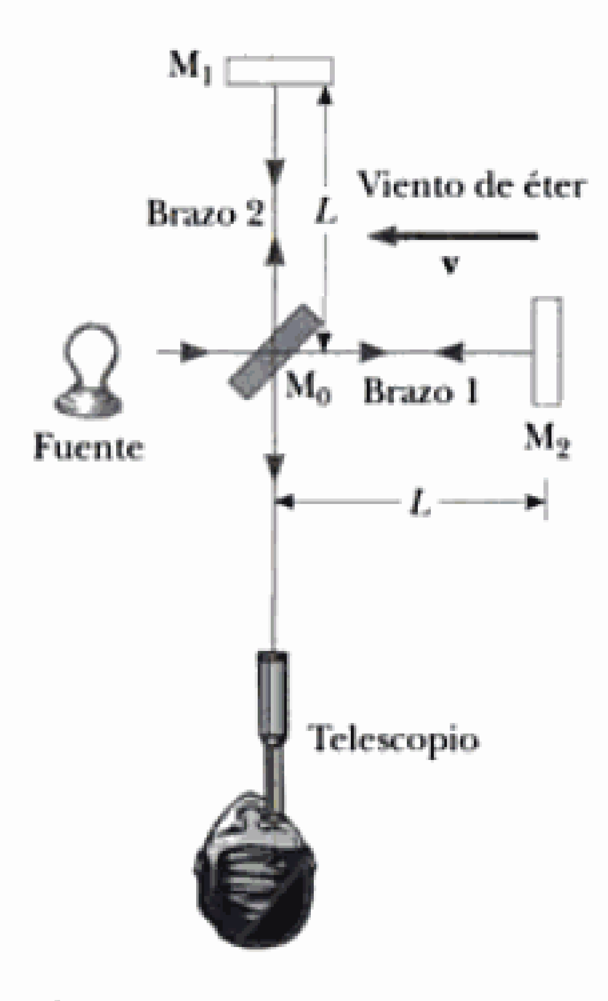


Figura 1.4 Diagrama del interferómetro de Michelson. Según la idea del viento de éter, la velocidad de la luz debe ser $c - v$ a medida que el haz se aproxima al espejo M_2 y $c + v$ después de la reflexión.

de esta rotación debió provocar que el patrón de franjas se desplazara ligeramente, pero de manera mensurable. ¡Las mediciones no mostraron ningún cambio en el patrón de interferencia! El experimento de Michelson-Morley fue repetido por otros investigadores en diversas condiciones y en momentos diferentes del año en que se esperaba que el viento de éter hubiera cambiado de dirección y magnitud, pero los resultados siempre fueron los mismos: *Jamás se observó ningún desplazamiento de las franjas que tuviera la magnitud requerida.*[5]

Los resultados negativos del experimento de Michelson-Morley no sólo significaban que la velocidad de la luz no depende de la dirección de propagación de la luz, sino que también contradecían la hipótesis del éter. Los resultados negativos también indicaban que era imposible medir la velocidad absoluta de la Tierra con respecto al sistema de referencia del éter. Como se verá en la siguiente sección, los postulados de Einstein explican brevemente ésta y una amplia gama de otras cuestiones desconcertantes, relegando la idea del éter al olvido de la historia. Hoy día, la luz se interpreta como un fenómeno *que no requiere de ningún medio para propagarse.* Como resultado, la idea de un éter en que pudieran desplazarse estas ondas se volvió innecesaria.

Detalles del experimento de Michelson-Morley

Para comprender el resultado del experimento de Michelson-Morley, se supone que el interferómetro que se muestra en la figura 1.4 cuenta con dos brazos de igual longitud, L. Primero se considera el haz que se desplaza en forma paralela a la dirección del viento de éter, que en la figura 1.4 se considera horizontal. Según la mecánica newtoniana, a medida que el haz se mueve a la derecha, su velocidad se reduce debido al viento tomando, con respecto a la Tierra, el valor $c - v$. En su viaje de regreso, a medida que el haz de luz se mueve a la izquierda en la dirección del viento, su velocidad con respecto a la Tierra es $c + v$. Así, el tiempo de desplazamiento a la derecha es $L/(c - v)$, y el tiempo de desplazamiento a la izquierda es $L/(c + v)$. El tiempo total del recorrido para el viaje redondo a lo largo de la trayectoria horizontal es

$$t_1 = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} = \frac{2L}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}$$

Ahora se considerará el haz de luz que se desplaza en forma perpendicular al viento, como se muestra en la figura 1.4. Debido a que en este caso la velocidad del haz con respecto a la Tierra es $(c^2 - v^2)^{1/2}$ (vea la figura 1.3c), el tiempo del recorrido para cada mitad de este desplazamiento es $L/(c^2 - v^2)^{1/2}$, y el tiempo total del recorrido para el viaje redondo es

$$t_2 = \frac{2L}{(c^2 - v^2)^{1/2}} = \frac{2L}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

Así, la diferencia temporal entre el haz que se desplaza en sentido horizontal y el que lo hace verticalmente es

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2L}{c}\left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\right]$$

[5]Desde el punto de vista de un observador en la Tierra, los cambios en la velocidad y la dirección de la luz en el transcurso de un año son vistos como desplazamientos del viento de éter. De hecho, aun si la velocidad de la Tierra con respecto al éter fuese igual a cero en algún punto de la órbita terrestre, seis meses después la velocidad de la Tierra sería igual a 60 km/s con respecto al éter, y entonces se encontraría un claro desplazamiento de franjas. Sin embargo, nadie ha visto alguno.

Debido a que $v^2/c^2 \ll 1$, esta expresión puede simplificarse aplicando el siguiente desarrollo binomial al que se han eliminado todos los términos superiores al segundo orden:

$$(1 - x)^n \approx 1 - nx \quad (\text{para } x \ll 1)$$

En nuestro caso, $x = v^2/c^2$ y se encuentra

$$\Delta t = t_1 - t_2 \approx \frac{Lv^2}{c^3} \tag{1.4}$$

Los dos haces de luz comienzan su recorrido en fase y regresan para formar un patrón de interferencia. Se supone que el interferómetro se ajusta para franjas paralelas y que un telescopio se enfoca en una de estas franjas. La diferencia temporal entre los dos haces de luz origina una diferencia de fase entre ambos, lo que genera el patrón de interferencia de franjas cuando éstas se combinan en la posición del telescopio. Al rotar el interferómetro 90° en un plano horizontal, debe detectarse una diferencia en el patrón (figura 1.6), de modo que los dos haces intercambien papeles. Lo anterior resulta en una diferencia temporal neta igual al doble que la proporcionada por la ecuación 1.4. La diferencia de trayectoria correspondiente a esta diferencia temporal es

$$\Delta d = c(2\Delta t) = \frac{2Lv^2}{c^2}$$

El desplazamiento de franjas correspondiente es igual a esta diferencia de trayectoria dividida entre la longitud de onda de la luz, λ, debido a que un cambio de una longitud de onda en la trayectoria corresponde a un desplazamiento de una franja.

$$\text{Desplazamiento} = \frac{2Lv^2}{\lambda c^2} \tag{1.5}$$

En los experimentos realizados por Michelson-Morley, cada haz de luz era reflejado por espejos muchas veces a fin de obtener una longitud de trayectoria efectiva incrementada L aproximadamente igual a 11 m. Usando este valor, y tomando v igual a 3×10^4 m/s, la velocidad de la Tierra alrededor del Sol, se obtiene una diferencia de trayectoria de

$$\Delta d = \frac{2(11\text{ m})(3 \times 10^4\text{ m/s})^2}{(3 \times 10^8\text{ m/s})^2} = 2.2 \times 10^{-7}\text{ m}$$

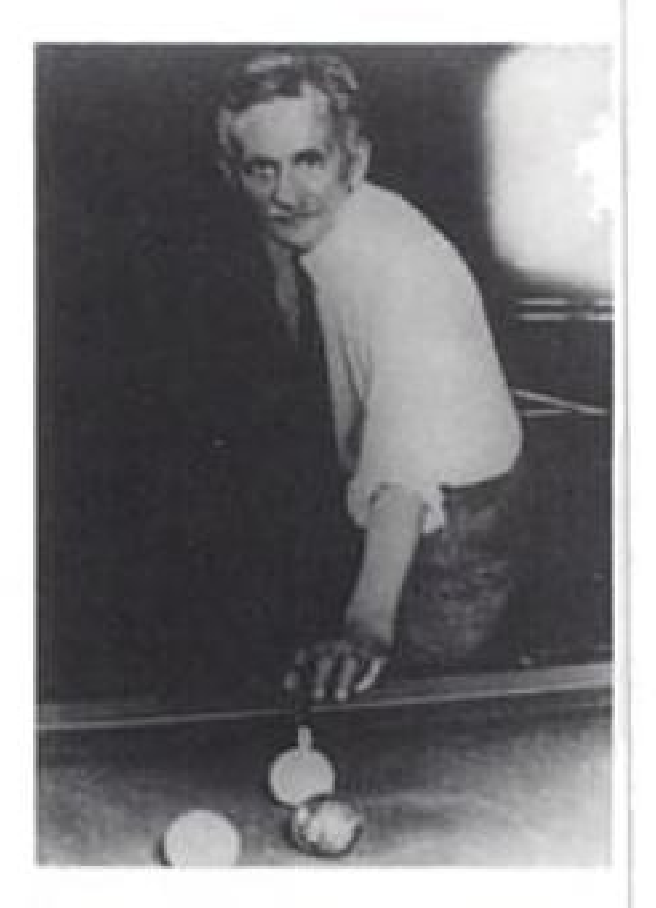


Figura 1.5 Albert A. Michelson (1852-1931). Físico alemán-estadounidense, Michelson inventó el interferómetro y dedicó gran parte de su vida a realizar mediciones exactas sobre la velocidad de la luz. Fue el primer estadounidense en ganar el premio Nobel (1907), debido a su trabajo en óptica. Su experimento más conocido, realizado con Edward Morley en 1887, demostró que era imposible medir la velocidad absoluta de la Tierra con respecto al éter. La obra subsiguiente de Einstein en su teoría de la relatividad especial eliminó la idea del éter al suponer que la velocidad de la luz tenía el mismo valor en todos los sistemas de referencia inerciales. (*Biblioteca Nimitz, U.S.N.A/Cortesía del Archivo Visual AIP Emilio Segre.*)

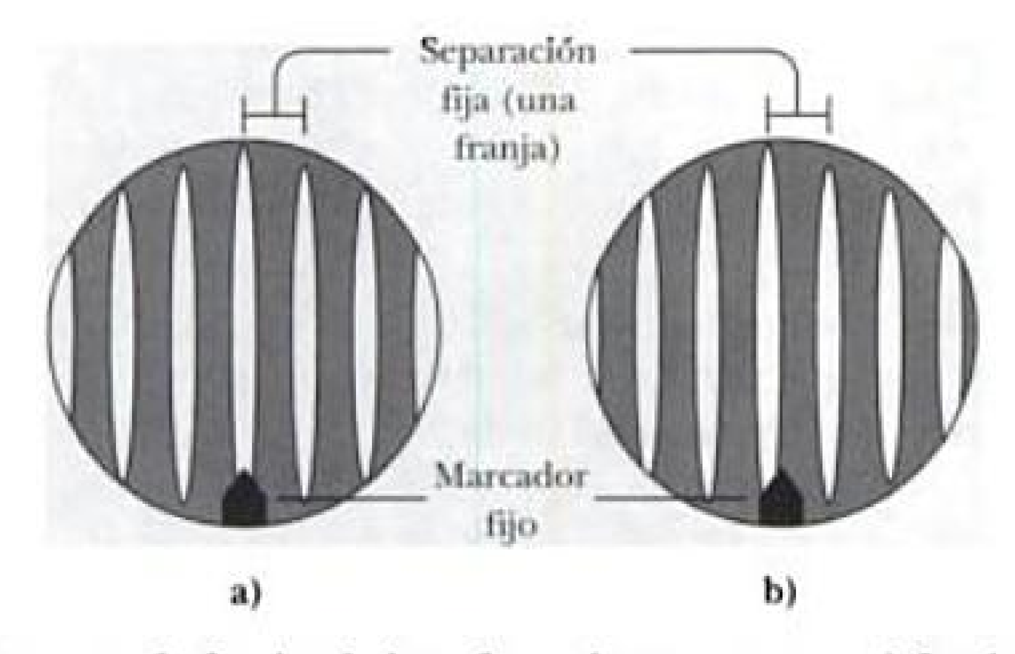


Figura 1.6 Esquema de franjas de interferencia que muestra a) franjas antes de la rotación y b) desplazamiento de las franjas esperado después de una rotación de 90° del interferómetro.

Esta distancia adicional de recorrido debe producir un desplazamiento observable en el patrón de franjas. En específico, al usar luz con una longitud de onda igual a 500 nm, para una rotación de 90° se encuentra un desplazamiento de las franjas igual a

$$\text{Desplazamiento} = \frac{\Delta d}{\lambda} = \frac{2.2 \times 10^{-7}\text{ m}}{5 \times 10^{-7}\text{ m}} \approx 0.40$$

El instrumento de precisión diseñado por Michelson y Morley era capaz de detectar un desplazamiento en el patrón de franjas tan pequeño como 0.01 de franja. Sin embargo, *no detectaron desplazamiento alguno en el patrón de franjas.* Desde entonces, el experimento ha sido repetido muchas veces por varios científicos en diversas condiciones, y jamás se ha detectado ningún desplazamiento. Así, se concluyó que no es posible detectar el movimiento de la Tierra con respecto al éter.

Muchos esfuerzos fueron realizados para explicar los resultados nulos del experimento de Michelson-Morley y preservar el concepto del éter y la ley galileana de la adición para la velocidad de la luz. Debido a que se ha demostrado que todas estas propuestas son erróneas, aquí ya no se consideran más y la atención se centra entonces en una prometedora propuesta planteada por George F. Fitzgerald y Hendrik A. Lorentz. En la década de 1890, Fitzgerald y Lorentz intentaron explicar los resultados nulos haciendo la siguiente suposición *ad hoc.* Propusieron que la longitud de un objeto que se mueve a velocidad v se contraería a lo largo de la dirección de recorrido por un factor de $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. El resultado neto de esta contracción sería un cambio de longitud en uno de los brazos del interferómetro, de modo que no ocurriría diferencia de trayectoria cuando se rotara el interferómetro.

Nunca en la historia de la física se hicieron esfuerzos tan valerosos para intentar explicar la ausencia de un resultado esperado como a los que se hicieron en el experimento de Michelson-Morley. Las dificultades originadas por este resultado nulo fueron tremendas, no sólo por el hecho de que las ondas de luz eran un nuevo tipo de ondas que no necesitaban un medio para propagarse, sino porque las transformaciones galileanas no eran aplicables a sistemas de referencia inerciales que se mueven a velocidades relativas altas. El escenario estaba listo para Albert Einstein, quien resolvió estos problemas en 1905 con su teoría especial de la relatividad.

1.4 POSTULADOS DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL

En la sección anterior se observó cómo es imposible medir la velocidad del éter con respecto a la Tierra y el fracaso de la transformación galileana de la velocidad en el caso de la luz. En 1905, Albert Einstein (figura 1.7) propuso una teoría que eliminó estas dificultades y a la vez modificó por completo nuestra noción de espacio y tiempo.[6] Einstein basó su teoría especial de la relatividad en dos postulados:

Postulados de la relatividad especial

1. **El principio de la relatividad:** Todas las leyes de la física tienen la misma forma en todos los sistemas de referencia inerciales.
2. **La constancia de la velocidad de la luz:** La velocidad de la luz en el vacío posee el mismo valor, $c = 3 \times 10^8$ m/s, en todos los sistemas de referencia inerciales, sin importar la velocidad del observador o la velocidad de la fuente emisora de luz.

[6] A. Einstein, "On the Electrodynamics of Moving Bodies", *Ann. Physik* 17:891, 1905. Para leer una traducción al inglés de este artículo y otras publicaciones de Einstein, consulte el libro de H. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski y H. Weyl, *The Principle of Relativity*, Dover, 1958.

B I O G R A F Í A

ALBERT EINSTEIN
(1879–1955)

Albert Einstein, uno de los físicos más grandes de la historia, nació en Ulm, Alemania. De niño fue muy infeliz debido a la disciplina de las escuelas alemanas y terminó sus primeros estudios en Suiza a los 16 años. Debido a que no podía obtener un puesto académico luego de graduarse en la Escuela Politécnica Federal Suiza en 1901, aceptó un trabajo en la oficina suiza de patentes en Berna. En sus ratos libres continuó estudiando física teórica. En 1905, a los 26 años, publicó cuatro artículos científicos que revolucionaron la física. Uno de éstos, por el que ganó el premio Nobel en 1921, trata sobre el efecto fotoeléctrico. Otro estaba relacionado con el movimiento Browniano, el movimiento irregular de partículas pequeñas suspendidas en un líquido. Los otros dos artículos abordaban lo que hoy día se considera como su contribución fundamental, la teoría especial de la relatividad. En 1915, Einstein publicó su obra sobre la teoría general de la relatividad, que relaciona la gravedad con la estructura del espacio y el tiempo. Una de las predicciones admirables de esta teoría es que la intensa fuerza gravitacional en la vecindad de objetos muy masivos provoca que los haces de luz se desvíen de trayectorias rectas. Ésta y otras predicciones de la teoría general de la relatividad han sido comprobadas experimentalmente (vea el ensayo de Clifford Will en el sitio *Web* que acompaña este texto).

Einstein realizó muchas otras contribuciones importantes al desarrollo de la física moderna, incluyendo el concepto del cuanto de luz y la idea de la emisión estimulada de radiación, que condujo a la invención del rayo láser 40 años después. No obstante, a lo largo de su vida rechazó la interpretación probabilística de la mecánica cuántica al describir eventos a escala atómica a favor de un punto de vista determinista. Se le cita afirmando "Dios no juega a los dados con el universo". Niels Bohr, uno de los fundadores de la mecánica cuántica, respondió a este comentario al afirmar: "¡No le digan a Dios qué hacer!"

En 1933, Einstein dejó Alemania (que entonces estaba bajo el control nazi) y pasó el resto de su vida en el Instituto de Estudios Avanzados en Princeton, Nueva Jersey. Dedicó la mayor parte de sus últimos años a una investigación infructuosa que buscaba establecer una teoría unificada de la gravedad y el electromagnetismo.



Figura 1.7 Albert Einstein tocando su querido violín, 1941. (*Hansel Mieth, Life Magazine © Time, Inc.*)

El primer postulado establece que *todas* las leyes de física, las relacionadas con electricidad y magnetismo, óptica, termodinámica, mecánica, etc., asumen la misma forma matemática o son covariantes en todos los sistemas de coordenadas que se mueven a velocidad constante entre sí. Este postulado es una generalización muy amplia del principio de relatividad de Newton, que sólo se refiere a las leyes de la mecánica. Desde un punto de vista experimental, el principio de la relatividad de Einstein establece que ningún experimento de cualquier tipo puede determinar un sistema de referencia en reposo absoluto, y que todos los sistemas de referencia inerciales son indistinguibles experimentalmente.

Observe que el postulado 2, el principio de la constancia de la velocidad de la luz, es consistente con el postulado 1: si la velocidad de la luz no fuese la misma en todos los sistemas de referencia inerciales, sino que fuera c en sólo uno, sería posible distinguir entre sistemas inerciales e identificar un sistema de referencia preferencial, absoluto, en contradicción con el postulado 1. El postulado 2 también descarta el problema de medir la velocidad del éter, al negar esencialmente la existencia del éter y afirmar con audacia que la luz siempre se desplaza a la velocidad c con respecto a cualquier observador inercial. El postulado 2, una brillante idea teórica de Einstein en 1905, ha sido comprobada directamente por medios experimentales en muchas formas. Quizá la demostración más directa es la medición de la velocidad de ondas electromagnéticas de muy alta frecuencia (rayos gamma), emitidas por partículas inestables (piones neutros) que se desplazan a 99.975% de la velocidad de la luz con respecto al laboratorio. La velocidad medida de los rayos gamma con respecto al laboratorio coincidió en este caso hasta en cinco cifras significativas con la velocidad de la luz en el vacío.

El experimento de Michelson-Morley fue realizado antes que Einstein publicara su trabajo sobre la relatividad, y no se sabe si éste sabía sobre los detalles del experimento. A pesar de ello, el resultado nulo del experimento puede entenderse con facilidad en el contexto de la teoría de Einstein. Según su principio de la relatividad, las premisas del experimento de Michelson-Morley eran incorrectas. En el proceso de tratar de explicar los resultados esperados, aquí se planteó que cuando la luz viaja contra el viento de éter su velocidad es $c - v$, lo cual coincide con la ley galileana de la adición de velocidades. No obstante, si el estado de movimiento del observador o de la fuente no afecta el valor encontrado para la velocidad de la luz, el valor siempre será c. También, después de reflejarse en el espejo, la luz efectúa el viaje de regreso a una velocidad igual a c, no a la velocidad $c + v$. Así, el movimiento de la Tierra no debe afectar el patrón de franjas que se observa en el experimento de Michelson-Morley, de modo que debe esperarse un resultado nulo.

Tal vez en este momento el lector ha concluido correctamente que las transformaciones galileanas de coordenadas y de velocidad son incorrectas; es decir, que las transformaciones galileanas no preservan todas las leyes de la física en la misma forma para diferentes sistemas de referencia inerciales. Las correctas transformaciones de coordenadas y temporales que preservan la forma covariante de todas las leyes físicas en dos sistemas de coordenadas que se mueven de manera uniforme entre sí se denominan *transformaciones de Lorentz*. Éstas se deducen en la sección 1.6. Aunque la transformación galileana preserva la forma de las leyes de Newton en dos sistemas que se mueven uniformemente entre sí, las leyes newtonianas de la mecánica son limitadas y sólo son válidas para velocidades bajas. En general, las leyes de Newton deben sustituirse por las leyes de la mecánica relativista de Einstein, que son válidas para todas las velocidades y son invariantes, como todas las leyes físicas, bajo las transformaciones de Lorentz.

1.5 CONSECUENCIAS DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL

Casi todo aquel aficionado a la ciencia, inclusive de manera superficial, está enterado de algunas de las sorprendentes predicciones que surgen debido al enfoque de Einstein del movimiento relativo. A medida que en esta sección se analicen algunas de las consecuencias de la relatividad se encontrará que entran en conflicto con nuestras nociones básicas de espacio y tiempo. Aquí el estudio de estas cuestiones se restringe a los conceptos de longitud, tiempo y simultaneidad, que difieren bastante en la mecánica relativista y en la mecánica newtoniana. Por ejemplo, se encontrará que *la distancia entre dos puntos y el intervalo de tiempo que transcurre entre dos eventos dependen del sistema de referencia en el que se miden.* Es decir, *en la relatividad no existen la longitud absoluta ni el tiempo absoluto.* Además, *eventos que ocurren en forma simultánea en sitios distintos en un sistema de referencia no son simultáneos en otro sistema de referencia que se mueve uniformemente con respecto al primero.*

Antes de analizar las consecuencias de la relatividad especial, primero es necesario comprender cómo un observador en un sistema de referencia inercial describe un evento. Un evento se define como un suceso descrito por tres coordenadas espaciales y una temporal. En general, diferentes observadores en sistemas inerciales distintos describen el mismo evento con coordenadas espacio-tiempo diferentes.

El sistema de referencia que se utiliza para describir un evento está constituido por una cuadrícula de coordenadas y un conjunto de relojes ubicados en las intersecciones de la cuadrícula, como se muestra en dos dimensiones en la figura 1.8. Se requiere que los relojes estén sincronizados. Esto puede lograrse de varias formas con ayuda de señales luminosas. Por ejemplo, suponga que un observador situado en el origen tiene un reloj maestro con el que envía un pulso de luz en el instante $t = 0$. El pulso de luz llega en un tiempo igual a r/c a un segundo reloj situado a una distancia r del origen. Por tanto, el segundo reloj está sincronizado con el reloj que se encuentra en el origen si en él se mide un tiempo r/c en el instante en que recibe el pulso de luz. En este procedimiento de sincronización se supone que la velocidad de la luz posee el mismo valor en todas las direcciones y en todos los sistemas inerciales. Además, el procedimiento implica un evento registrado por un observador en un sistema de referencia inercial específico. Relojes en otros sistemas de referencia inerciales pueden sincronizarse de manera semejante. Un observador en algún otro sistema de referencia inercial asignaría distintas coordenadas espacio temporales a los eventos, utilizando otra cuadrícula de coordenadas con otra disposición de relojes.

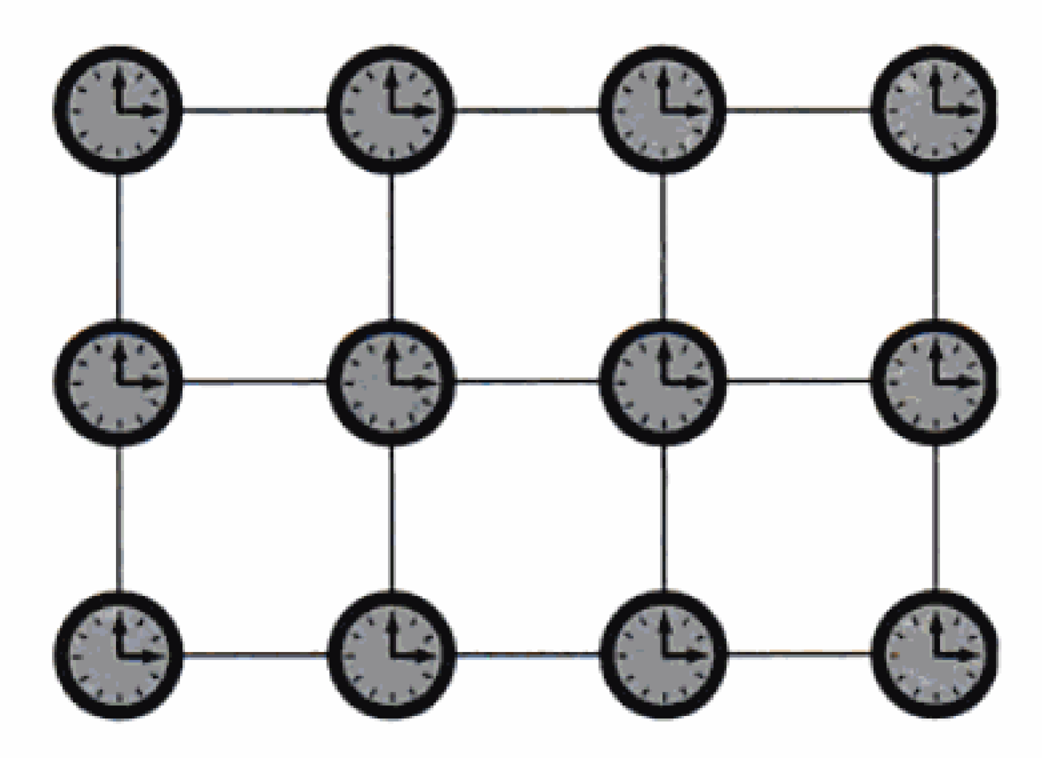


Figura 1.8 En relatividad se usa un sistema de referencia que consta de una cuadrícula de coordenadas y un conjunto de relojes sincronizados.

Simultaneidad y relatividad del tiempo

Una premisa básica de la mecánica newtoniana es que existe una escala universal del tiempo igual para todos los observadores. De hecho, Newton escribió que "el tiempo absoluto, verdadero y matemático, por sí mismo, y por naturaleza propia, fluye igualmente sin ninguna relación con nada externo". Así, Newton y sus seguidores simplemente dieron por un hecho la simultaneidad. En su teoría de la relatividad especial, Eistein abandonó esta suposición. Según Einstein, *la medición de un intervalo de tiempo depende del sistema de referencia en que se realiza la medición.*

Einstein concibió el siguiente experimento conceptual para ilustrar esta cuestión. Un vagón se desplaza a velocidad uniforme, y dos rayos impactan sobre los extremos del vagón, como se muestra en la figura 1.9a, dejando marcas en el vagón y en el suelo. Las marcas en el vagón se identifican como A' y B'; las del suelo se identifican como A y B. Un observador en O' que se mueve con el vagón está a medio camino entre A' y B', y un observador en Tierra ubicado en O está a medio camino entre A y B. Los eventos registrados por los observadores son las señales luminosas dejadas por los rayos.

Las dos señales luminosas llegan al mismo tiempo al observador que está en O, como se indica en la figura 1.9b. Este observador se da cuenta de que las señales luminosas se han desplazado a la misma velocidad recorriendo las mismas distancias. Así, el observador en O concluye que los eventos en A y B ocurrieron simultáneamente. Ahora considere los mismos eventos según los ve el observador que está en el vagón, en O'. En el instante en que la luz llega al observador en O, el observador en O' se ha desplazado como se indica en la figura 1.9b. Así, la señal luminosa proveniente de B' ya ha pasado por O', pero la luz proveniente de A' aún no llega a O'. Según Einstein, *el observador en O' debe encontrar que la luz se desplaza a la misma velocidad que la que mide el observador en O.* En consecuencia, el observador en O' concluye que el rayo golpeó la parte delantera del vagón antes de hacerlo en la parte trasera. Este experimento conceptual demuestra claramente que los dos eventos, que parecen simultáneos para O, para O' no lo son. En otras palabras,

> Dos eventos que, en general, son simultáneos en un sistema de referencia, no lo son en otro sistema de referencia que se mueve con respecto al primero. Es decir, la simultaneidad no es un concepto absoluto, sino que depende del estado de movimiento del observador.

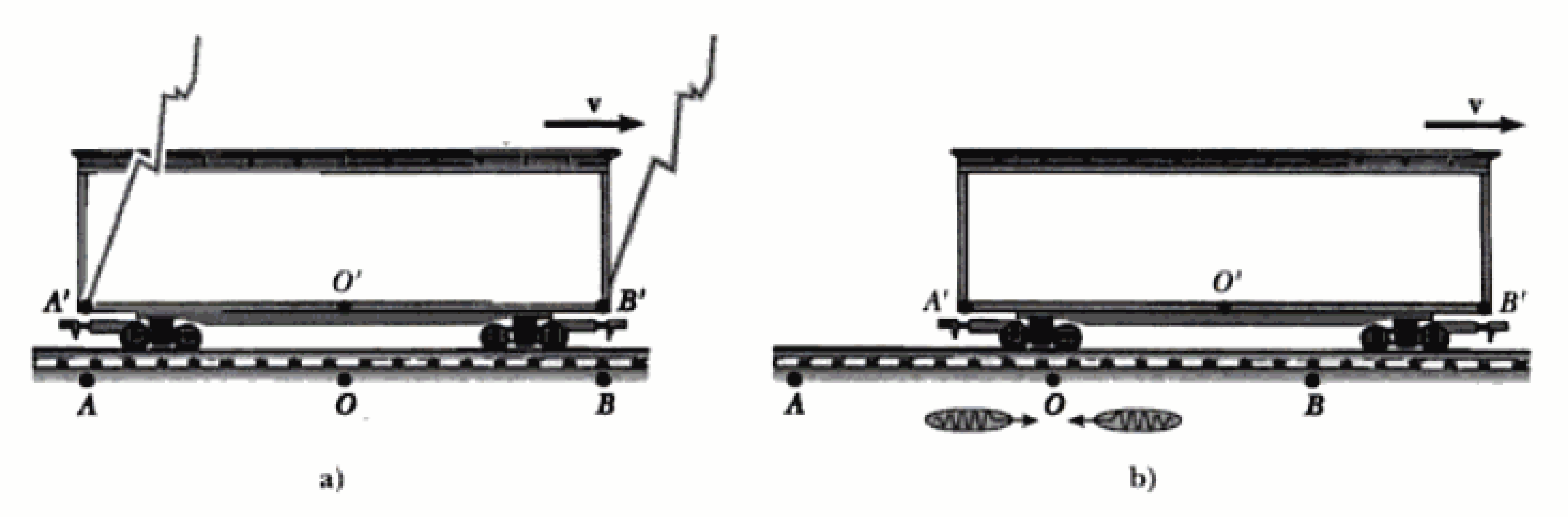


Figura 1.9 Dos rayos caen en los extremos de un vagón en movimiento. a) Los eventos parecen ser simultáneos para un observador en reposo en O, que se encuentra a la mitad de la distancia entre A y B. b) Los eventos no parecen ser simultáneos para el observador que esta en O', quien afirma que el frente del tren recibe el impacto *antes* que la parte posterior.

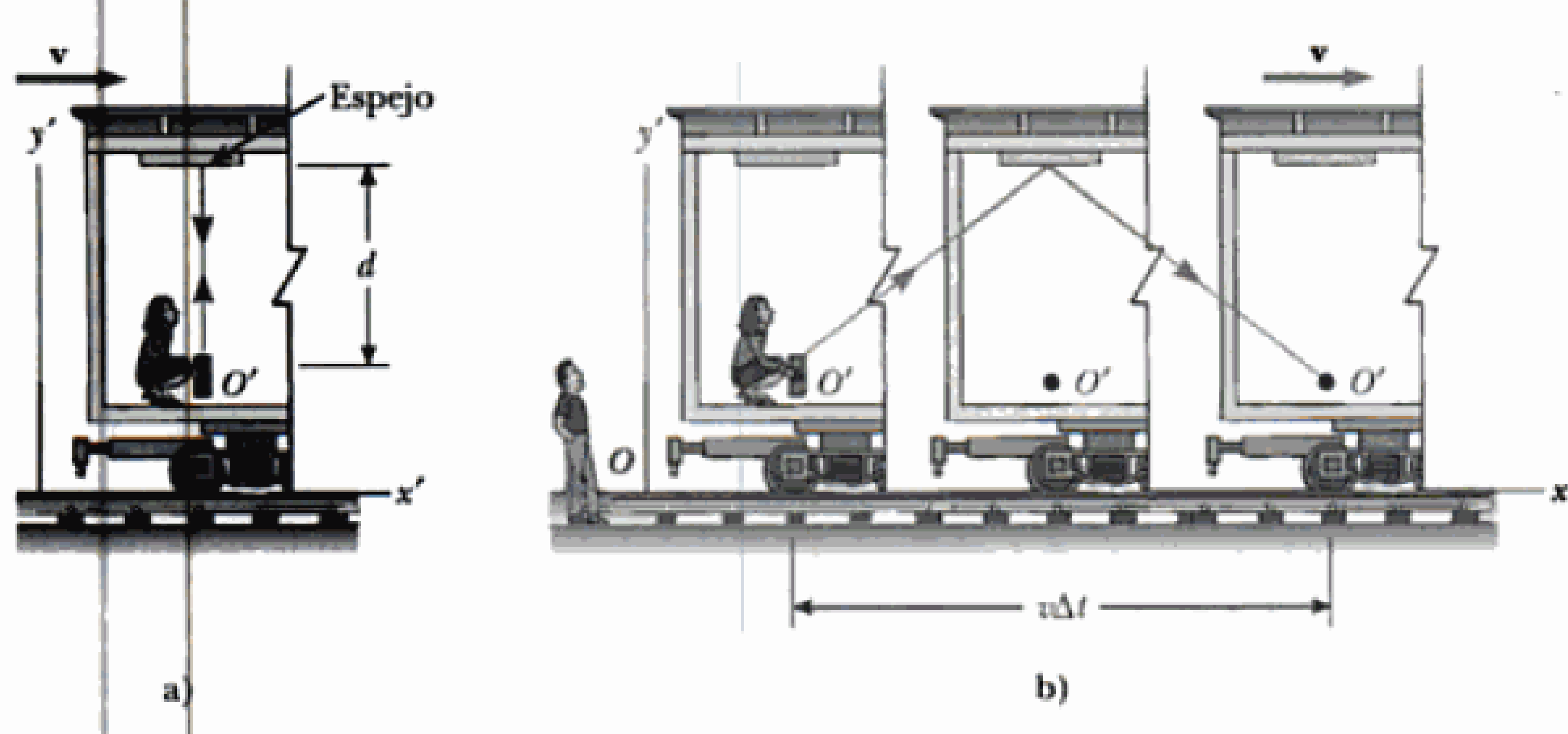
En este punto, quizá el lector se ha preguntado ya cuál observador tiene razón en cuanto a los dos eventos. La respuesta es que *ambos tienen razón*, ya que el principio de relatividad establece que *no existe ningún sistema de referencia inercial preferido.* Aunque ambos observadores llegan a conclusiones diferentes, los dos tienen razón en su propio sistema de referencia, porque el concepto de simultaneidad no es absoluto. De hecho, éste es el punto central de la relatividad: cualquier sistema de referencia que se mueve de manera uniforme puede usarse para describir eventos y hacer física. No obstante, observadores en sistemas de referencia inerciales distintos siempre miden diferentes intervalos de tiempo con sus relojes, así como distancias diferentes con sus ¿reglas? Sin embargo, ambos coinciden en cuanto a la forma de las leyes de física en sus respectivos sistemas de referencia, ya que estas leyes deben ser las mismas para todos los observadores en movimiento uniforme. Es la alteración del tiempo y el espacio lo que permite que las leyes de física (incluso las ecuaciones de Maxwell) sean las mismas para observadores en movimiento uniforme.

Dilatación del tiempo

El hecho de que observadores en sistemas de referencia inerciales diferentes midan intervalos de tiempo distintos entre un par de eventos puede ilustrarse de otra forma si consideramos un vehículo que se mueve hacia la derecha a una velocidad v, como se muestra en la figura 1.10a. En el techo del vehículo se ha fijado un espejo y la observadora en O', que está en reposo en este sistema, sostiene un láser a una distancia d debajo del espejo. En algún instante el láser emite un pulso de luz dirigido hacia el espejo (evento 1) y más tarde, luego de reflejarse en el espejo, el pulso regresa al láser (evento 2). La observadora en O' cuenta con un reloj, C', que usa para medir el intervalo de tiempo $\Delta t'$ entre estos dos eventos. Debido a que el pulso de luz se desplaza a la velocidad c, el tiempo que requiere para viajar de O' al espejo y regresar puede encontrarse a partir de la definición de velocidad:

$$\Delta t' = \frac{\text{distancia viajada}}{\text{velocidad de la luz}} = \frac{2d}{c} \tag{1.6}$$

Este intervalo de tiempo $\Delta t'$ —medido por la observadora *en* O', quien, recuérdese, está en reposo en el vehículo en movimiento— requiere sólo un simple reloj, C', en este sistema de referencia.



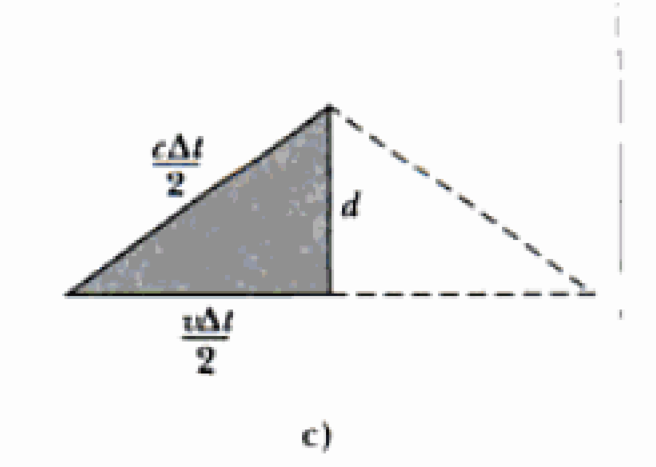


Figura 1.10 a) Un espejo está fijo en un vehículo en movimiento, y un pulso de luz sale de O' en reposo con respecto al vehículo. b) Con respecto a un observador en reposo en la Tierra, el espejo y O' se mueven a una velocidad v. Observe que la distancia recorrida por el pulso de luz, medida por el observador en reposo en la Tierra, es mayor que $2d$. c) Triángulo rectángulo para calcular la relación entre Δt y $\Delta t'$.

Ahora considere el mismo conjunto de eventos según los ve un observador O en un segundo sistema de referencia (figura 1.10b). Según este observador, el espejo y el láser se mueven hacia la derecha con una velocidad v y, como resultado, la sucesión de eventos se presenta diferente a este observador. En el instante en que la luz del láser llega al espejo, éste se ha desplazado a la derecha una distancia $v\Delta t/2$, donde Δt es el intervalo de tiempo requerido para que el pulso de luz viaje desde O' hasta el espejo y de regreso, según lo mide O. En otras palabras, O concluye que, debido al movimiento del vehículo, si la luz ha de impactar en el espejo, debe salir del láser formando un ángulo con respecto a la dirección vertical. Al comparar las figuras 1.10a y 1.10b, se observa que la luz debe recorrer una distancia mayor en b) que en a). (Observe que ninguno de los observadores "sabe" que está en movimiento. Cada uno está en reposo en su propio sistema de referencia inercial.)

De acuerdo con el segundo postulado de la relatividad especial, ambos observadores deben medir una velocidad de la luz igual a c. Debido a que la luz viaja más, según O, se concluye que el intervalo de tiempo Δt medido por O es mayor que el intervalo de tiempo $\Delta t'$ medido por O'. Para obtener una relación entre Δt y $\Delta t'$, conviene usar el triángulo rectángulo que se muestra en la figura 1.10c. El teorema de Pitágoras establece que

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 + d^2$$

Al despejar Δt se obtiene

$$\Delta t = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2d}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{1.7}$$

Debido a que $\Delta t' = 2d/c$, es posible expresar la ecuación 1.7 como

Dilatación del tiempo

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}} = \gamma\Delta t' \tag{1.8}$$

donde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Debido a que γ siempre es mayor que 1, este resultado establece que el intervalo de tiempo Δt medido por el observador que se mueve con respecto al reloj es *más largo* que el intervalo de tiempo $\Delta t'$ medido por el observador en reposo con respecto al reloj. Este efecto se denomina **dilatación del tiempo.**

Un reloj en movimiento avanza más despacio

El intervalo de tiempo $\Delta t'$ en la ecuación 1.8 se denomina tiempo propio. En general, el **tiempo propio,** denotado por Δt_p, **se define como el intervalo de tiempo entre dos eventos según lo mide un observador que ve los eventos ocurriendo en el mismo punto del espacio.** En nuestro caso, el observador O' mide el tiempo propio. Es decir, **el tiempo propio siempre es el tiempo medido por un observador que se mueve junto con el reloj.** Como una ayuda para resolver estos problemas, conviene expresar la ecuación 1.8 en términos del intervalo del tiempo propio, Δt_p, como

$$\Delta t = \gamma\Delta t_p \tag{1.9}$$

Ya que se observa que el tiempo que transcurre entre los "tics" de un reloj en movimiento, $\gamma(2d/c)$, es mayor que el intervalo de tiempo correspondiente que transcurre entre los "tics" de un reloj idéntico en reposo, $2d/c$, suele decirse que "*un reloj en movimiento avanza más despacio que un reloj en reposo por un factor igual a* γ". Esto es cierto para relojes mecánicos normales, así como para el reloj de luz que acaba de describirse. De hecho, estos resultados pueden generalizarse al afirmar que *todos los procesos físicos,* incluyendo las reacciones químicas y los

procesos biológicos, se vuelven más lentos cuando se observan desde un sistema de referencia en movimiento. Por ejemplo, los latidos del corazón de un astronauta que se mueve a través del espacio coincidirán con el tiempo de un reloj ubicado dentro de la nave espacial, pero tanto el reloj del astronauta como los latidos de su corazón parecerán lentos para otro observador, con otro reloj, ubicado en otro sistema de referencia. En su sistema de referencia propio, el astronauta no percibe que sus funciones vitales sean más lentas.

La dilatación del tiempo es un fenómeno bastante real que ha sido verificado mediante varios experimentos. Por ejemplo, los muones son partículas elementales inestables con carga igual a la de un electrón y cuya masa equivale a 207 veces la masa de éste. Los muones son producidos de forma natural por la colisión de radiación cósmica con átomos a una altura de varios miles de metros por encima de la superficie terrestre. Los muones tienen una vida media de sólo 2.2 μs cuando ésta se mide en un sistema de referencia en reposo con respecto a aquéllos. Si se toman los 2.2 μs (tiempo propio) como la vida media promedio de un muón y se supone que su velocidad se aproxima a la de la luz, sería posible que estas partículas viajaran una distancia aproximada de 650 m antes de desintegrarse. Por tanto, podrían no llegar a la Tierra desde la atmósfera superior donde se producen. No obstante, se ha demostrado experimentalmente que un gran número de muones sí *llegan* a la Tierra. El fenómeno de la dilatación del tiempo explica este efecto (vea la figura 1.11a). Respecto a un observador en la Tierra, los muones tienen un tiempo de vida igual a $\gamma\tau$, donde $\tau = 2.2\ \mu$s es el tiempo de vida de éstos en un sistema de referencia que se mueve con ellos. Por ejemplo, para $v = 0.99c$, $\gamma \approx 7.1$ y $\gamma\tau \approx 16\ \mu$s. Por tanto, la distancia media recorrida, según la mide un observador en la Tierra, es $\gamma v\tau \approx 4700$ m, como se indica en la figura 1.11b.

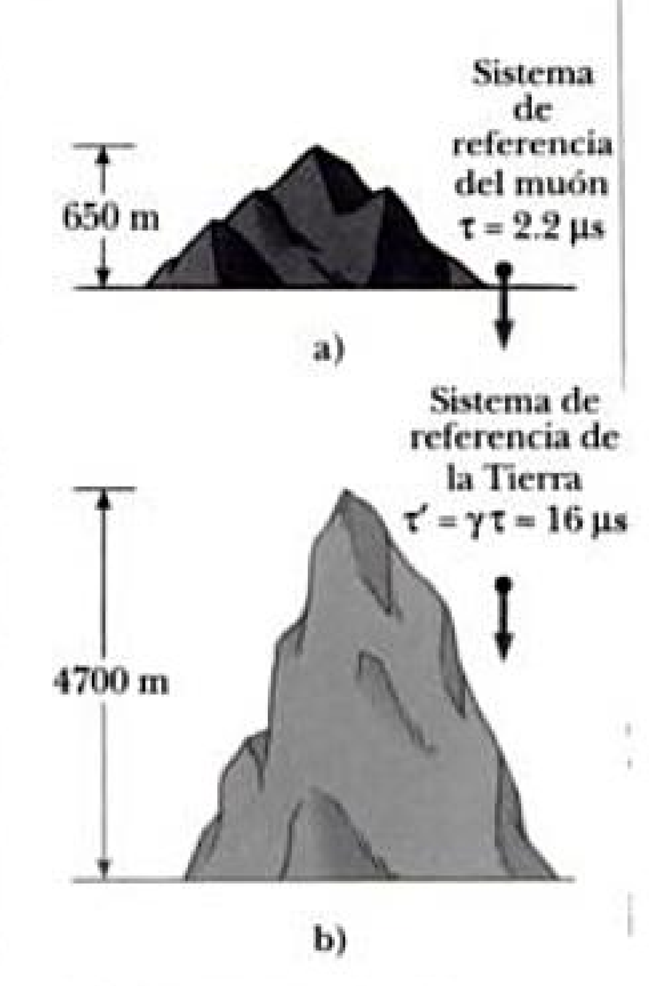


Figura 1.11 a) Muones que se desplazan a una velocidad de 0.99c solamente recorren alrededor de 650 m, según se mide en el sistema de referencia de los muones, donde su vida es de cerca de 2.2 μs. b) Los muones viajan alrededor de 4700 m, según lo mide un observador en la Tierra. Debido a la dilatación del tiempo, la vida de los muones es más larga de acuerdo con el observador en la Tierra.

En 1976 se realizaron experimentos con muones en el laboratorio del Consejo Europeo de Investigaciones Nucleares (CERN, por sus siglas en inglés) en Ginebra. Se inyectaron muones en un gran anillo de almacenamiento, donde alcanzaron velocidades aproximadas a 0.9994c. Los electrones producidos en la desintegración de muones fueron detectados por instrumentos ubicados alrededor del anillo, lo que permitió a los científicos medir la tasa de desintegración y con ello el tiempo de vida de los muones. Se encontró que el tiempo de vida de muones en movimiento era alrededor de 30 veces el tiempo de vida de un muón estacionario (vea la figura 1.12), lo que concuerda con la predicción de la relatividad por un margen menor a dos partes en mil.

Resulta bastante interesante que la dilatación del tiempo pueda observarse directamente si se comparan relojes atómicos de alta precisión, uno a bordo de

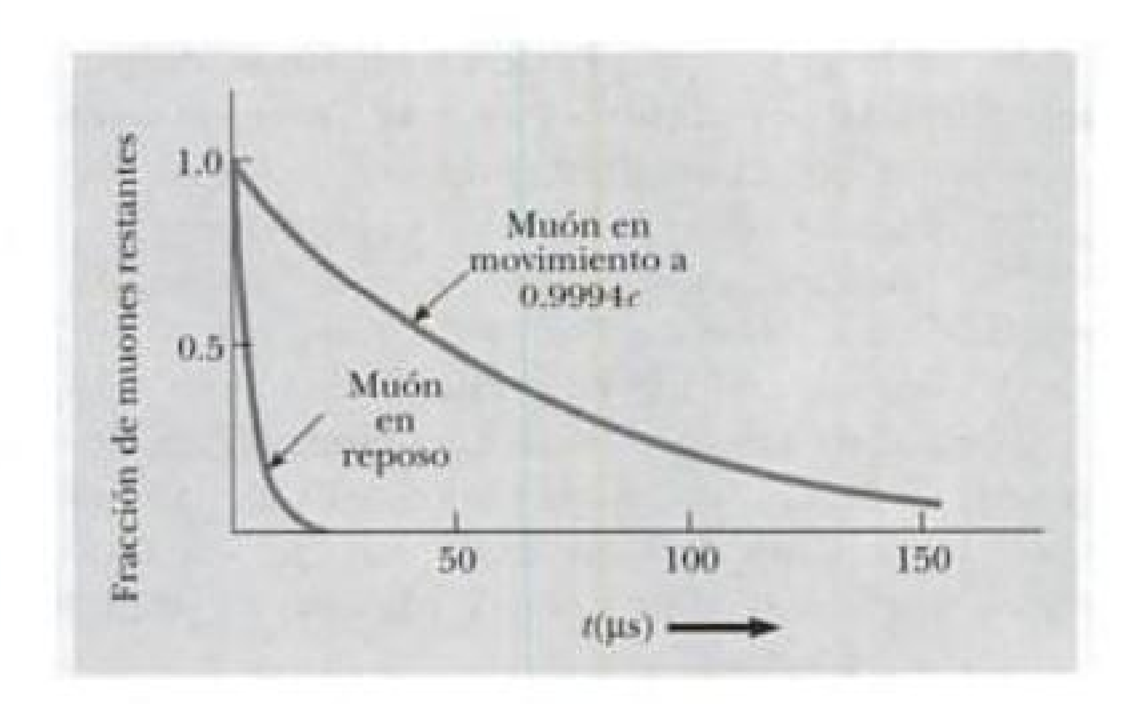


Figura 1.12 Curvas de desintegración para muones que se desplazan a una velocidad de 0.9994c y para muones en reposo.

un avión a propulsión a chorro y el otro ubicado en un laboratorio en la Tierra. El experimento real implicaba el uso de relojes atómicos de haces de cesio muy estable.[7] Los intervalos de tiempo medidos con cuatro de tales relojes en aviones a propulsión a chorro se compararon con intervalos de tiempo medidos por relojes atómicos de referencia ubicados en el Observatorio Naval de Estados Unidos. A fin de comparar estos resultados con la teoría fue necesario considerar muchos factores, incluyendo periodos de aceleración y desaceleración con respecto a la Tierra, variaciones en la dirección de desplazamiento y el campo gravitacional más débil experimentado por los relojes en el avión, en comparación con los relojes ubicados en la Tierra. Los resultados coincidieron bastante bien con las predicciones de la teoría especial de la relatividad, y es posible explicarlos por completo en términos del movimiento relativo entre la Tierra y el avión.

Ejemplo 1.2 ¿Qué es el periodo de un péndulo?

Se mide el periodo de un péndulo igual a 3 s en el sistema de referencia propio de éste. ¿Cuál es el periodo del péndulo cuando lo mide un observador que se mueve a una velocidad de $0.95c$ con respecto al péndulo?

Solución En este caso, el tiempo propio es igual a 3 s. Desde el punto de vista del observador, el péndulo se mueve a $0.95c$. Así, el péndulo constituye en ejemplo de reloj en movimiento. Debido a que un reloj en movimiento avanza más lento que uno estacionario por un factor γ, al aplicar la ecuación 1.8 se obtiene

$$T = \gamma T' = \frac{1}{\sqrt{1 - (0.95c)^2/c^2}}\, 3\text{ s}$$

$$T = (3.2)(3\text{ s}) = 9.6\text{ s}$$

Es decir, un péndulo en movimiento aminora su velocidad o completa un periodo en más tiempo.

Ejercicio 3 Si la velocidad del observador aumenta 5%, ¿cuál es el periodo del péndulo cuando lo mide este observador?

Respuesta 43 s. Observe que el incremento de 5% en la velocidad provoca un cambio de más de 300% en el tiempo dilatado.

Contracción de la longitud

Ya se ha visto que los intervalos de tiempo medidos no son absolutos; es decir, el intervalo de tiempo entre dos eventos depende del sistema de referencia en que se mide. Asimismo, la distancia medida entre dos puntos depende del sistema de referencia. **La longitud propia de un objeto se define como la longitud del objeto medida por alguien que está en reposo con respecto al objeto.** Debe observarse que la longitud propia se define de forma semejante al tiempo propio en el sentido de que éste es el tiempo que transcurre entre los "tics" de un reloj medidos por un observador que está en reposo con respecto al reloj. La longitud de un objeto medido por alguien que se encuentra en un sistema de referencia en movimiento con respecto al objeto siempre es menor que la longitud propia. Este efecto se denomina **contracción de la longitud.**

Para comprender cuantitativamente la contracción de la longitud, considere una nave espacial que se desplaza con una velocidad v de una estrella a otra y dos observadores, uno en la Tierra y otro en la nave espacial. El observador

[7] J.C. Hafele y R.E. Keating, "Around the World Atomic Clocks: Relativistic Time Gains Observed", *Science*, 14 de julio de 1972, p. 168.

en reposo en la Tierra (el cual también se supone que está en reposo con respecto a las dos estrellas) mide la distancia entre las estrellas igual a L_p, donde L_p es la longitud propia. Según este observador, el tiempo necesario para que la nave espacial complete el viaje es $\Delta t = L_p/v$. ¿Cuál es la distancia entre las estrellas que mide un observador que va en la nave espacial en movimiento? Debido a la dilatación del tiempo, el viajero en el espacio mide un tiempo de viaje menor: $\Delta t' = \Delta t/\gamma$. El viajero espacial afirma que está en reposo y observa la estrella destino como si ésta se moviera hacia la nave espacial a una velocidad v. Debido a que el viajero espacial llega a la estrella en un tiempo menor $\Delta t'$, concluye que la distancia, L, entre las estrellas es más corta que L_p. Esta distancia medida por el viajero espacial está dada por

$$L = v\Delta t' = v\frac{\Delta t}{\gamma}$$

Debido a que $L_p = v\Delta t$, se concluye que $L = L_p/\gamma$, o bien

$$L = L_p\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \qquad (1.10)$$

Contracción de la longitud

donde $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ es un factor menor que 1. Este resultado puede interpretarse como sigue:

Si un objeto tiene una longitud propia L_p cuando es medido por un observador que está en reposo con respecto al objeto, cuando éste se mueve a una velocidad v en una dirección paralela a su longitud, entonces se mide que su longitud L es menor, según $L = L_p\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$.

Observe que la contracción de la longitud sólo se lleva a cabo a lo largo de la dirección de movimiento. Por ejemplo, suponga que una barra que se mueve a una velocidad v pasa frente a un observador estacionario en la Tierra, como se muestra en la figura 1.13b. La longitud de la barra medida por un observador en el sistema de referencia asociado a ésta resulta ser la longitud propia L_p, como se ilustra en la figura 1.13a. La longitud de la barra, L, medida por el observador en la Tierra es más corta que L_p por el factor $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$. Advierta que la contracción de la longitud tiene un efecto simétrico: si la barra estuviese en reposo en la Tierra, un observador ubicado en un marco en movimiento que pasara por la Tierra a una velocidad v también mediría que su longitud es más corta por el mismo factor $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$.

Como ya se mencionó, una de las bases fundamentales de la relatividad es que todos los sistemas de referencia inerciales son equivalentes para el análisis de un experimento. Volvamos ahora con el ejemplo de la desintegración de los muones que se mueven a velocidades próximas a la de la luz, a fin de abordar un ejemplo sobre esto. Un observador en el sistema de referencia de los muones mediría la vida propia, mientras que uno ubicado en la Tierra mediría la altura propia de la montaña que se muestra en la figura 1.11. En el sistema de referencia del muón no hay dilatación del tiempo, aunque se observa que la distancia de desplazamiento es más corta cuando se mide desde este sistema de referencia. Asimismo, en el sistema de referencia del observador en la Tierra existe dilatación del tiempo, aunque se mide que la distancia recorrida es la altura propia de la montaña. Así, cuando en ambos sistemas de referencia se realizan cálculos sobre el muón, se observa el efecto de "compensar las pe-

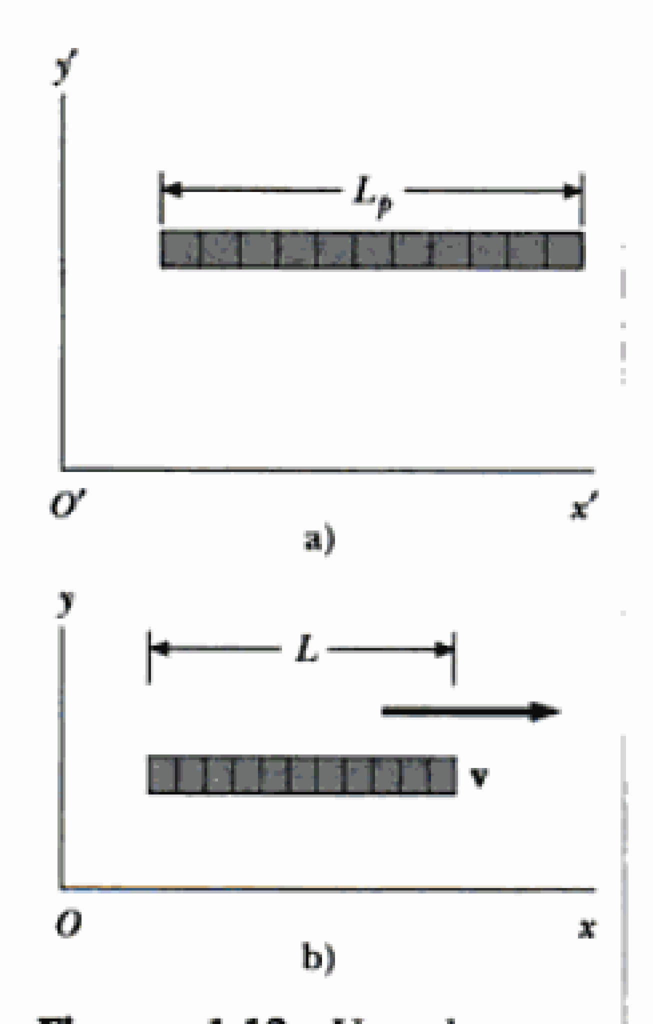


Figura 1.13 Una barra se mueve a la derecha a una velocidad v. a) La barra, según se observa en un sistema de referencia asociado a ésta. b) La barra, según la ve pasar un observador a la velocidad v. Cualquier observador inercial encuentra que la longitud de una barra de un metro de longitud en movimiento que pasa frente a él a una velocidad v es menor que la longitud de una barra estacionaria por un factor igual a $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$.

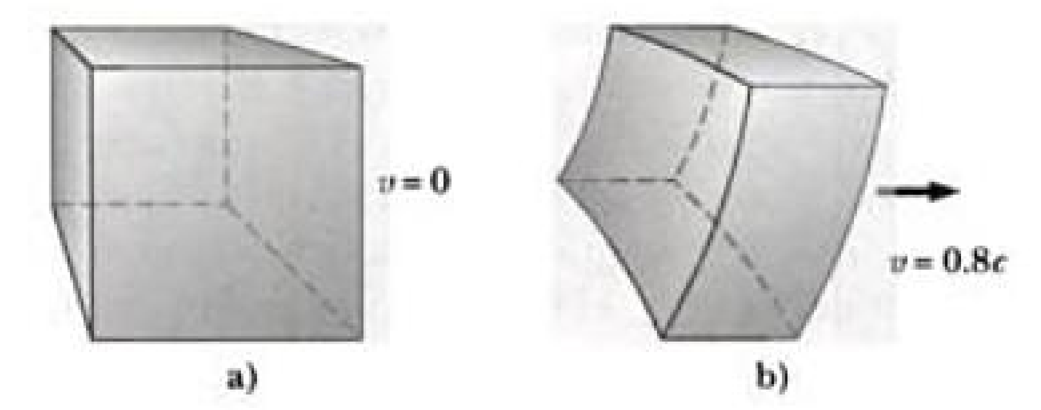


Figura 1.14 Fotografías generadas por computadora de una caja a) en reposo con respecto a la cámara y b) en movimiento a una velocidad $v = 0.8c$ con respecto a la cámara.

nalizaciones", ¡y el resultado del experimento es el mismo! Observe que la longitud propia y el tiempo propio se miden en sistemas de referencia *distintos*.

Si fuese posible fotografiar un objeto en forma de caja en movimiento, su imagen mostraría una contracción de la longitud, y también su configuración estaría distorsionada. Este hecho se ilustra en las figuras simuladas por computadora que se muestran en la figura 1.14 para una caja que pasa frente a un observador a una velocidad $v = 0.8c$. Cuando se abre el obturador de la cámara, registra la forma del objeto en un instante de tiempo dado. Debido a que la luz proveniente de las distintas partes del objeto deben llegar al obturador al mismo tiempo (cuando se toma la fotografía), la luz proveniente de las partes más distantes debe iniciar su recorrido antes de que lo haga la luz proveniente de las partes más próximas. Por tanto, la fotografía registra partes diferentes del objeto en instantes distintos. Lo anterior resulta en una imagen bastante distorsionada que muestra contracción de la longitud horizontal, curvatura vertical y rotación de la imagen.

EJEMPLO 1.3 Contracción de una nave espacial

Mientras una nave espacial se encuentra en reposo con respecto a un observador, su longitud se mide igual a 100 m. Si enseguida la nave se desplaza frente al observador a una velocidad de $0.99c$, ¿cuál será la longitud de la nave medida por éste?

Solución La longitud propia de la nave es de 100 m. Por la ecuación 1.10, la longitud medida cuando la nave está en movimiento es

$$L = L_p\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = (100 \text{ m})\sqrt{1 - \frac{(0.99c)^2}{c^2}} = 14 \text{ m}$$

Ejercicio 4 Si la nave pasa frente a un observador a la velocidad de $0.01000c$, ¿cuál será la longitud que mida éste?

Respuesta 99.99 m.

EJEMPLO 1.4 ¿A qué altura está la nave?

Un observador en la Tierra ve que una nave espacial a una altitud de 435 m se mueve hacia abajo en dirección de la Tierra a una velocidad de $0.970c$. ¿Cuál es la altitud de la nave según la mide un observador que se encuentra dentro de ella?

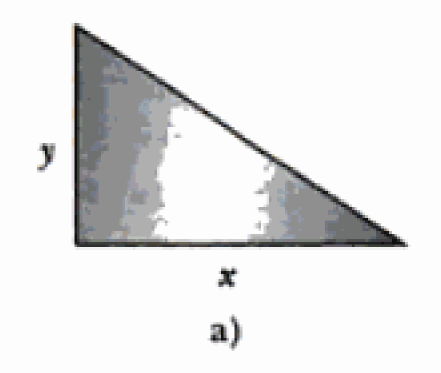
Solución En este caso, la longitud propia es la distancia Tierra-nave espacial, según la aprecia el observador ubicado en la Tierra, o bien, 435 m. El observador en movimiento en la nave encuentra que esta separación (la altitud) es

$$L = L_p\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = (435 \text{ m})\sqrt{1 - \frac{(0.970c)^2}{c^2}}$$
$$= 106 \text{ m}$$

EJEMPLO 1.5 La nave espacial triangular

Una nave espacial de forma triangular se desplaza a $0.950c$ frente a un observador. Cuando la longitud de una nave es medida por un observador en reposo con respecto a ésta (figura 1.15a), se encuentra que las distancias x y y miden 50 m y 25 m, respectivamente. ¿Cuál es la forma de la nave según un observador que la ve moverse a lo largo de la dirección que se muestra en la figura 1.15b?

Solución El observador aprecia que la longitud horizontal de la nave se contrae hasta una longitud de



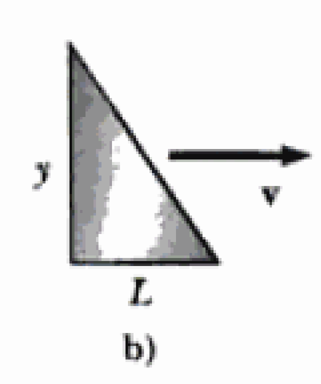


Figura 1.15 (Ejemplo 1.5) a) Cuando la nave espacial está en reposo, su forma es como se muestra. b) La nave espacial se ve como se muestra cuando se mueve a la derecha a una velocidad v. Observe que en este caso sólo se contrae su dimensión x.

$$L = L_p\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$= (50\text{ m})\sqrt{1 - \frac{(0.950c)^2}{c^2}} = 15.6\text{ m}$$

La altura vertical de 25 m permanece sin cambio, debido a que es perpendicular a la dirección de movimiento relativo entre el observador y la nave espacial. La figura 1.15b representa la forma de la nave espacial según la ve el observador que la aprecia en movimiento.

LA PARADOJA DE LOS GEMELOS

OPCIONAL

Si se colocase un organismo vivo en una caja. . . sería posible disponer que éste, al cabo de un vuelo arbitrariamente largo, volviese a su punto de partida sin presentar casi ninguna modificación, en tanto los organismos que permanecieron en sus posiciones originales desde hace mucho originaron nuevas generaciones. **(Planteamiento original de Einstein de la paradoja de los gemelos, hecho en 1911.)**

Una consecuencia intrigante de la dilatación del tiempo es la denominada paradoja de los relojes o de los hermanos gemelos. Considere un experimento que implica a unos gemelos idénticos de 20 años llamados Speedo y Goslo. Ambos gemelos llevan consigo relojes idénticos que han sido previamente sincronizados. Speedo, el más aventurero de los dos, emprende un viaje épico al planeta X, ubicado a 10 años luz de la Tierra. (Observe que 1 año luz —al— es la distancia que recorre la luz en el espacio libre en un año.) Asimismo, la nave espacial puede alcanzar una velocidad de $0.500c$ con respecto al sistema de referencia inercial de su hermano gemelo. Después de llegar al planeta X, Speedo siente nostalgia por su hogar y repentinamente emprende el viaje de regreso a la Tierra a la misma velocidad que en el viaje de ida. A su regreso, Speedo se sorprende al descubrir que muchas cosas han cambiado durante su ausencia. Para Speedo, el cambio más significativo es que su hermano gemelo Goslo *ha envejecido más que él* y que ahora tiene más de 60 años de edad. Por otro lado, Speedo sólo ha envejecido 34.6 años.

En este punto, es justo plantearse la siguiente pregunta: ¿cuál de los gemelos es el viajero y cuál es en realidad el más joven de los dos? Si el movimiento es relativo, ambos están en una situación simétrica y cualquier punto de vista es igualmente válido. Desde la perspectiva de Speedo, es él quien se encuentra en reposo, mientras Goslo se encuentra realizando un viaje espacial a gran velocidad. Para Speedo, son Goslo y la Tierra los que se encuentran en un viaje de 17.3 años para luego volver durante otros 17.3 años. Esto conduce a la paradoja: ¿cuál gemelo presenta signos de envejecimiento excesivo?

Para resolver esta paradoja aparente, es necesario recordar que la relatividad especial se ocupa de sistemas de referencia inerciales que se mueven unos con respecto a otros a *velocidad uniforme.* No obstante, la situación de viaje no es simétrica. Speedo, el viajero espacial, debe experimentar aceleración durante su recorrido. Como resultado, su estado de movimiento no siempre es uniforme, y en consecuencia Speedo no está en un sistema de referencia inercial. No puede considerarse a sí mismo como si siempre estuviese en reposo y que Goslo estuviera en movimiento uniforme. Por tanto, Speedo no puede aplicar una simple dilatación del tiempo al movimiento de Goslo, porque hacerlo así sería una aplicación incorrecta de la relatividad especial. En consecuencia, no hay paradoja y Speedo es en realidad el gemelo más joven al fin del viaje.

No podemos escapar a la conclusión de que Speedo no está en un marco inercial *simple.* Es posible disminuir la longitud del tiempo necesario para acelerar y desace-

lerar la nave espacial de Speedo hasta un intervalo insignificante usando cohetes muy grandes y costosos y afirmar que Speedo gasta una cantidad muy pequeña de tiempo en su recorrido al planeta X desplazándose a $0.500c$ en un sistema de referencia inercial. No obstante, para volver a la Tierra, Speedo debe desacelerar, invertir su movimiento y regresar en un sistema de referencia inercial diferente: uno que se mueve de manera uniforme hacia la Tierra. En el mejor de los casos, Speedo está en *dos* sistemas de referencia inerciales distintos. La cuestión importante es que incluso cuando se idealiza el viaje de Speedo, éste consta de movimiento en dos sistemas de referencia inerciales distintos y un salto mientras pasa de la nave espacial al transbordador de regreso a la Tierra. Solamente Goslo permanece en un sistema de referencia inercial simple, de modo que sólo él puede aplicar correctamente la fórmula de la dilatación del tiempo de la relatividad especial al viaje de Speedo. Así, Goslo encuentra que en vez de envejecer 40 años (20 años luz/$0.500c$), Speedo en realidad sólo tiene $(\sqrt{1 - v^2/c^2})$(40 años), o 34.6 años. Resulta evidente que Speedo dedicó 17.3 años para ir al planeta X y 17.3 años para volver a la Tierra, en concordancia con el planteamiento inicial.

El resultado de que Speedo tiene 34.6 años mientras Goslo tiene 40 años puede confirmarse en una forma directamente experimental desde el sistema de referencia de Speedo si se usa la teoría de la relatividad especial, pero tomando en cuenta el hecho de que *el viaje idealizado de Speedo se realiza en dos sistemas de referencia inerciales distintos.* En otro vuelo imaginario, suponga que Goslo celebra su cumpleaños cada año de una forma bastante peculiar, enviando un poderoso pulso láser para informar a su gemelo que ha cumplido otro año y es más inteligente. Debido a que Speedo está en un sistema de referencia inercial en el viaje espacial en el que el movimiento de recesión de la Tierra parece ser de $0.500c$, los destellos ocurren a una razón de uno cada

$$\frac{1}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}\text{ años} = \frac{1}{\sqrt{1-[(0.500c)^2/c^2]}}\text{ años} = 1.15\text{ años}$$

Lo anterior ocurre porque los relojes en movimiento avanzan más despacio. También, debido al movimiento de recesión de la Tierra, cada destello consecutivo debe recorrer una distancia adicional de $(0.500c)$(1.15 años) entre destellos. En consecuencia, Speedo observa que los destellos llegan con un tiempo total de 1.15 años + $(0.500c)$(1.15 años)$/c$ = 1.73 años. Así, el número total de destellos observados por Speedo en su viaje es (1 destello/1.73 años)(17.3 años) = 10 destellos. Esto significa que Speedo observa que el reloj en la Tierra avanza con más lentitud que el suyo en el viaje espacial debido a que para él han pasado 17.3 años, mientras que en la Tierra solamente han transcurrido 10 años.

En el viaje de vuelta, debido a que la Tierra se dirige hacia Speedo a una velocidad de $0.500c$, los destellos consecutivos tienen menos distancia que recorrer, y el tiempo total que Speedo observa entre la llegada de los destellos se acorta drásticamente: 1.15 años − (0.500)(1.15 años) = 0.577 años/destello. Así, durante el viaje de regreso, Speedo observa (1 destello/0.577 años)(17.3 años) = 30 destellos en total. En suma, durante sus 34.6 años de viaje, Speedo recibe (10 + 30) destellos, lo cual indica que su gemelo ha envejecido 40 años. Observe que la relatividad especial no falla en cuanto al análisis de la situación de Speedo en la medida en que se tomen en cuenta estos *dos* sistemas de referencia inerciales y se supongan tiempos de aceleración y desaceleración despreciables. En sus viajes de ida y vuelta, Speedo considera correctamente que los relojes en la Tierra avanzan más despacio que el suyo, aunque en el viaje de regreso su rápido desplazamiento hacia los destellos de luz compensa la tasa de destellos más lenta.



Figura 1.16 "Me encanta escuchar ese sonido solitario del silbato del tren a medida que la frecuencia de la onda cambia debido al efecto Doppler."

El efecto Doppler relativista

Otra consecuencia importante de la dilatación del tiempo es el corrimiento en la frecuencia que se obtiene en el caso de luz emitida por átomos en movimiento, en comparación a la luz emitida por átomos en reposo. Un fenómeno

semejante, la molesta caída de la tonalidad del sonido del silbato de un tren que pasa, denominado efecto Doppler, es bastante familiar para casi todos los vaqueros (figura 1.16). El efecto Doppler para el sonido suele estudiarse en cursos introductorios de física y reviste un interés especial debido a que el movimiento de la fuente con respecto al medio de propagación puede distinguirse claramente del movimiento del observador. Esto significa que, en el caso del sonido, es posible distinguir el "movimiento absoluto" de sistemas de referencia en movimiento con respecto al aire, que es el medio de propagación del sonido.

Las ondas de luz deben analizarse en forma distinta a como se analizan las ondas sonoras, ya que no requieren de ningún medio para propagarse y no existe ningún método para distinguir el movimiento de la fuente de luz del movimiento del observador. Así, es de esperar encontrar una fórmula diferente para el corrimiento Doppler de ondas de luz, una que sólo sea sensible al movimiento *relativo* de la fuente y el observador, y que sea válida para velocidades relativas de la fuente y el observador próximas a c.

Considere una fuente de ondas de luz que está en reposo en un sistema de referencia S y que emite ondas de frecuencia f y longitud de onda λ, según se miden en S. Se desea encontrar la frecuencia f' y la longitud de onda λ' de la luz que mide un observador fijo en el sistema de referencia S′, que se mueve con velocidad v hacia S, como se muestra en las figuras 1.17a y b. En general, se espera que f' sea mayor que f si S′ se aproxima a S, ya que se cruzan más crestas de ondas por unidad de tiempo, y es de esperar que f' sea menor que f si S′ retrocede con respecto a S. En particular, considere la situación desde el punto de vista de un observador fijo en S′, como se muestra en la figura 1.18. En esta figura se observan dos frentes de onda consecutivos (en gris), emitidos cuando la fuente que se aproxima está en las posiciones 1 y 2, respectivamente. Si el tiempo entre la emisión de estos frentes de onda, según se mide en S′, es T', durante este tiempo el frente 1 se mueve una distancia cT' desde la posición 1.

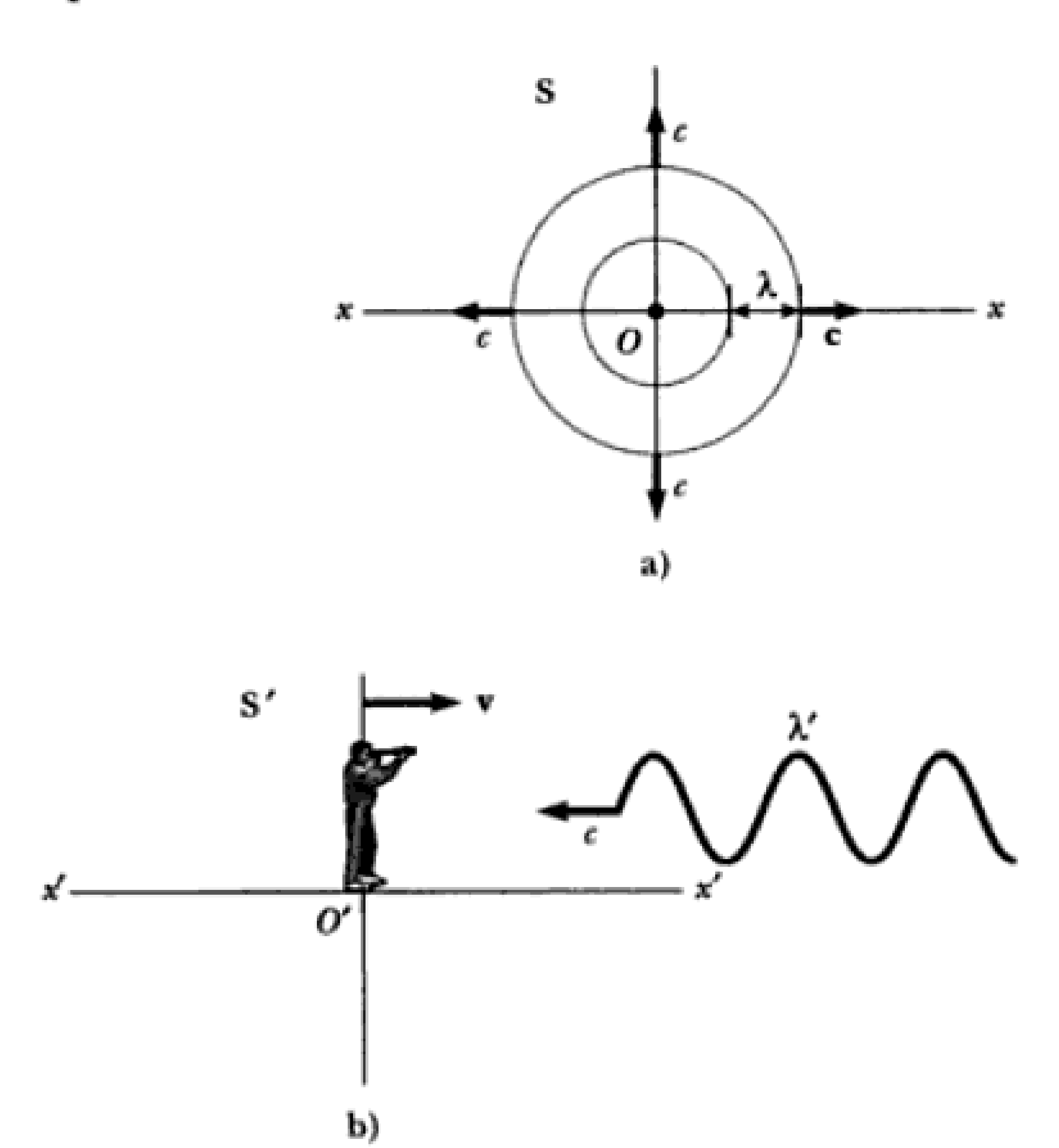


Figura 1.17 a) Una fuente de luz fija en S emite crestas de onda separadas espacialmente por λ y que se mueven hacia afuera a una velocidad c, según son vistas desde S. b) ¿Qué longitud de onda λ' mide un observador en reposo en S′? S′ es un sistema de referencia que se aproxima a S a una velocidad v tal que los ejes x y x' coinciden.

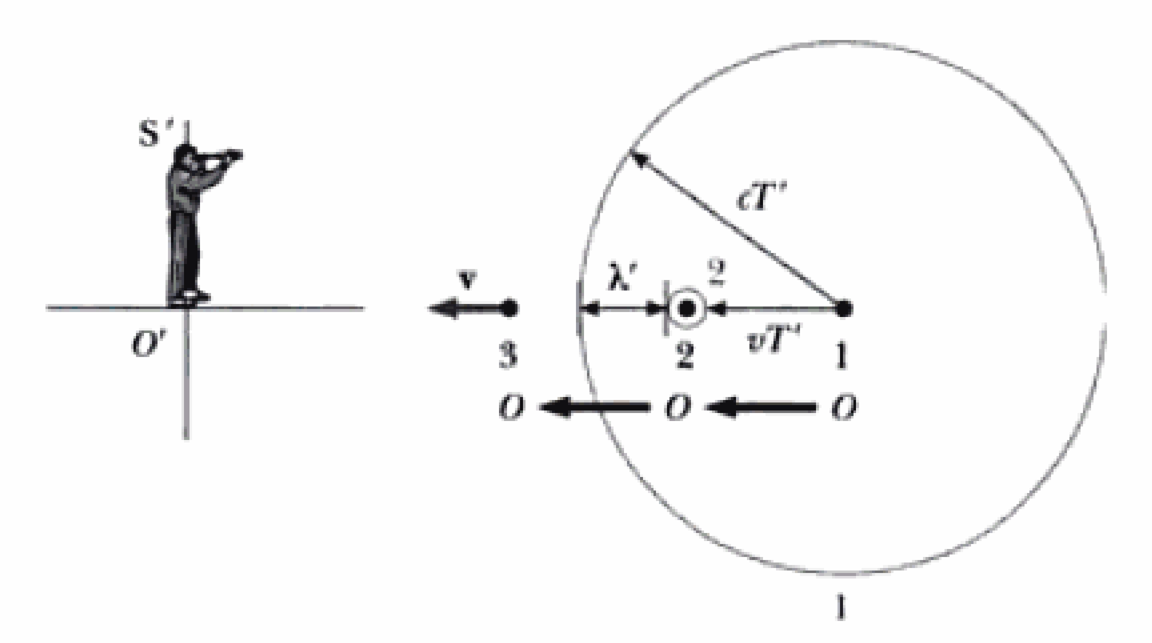


Figura 1.18 Lo que se ve desde S′. 1, 2 y 3 (en negro) muestran tres posiciones consecutivas de O separadas temporalmente por T', el periodo de la luz según se mide desde S′.

Durante este mismo tiempo, la fuente de luz avanza una distancia vT' a la izquierda de la posición 1, y la distancia entre los frentes de onda consecutivos, medida desde S′, es igual a

$$\lambda' = cT' - vT' \tag{1.11}$$

Debido a que desea encontrarse una fórmula para f' (la frecuencia medida en S′) en términos de f (la frecuencia medida en S), se usa la expresión para λ' de la ecuación 1.11 en $f' = c/\lambda'$ para obtener

$$f' = \frac{c}{(c - v)T'} \tag{1.12}$$

Para eliminar T', observe que T es el tiempo propio; es decir, T es el tiempo que transcurre entre dos eventos (la emisión de dos frentes de onda consecutivos) que ocurren en el mismo sitio en S y, en consecuencia,

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

Al sustituir T' en la ecuación 1.12 y usar $f = 1/T$, se obtiene

$$f' = \frac{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}{1 - (v/c)} f \tag{1.13}$$

o bien,

$$f' = \frac{\sqrt{1 + (v/c)}}{\sqrt{1 - (v/c)}} f \tag{1.14}$$

Para efectos de claridad, esta expresión suele escribirse como

$$f_{\text{obs}} = \frac{\sqrt{1 + (v/c)}}{\sqrt{1 - (v/c)}} f_{\text{fuente}} \tag{1.15}$$

donde f_{obs} es la frecuencia medida por un observador que se aproxima a una fuente de luz y f_{fuente} es la frecuencia según se mide en el sistema de referencia en que la fuente está en reposo.

La ecuación 1.15 es la fórmula relativista para el efecto Doppler, la cual, a diferencia de la fórmula Doppler para el sonido, sólo depende de la velocidad relativa v de la fuente y del observador y es válida para velocidades relativas tan grandes como c. La ecuación 1.15 coincide con la intuición física en cuanto a la predicción de que f_{obs} es mayor que f_{fuente} para un emisor y un receptor

que se aproximan. La expresión para el caso de una fuente que se aleja se obtiene al sustituir v por $-v$ en la ecuación 1.15.

Aunque el nombre de Christian Johann Doppler se asocia con mayor frecuencia con el efecto en el sonido, Doppler originalmente desarrolló sus ideas en un esfuerzo por comprender el corrimiento en frecuencia o longitud de onda de luz emitida por átomos en movimiento y objetos astronómicos. La aplicación más espectacular y notoria del efecto Doppler ocurrió justamente en esta área para explicar el famoso corrimiento hacia el rojo de las líneas de absorción (longitudes de onda) observado en casi todas las galaxias. (Una galaxia es una acumulación de millones de estrellas.) La expresión *corrimiento al rojo* se refiere al desplazamiento de las líneas de absorción conocidas hacia longitudes de onda mayores; es decir, hacia el extremo rojo del espectro visible. Por ejemplo, líneas que normalmente se encuentran en la región violeta extrema para una galaxia en reposo con respecto a la Tierra se desplazan alrededor de 100 nm hacia el extremo rojo del espectro para galaxias distantes —lo que indica que estas galaxias distantes se *alejan* rápidamente de la Tierra—. El astrónomo estadounidense Edwin Hubble aplicó esta técnica para confirmar que la mayor parte de las galaxias se alejan de la Tierra y que el universo está en *expansión*. (Para un tratamiento más detallado acerca de la expansión del universo, consulte el capítulo 16, Cosmología, en nuestra página *Web*.)

EJEMPLO 1.6 Determinación de la velocidad de recesión de la galaxia Hidra

La luz emitida por una galaxia contiene una distribución continua de longitudes de onda porque la galaxia está constituida por millones de estrellas y otros emisores térmicos. No obstante, algunas brechas angostas aparecen en el espectro continuo, donde la radiación ha sido fuertemente absorbida por gases más fríos presentes en la galaxia. En particular, una nube de átomos ionizados de calcio produce una absorción muy fuerte a 394 nm para una galaxia en reposo con respecto a la Tierra. Para la galaxia Hidra, que está a 200 millones de años luz de distancia, esta absorción está desplazada hasta 475 nm. ¿Con qué rapidez se mueve Hidra con respecto a la Tierra?

Solución Para una fuente y un observador que se aproximan, $f_{obs} > f_{fuente}$ y $\lambda_{obs} < \lambda_{fuente}$ porque $f_{obs}\lambda_{obs} = c = f_{fuente}\lambda_{fuente}$. En el caso de Hidra, $\lambda_{obs} > \lambda_{fuente}$, de modo que esta galaxia posee movimiento de recesión y es necesario usar la expresión

$$f_{obs} = \frac{\sqrt{1-(v/c)}}{\sqrt{1+(v/c)}} f_{fuente}$$

Al sustituir $f_{obs} = c/\lambda_{obs}$ y $f_{fuente} = c/\lambda_{fuente}$ en esta ecuación se obtiene

$$\lambda_{obs} = \frac{\sqrt{1+(v/c)}}{\sqrt{1-(v/c)}} \lambda_{fuente}$$

Finalmente, al despejar v/c, se encuentra

$$\frac{v}{c} = \frac{\lambda_{obs}^2 - \lambda_{fuente}^2}{\lambda_{obs}^2 + \lambda_{fuente}^2}$$

o bien,

$$\frac{v}{c} = \frac{(475\text{ nm})^2 - (394\text{ nm})^2}{(475\text{ nm})^2 + (394\text{ nm})^2} = 0.185$$

En consecuencia, Hidra está alejándose de la Tierra a $v = 0.185c = 5.54 \times 10^7$ m/s.

1.6 TRANSFORMACIÓN DE LORENTZ

Ya se ha visto que la transformación galileana no es válida cuando v se aproxima a la velocidad de la luz. En esta sección se deducirán las ecuaciones de transformación de coordenadas y velocidad correctas que sean válidas para todas las velocidades en el intervalo $0 \leq v < c$. Esta transformación, conocida como transformación de Lorentz, fue obtenida con muchas dificultades por Hendrik A. Lorentz (1853-1928, físico holandés) en 1890 como la transformación que hizo covariantes las ecuaciones de Maxwell. No obstante, su importancia real en una teoría física que trasciende el electromagnetismo fue primero reconocida por Einstein.

La transformación de coordenadas de Lorentz es un conjunto de fórmulas que relacionan las coordenadas espaciales y temporales de dos observadores inerciales que se mueven a una velocidad relativa v. Ya se han analizado dos consecuencias de la transformación de Lorentz en las fórmulas de dilatación del tiempo y la contracción de la longitud. La transformación de velocidad de Lorentz es el conjunto de fórmulas que relacionan las componentes de la velocidad u_x, u_y, u_z de un objeto que se mueve en un sistema de referencia S con las componentes de la velocidad u'_x u'_y, u'_z del mismo objeto, medidas en el sistema de referencia S′, que se mueve a una velocidad v relativa a S. Las fórmulas de la transformación de Lorentz constituyen un método formal, conciso y casi mecánico para resolver problemas de relatividad.

La deducción de la transformación de Lorentz empieza observando que una predicción razonable (basada en la intuición física) sobre la forma de las ecuaciones de coordenadas puede reducir bastante la complejidad algebraica de la deducción. Para facilitar las cosas, considere los sistemas de referencia usuales S y S′, con S′ moviéndose a una velocidad v a lo largo de la dirección $+x$ (vea la figura 1.2). Los orígenes de los dos sistemas de referencia coinciden en $t' = t = 0$. Una predicción razonable acerca de la dependencia de x' con respecto a x y t es

$$x' = G(x - vt) \tag{1.16}$$

donde G es un factor adimensional que no depende de x o de t, sino que es una función de v/c tal que G es igual a 1 en el límite cuando v/c tiende a 0. La forma de la ecuación 1.16 es sugerida por la forma de la transformación galileana, $x' = x - vt$, de la cual se sabe que es válida en el límite cuando v/c tiende a cero. El hecho de que la ecuación 1.16 sea lineal en x y t también es importante, porque se requiere que un solo evento en S (especificado por x_1, t_1) corresponda con un solo evento en S′ (especificado por x'_1, t'_1). Suponiendo que la ecuación 1.16 es correcta, la *transformación inversa de coordenadas de Lorentz* para x puede escribirse en términos de x' y t' como

$$x = G(x' + vt') \tag{1.17}$$

Esto se concluye a partir del primer postulado de la relatividad de Einstein, el cual requiere que las leyes de la física tengan la misma forma en S y S′ y donde el signo de v haya sido cambiado para tomar en cuenta la diferencia en la dirección de movimiento de los dos sistemas de referencia. De hecho, debe señalarse que esta importante técnica para obtener la inversa de una transformación de Lorentz puede seguirse como una regla general:

> Para obtener la transformación inversa de Lorentz de cualquier cantidad, simplemente cambie las variables primadas y las no primadas e invierta el signo de la velocidad del sistema de referencia.

Volviendo a la deducción de las transformaciones de Lorentz, el razonamiento será tomar las diferenciales de x' y t' y formar una expresión que relacione la velocidad medida de un objeto en S′, $u'_x = dx'/dt'$, con la velocidad medida de ese objeto en S, $u_x = dx/dt$. Luego se determina G, pidiendo que, u'_x sea igual a c en el caso en que u_x, la velocidad de un objeto en el marco S, sea igual a c, según el segundo postulado de la relatividad de Einstein. Una vez que se ha determinado G, este simple razonamiento algebraico proporciona de manera conveniente las transformaciones de coordenadas y de velocidad de Lorentz. Al seguir este plan, primero se encuentra que

$$t' = G\left\{t + (1/G^2 - 1)\,\frac{x}{v}\right\} \tag{1.18}$$

al sustituir la ecuación 1.16 en la ecuación 1.17 y despejar t'. Al tomar las diferenciales de las ecuaciones 1.16 y 1.18 se llega a

$$dx' = G(dx - v\,dt) \tag{1.19}$$

$$dt' = G\left\{dt + (1/G^2 - 1)\,\frac{dx}{v}\right\} \tag{1.20}$$

Al formar $u'_x = dx'/dt'$, luego de hacer algunas simplificaciones, se llega a

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{u_x - v}{1 + (1/G^2 - 1)(u_x/v)} \tag{1.21}$$

donde $u_x = dx/dt$.

El postulado 2 requiere que la velocidad de la luz sea c para cualquier observador, de modo que, en el caso $u_x = c$, también debe tenerse $u'_x = c$. Al usar esta condición en la ecuación 1.21 se obtiene

$$c = \frac{c - v}{1 + (1/G^2 - 1)(c/v)} \tag{1.22}$$

La ecuación 1.22 puede resolverse, con lo que se obtiene

$$G = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

Así, la transformación directa de coordenadas es $x' = \gamma(x - vt)$, y la transformación inversa es $x = \gamma(x' + vt')$. Para obtener la transformación del tiempo (t' como una función de t y x), $G = \gamma$ se sustituye en la ecuación 1.18 para obtener

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

En resumen, las transformaciones completas de coordenadas entre un evento que ocurre en (x, y, z, t) en S y en (x', y', z', t') en S′ son

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{1.23}$$

$$y' = y \tag{1.24}$$

$$z' = z \tag{1.25}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \tag{1.26}$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

Transformación de Lorentz para S → S′

Si desea transformar coordenadas de un evento en el sistema de referencia S′ a coordenadas en el sistema de referencia S, simplemente remplace v por

$-v$ e intercambie las coordenadas primadas y no primadas en las ecuaciones 1.23 a 1.26. La transformación inversa resultante está dada por

$$
\begin{aligned}
x &= \gamma(x' - vt') \\
y &= y' \\
z &= z' \\
t &= \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)
\end{aligned}
\tag{1.27}
$$

donde

Transformación inversa de Lorentz para $S' \rightarrow S$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

En la transformación de Lorentz, observe que t depende de t' y x'. Asimismo, t' depende de t y x. Esto difiere del caso de la transformación galileana, donde $t = t'$. Cuando $v \ll c$, la transformación de Lorentz debe reducirse a la transformación galileana. Para verificar esto, observe que cuando $v \rightarrow 0$, $v/c < 1$ y $v^2/c^2 \ll 1$, de modo que las ecuaciones 1.23 a 1.26 se reducen en este límite a las ecuaciones de transformación de coordenadas galileanas, dadas por

$$x' = x - vt \qquad y' = y \qquad z' = z \qquad t' = t$$

EJEMPLO 1.7 La dilatación del tiempo está contenida en la transformación de Lorentz

Demuestre que el fenómeno de dilatación del tiempo está contenido en la transformación de coordenadas de Lorentz. Una fuente de luz ubicada en (x_0, y_0, z_0) se enciende repentinamente en t_1 y se apaga en t_2 en el sistema de referencia S. a) ¿En qué intervalo de tiempo se mide la luz encendida en el sistema de referencia S′? (Vea la figura 1.2, donde se representan los dos sistemas de referencia.) b) ¿Cuál es la distancia entre el instante en que se enciende la luz y el instante en que se apaga, según se mide en S′?

Solución a) Se mide que los dos eventos, el encendido y el apagado de la luz, ocurren en los dos sistemas de referencia como sigue:

	Evento 1 (luz encendida)	**Evento 2 (luz apagada)**
Sistema de referencia S	x_0, t_1	x_0, t_2
Sistema de referencia S′	$x_1' = \gamma(x_0 - vt_1)$ $t_1' = \gamma\left(t_1 - \frac{vx_0}{c^2}\right)$	$x_2' = \gamma(x_0 - vt_2)$ $t_2' = \gamma\left(t_2 - \frac{vx_0}{c^2}\right)$

Observe que las coordenadas y y z no se ven afectadas debido a que el movimiento de S′ es a lo largo de x. Según se mide en S′, la luz permanece encendida durante un intervalo de tiempo igual a

$$
\begin{aligned}
t_2' - t_1' &= \gamma\left(t_2 - \frac{vx_0}{c^2}\right) - \gamma\left(t_1 - \frac{vx_0}{c^2}\right) \\
&= \gamma(t_2 - t_1)
\end{aligned}
$$

Debido a que $\gamma > 1$ y a que el tiempo propio es $(t_2 - t_1)$, se concluye que $(t_2' - t_1') > (t_2 - t_1)$, y recuperamos el resultado previo para la dilatación del tiempo, la ecuación 1.8.

b) Aunque los eventos 1 y 2 ocurren en el mismo lugar en S, se mide que ocurren a una separación de $x_2' - x_1'$ en S′, donde

$$
\begin{aligned}
x_2' - x_1' &= (\gamma x_0 - \gamma vt_2) - (\gamma x_0 - \gamma vt_1) \\
&= \gamma v(t_1 - t_2)
\end{aligned}
$$

Este resultado es razonable porque se reduce a

$$v(t_1 - t_2) \quad \text{para } v/c \ll 1$$

¿Puede explicar por qué $x_2' - x_1'$ es negativo?

Ejercicio 5 Use la transformación de Lorentz para deducir la expresión de la contracción de la longitud. Advierta que la longitud de un objeto en movimiento se determina midiendo simultáneamente las posiciones de ambos extremos.

Transformación de velocidad de Lorentz

La forma explícita de la transformación de velocidad de Lorentz se deduce de inmediato luego de sustituir $G \equiv \gamma = 1/\sqrt{1-(v^2/c^2)}$ en la ecuación 1.21:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1-(u_x v/c^2)} \tag{1.28}$$

Transformación de velocidad de Lorentz para $S \rightarrow S'$

donde $u'_x = dx'/dt'$ es la velocidad instantánea en la dirección x medida en S' y $u_x = dx/dt$ es la componente de la velocidad u_x del objeto, según se mide en S. De manera semejante, si el objeto tiene componentes de velocidad a lo largo de y y z, entonces las componentes en S' son

$$u'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - v\,dx/c^2)} = \frac{u_y}{\gamma[1-(u_x v/c^2)]} \quad \text{y} \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma[1-(u_x v/c^2)]} \tag{1.29}$$

Cuando u_x y v son, ambas, mucho menores que c (el caso no relativista), se observa que el denominador de la ecuación 1.28 tiende a la unidad, de modo que $u'_x \approx u_x - v$. Esto corresponde a la transformación de velocidad galileana. En el otro extremo, cuando $u_x = c$, la ecuación 1.28 se convierte en

$$u'_x = \frac{c - v}{1-(cv/c^2)} = \frac{c[1-(v/c)]}{1-(v/c)} = c$$

Con base en este resultado se observa que un objeto que se mueve a una velocidad c con respecto a un observador en S también tiene una velocidad c con respecto a un observador en S' —*independientemente* del movimiento relativo de S y S'. Observe que esta conclusión es consistente con el segundo postulado de Einstein; a saber, que la velocidad de la luz debe ser c con respecto a todos los sistemas de referencia inerciales. Asimismo, la velocidad de un objeto nunca puede exceder de c. Es decir, la velocidad de la luz es la velocidad "máxima". Se volverá a esta cuestión en el capítulo 2, cuando se estudie la energía de una partícula.

Para obtener u_x en términos de u'_x, v se sustituye por $-v$ en la ecuación 1.28 y se intercambian u_x y u'_x aplicando la regla establecida con anterioridad para obtener la transformación inversa. Así, se obtiene

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1+(u'_x v/c^2)} \tag{1.30}$$

Transformación inversa de velocidad de Lorentz para $S' \rightarrow S$

EJEMPLO 1.8 Velocidad relativa de naves espaciales

Dos naves espaciales, A y B, se mueven en direcciones *opuestas*, como se muestra en la figura 1.19. Un observador en la Tierra mide que la velocidad de A es $0.750c$ y que la velocidad de B es $0.850c$. Encuentre la velocidad de B con respecto a A.

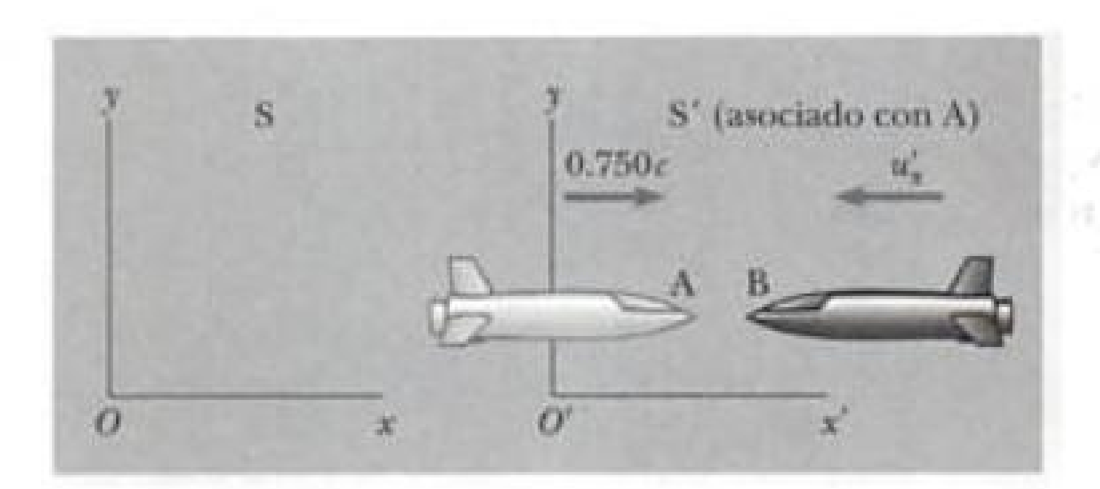


Figura 1.19 (Ejemplo 1.8) Las naves espaciales A y B se desplazan en direcciones *opuestas*. La velocidad de B con respecto a A es *menor* que c y puede obtenerse usando la transformación relativista de velocidad.

Solución Este problema puede resolverse considerando que S′ es el sistema de referencia asociado a la nave espacial A, de modo que $v = 0.750c$ con respecto a un observador en la Tierra (el sistema de referencia S). La nave espacial B puede considerarse como un objeto que se desplaza hacia la izquierda a una velocidad $u_x = -0.850c$ con respecto al observador en la Tierra. Por tanto, la velocidad de B con respecto a A puede obtenerse usando la ecuación 1.28:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} = \frac{-0.850c - 0.750c}{1 - \frac{(-0.850c)(0.750c)}{c^2}}$$

$$= -0.9771c$$

El signo negativo de u'_x indica que la nave espacial B se mueve en la dirección x negativa, según la observa A. Advierta que el resultado es menor que c. Es decir, un cuerpo cuya velocidad es inferior a c en un sistema de referencia debe tener una velocidad inferior a c en *cualquier otro* sistema. Si en este ejemplo se utiliza la transformación de velocidad galileana incorrecta, se encontraría $u'_x = u_x - v = -0.850c - 0.750c = -1.600c$, que es mayor que la velocidad límite universal c.

EJEMPLO 1.9 La motocicleta veloz

Imagine que un motociclista que se mueve a una velocidad de $0.800c$ pasa frente a un observador en reposo, como se muestra en la figura 1.20. Si el motociclista lanza una pelota hacia delante con una velocidad de $0.700c$ con respecto a sí mismo, ¿cuál es la velocidad de la pelota según la percibe el observador en reposo?

Solución En esta situación, la velocidad del motociclista con respecto al observador en reposo es $v = 0.800c$. La velocidad de la pelota en el sistema de referencia del motociclista es $u'_x = 0.700c$. En consecuencia, la velocidad de la pelota, u_x, con respecto al observador en reposo es

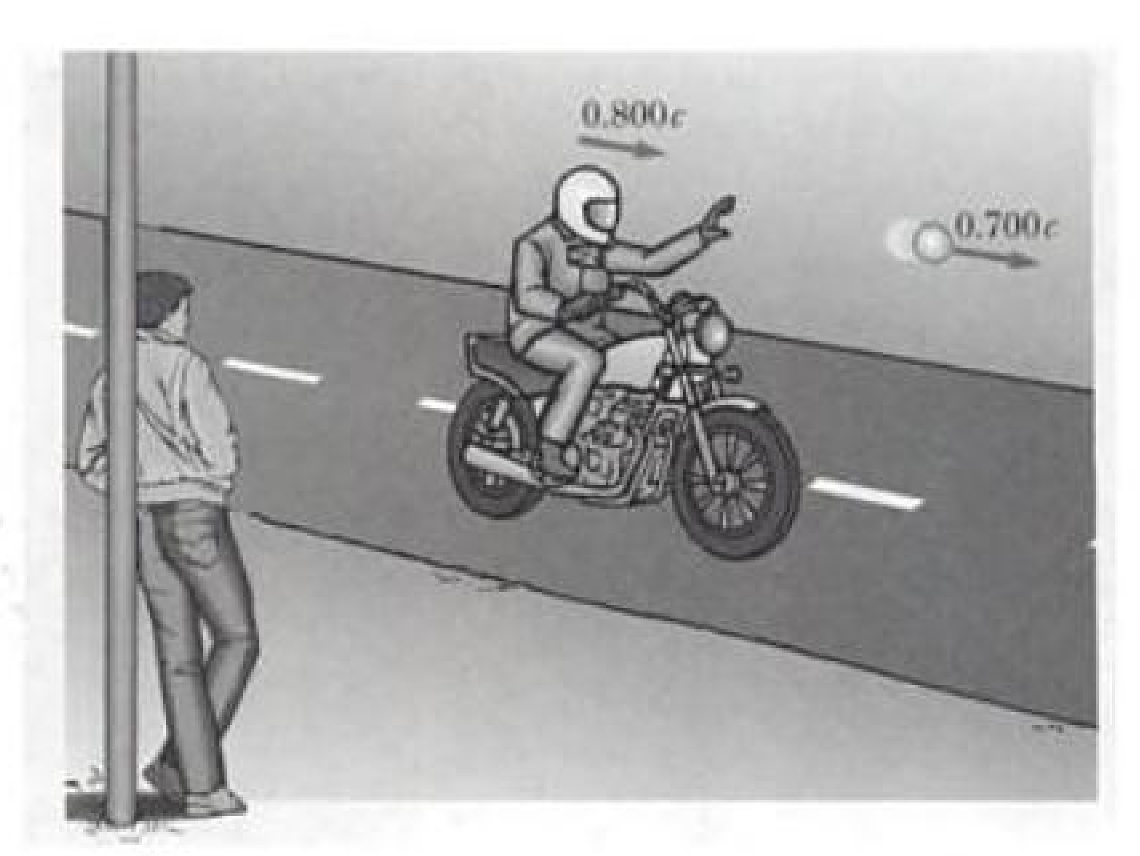


Figura 1.20 (Ejemplo 1.9) Un motociclista pasa frente a un observador en reposo a una velocidad de $0.800c$ y lanza una pelota en la direccion de movimiento a una velocidad de $0.700c$ con respecto a sí mismo.

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + (u'_x v/c^2)}$$

$$= \frac{0.700c + 0.800c}{1 + [(0.700c)(0.800c)/c^2]} = 0.9615c$$

Ejercicio 6 Suponga que el motociclista que se mueve con una velocidad de $0.800c$ enciende un haz luminoso que se aleja de él a una velocidad igual a c en la misma dirección que la motocicleta en movimiento. ¿Cuál sería la velocidad del haz luminoso que mediría el observador en reposo?

Respuesta c.

EJEMPLO 1.10 ¡Líderes de bandas relativistas!

Imagine a dos líderes de bandas motociclistas que se desplazan a velocidades relativistas siguiendo trayectorias perpendiculares a partir del crucero de calles que se muestra en la figura 1.21. ¿A qué velocidad se aleja el líder de la banda Beta respecto al hombro derecho del líder de la banda Alfa, según lo observa éste?

Solución En la figura 1.21 se muestra la situación según la observa un policía en reposo ubicado en el sistema de referencia S, quien ve lo siguiente:

Líder de la banda Alfa	$u_x = 0.75c$	$u_y = 0$
Líder de la banda Beta	$u_x = 0$	$u_y = -0.90c$

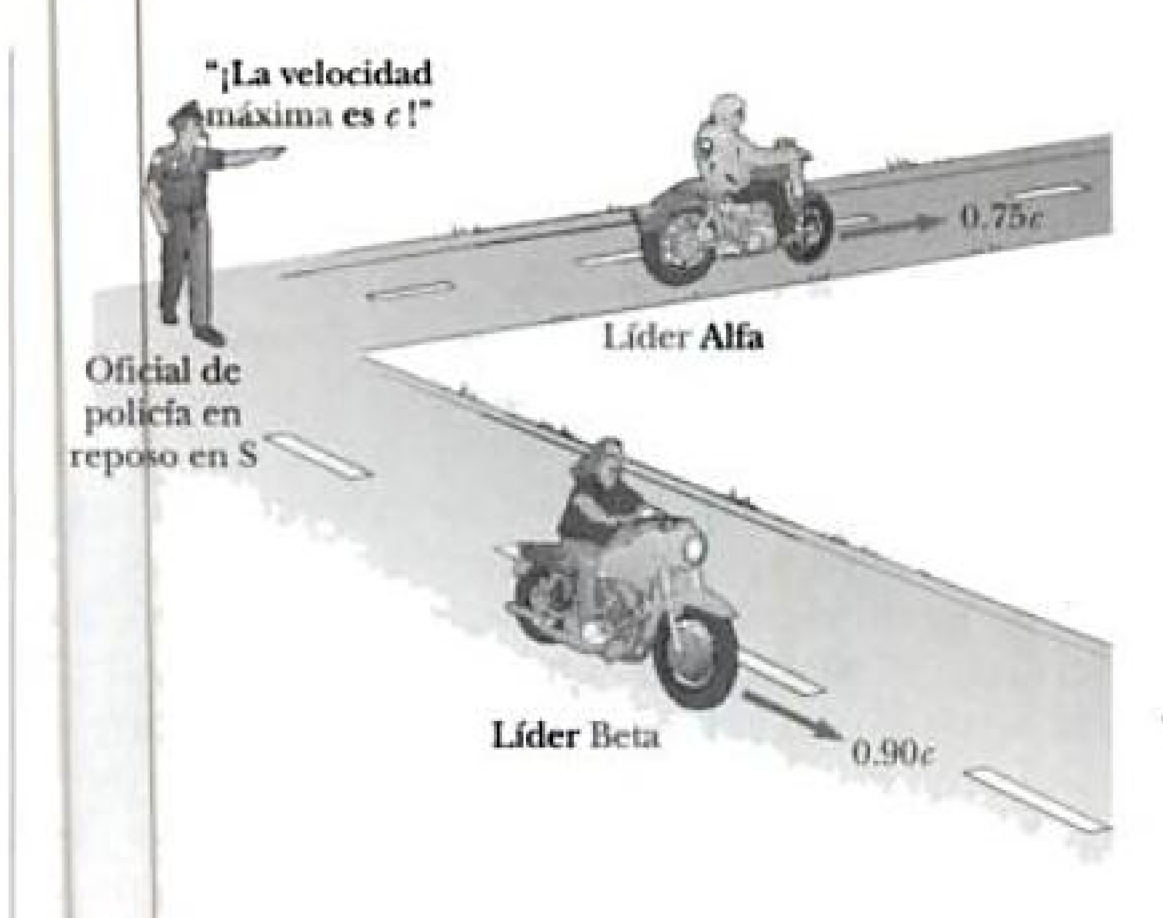


Figura 1.21 (Ejemplo 1.10) Los líderes de dos bandas de motociclistas, Alfa y Beta, pasan rápidamente frente a un oficial de policía en reposo. Encabezan a sus bandas respectivas a partir de la intersección, siguiendo direcciones perpendiculares.

Para obtener la velocidad con la que se aleja Beta según lo observa Alfa, se considera que S′ se mueve junto con Alfa, como se muestra en la figura 1.22, y se calculan u'_x y u'_y para Beta usando las ecuaciones 1.28 y 1.29:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - (u_x v/c^2)} = \frac{0 - 0.75c}{1 - [(0)(0.75c)/c^2]} = -0.75c$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma[1 - (u_x v/c^2)]}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - [(0.75c)^2/c^2]}(-0.90c)}{1 - [(0)(0.75c)/c^2]} = -0.60c$$

Entonces se encuentra que la velocidad con la que se aleja Beta de Alfa, según lo observa éste, es menor que c, como establece la relatividad.

$$u' = \sqrt{(u'_x)^2 + (u'_y)^2} = \sqrt{(-0.75c)^2 + (-0.60c)^2} = 0.96c$$

Ejercicio 7 Calcule la velocidad clásica con la que se aleja Beta de Alfa usando la transformación galileana incorrecta.

Respuesta 1.2c

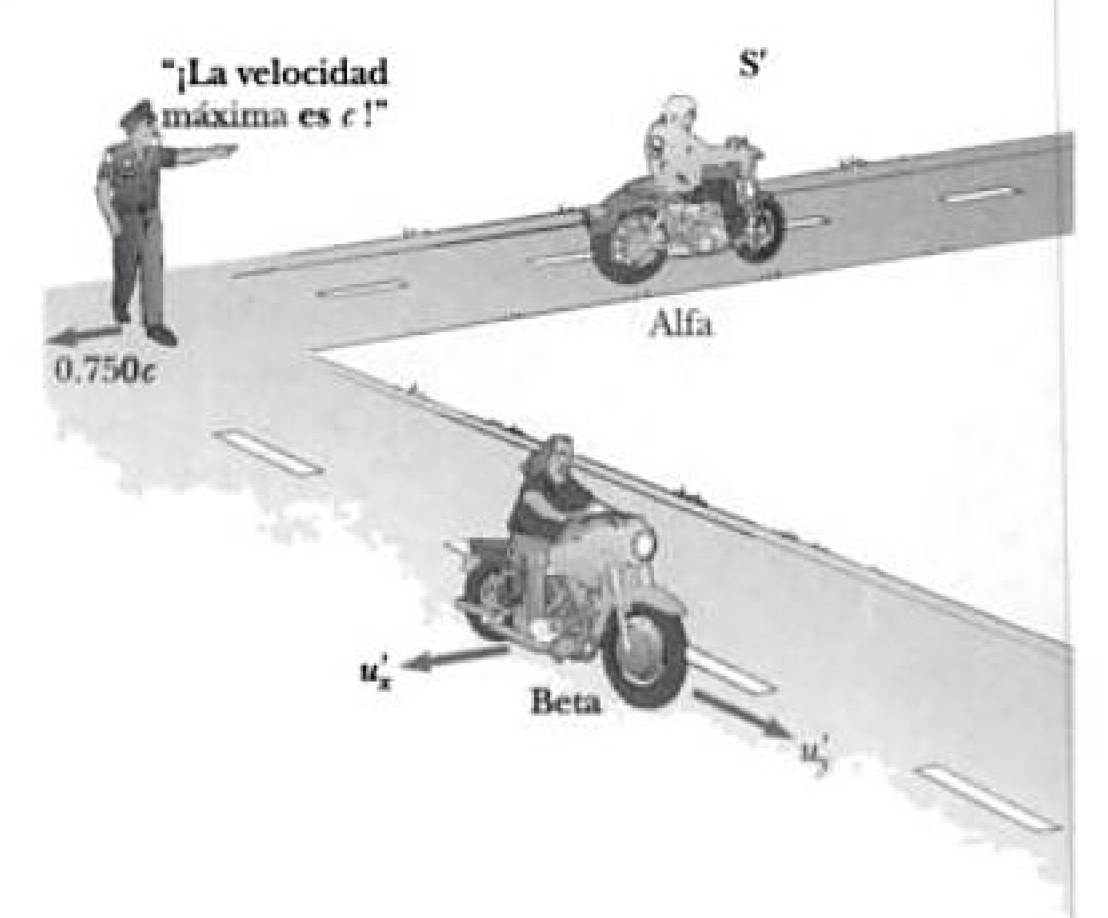


Figura 1.22 (Ejemplo 1.10) Situación según la observa el líder Alfa.

1.7 ESPACIO-TIEMPO Y CAUSALIDAD

Las interpretaciones de espacio y tiempo que quiero dejarles han surgido de la base misma de la física experimental, por lo que ahí estriba su fortaleza. Son radicales. A partir de ahora el espacio en sí mismo, y el tiempo en sí mismo, están destinados a desvanecerse en simples sombras, y solamente la unión de ambos conservará una realidad independiente. (Hermann Minkowski, 1908, en un discurso pronunciado en la Asamblea de Especialistas en Ciencias Naturales y Físicos de Alemania.)

Se ha visto en la relatividad que las coordenadas espaciales y la temporal no pueden tratarse por separado. Esto resulta evidente a partir tanto de la combinación de las coordenadas espaciales y la temporal necesaria en la transformación de coordenadas de Lorentz como de la variación de los intervalos de longitud y tiempo con un sistema de referencia inercial, como se muestra en las ecuaciones de dilatación del tiempo y contracción de la longitud. Una forma conveniente para expresar la relación indisoluble del tiempo y el espacio tiene que ver con el concepto de *espacio-tiempo* tetradimensional y con los *diagramas*

espacio temporales introducidos por el matemático alemán Minkowski.[8] Mientras en la mecánica clásica se usan vectores con tres componentes, la mecánica relativista puede expresarse de manera elegante en términos de cuadrivectores, correspondientes a las direcciones x, y, z y t. No obstante, para facilitar las cosas, este análisis se restringe al movimiento en una dirección, en el eje x.

En la figura 1.23 se muestra un diagrama de Minkowski o espacio temporal que presenta la historia completa o *línea de mundo* de un movimiento unidimensional en el sistema de referencia S. Observe que la cantidad ct se ha graficado en el eje y, y la coordenada x en el eje x. La escala de distancia se establece igual para ambos ejes. Es decir, los tics verticales y los tics horizontales ocurren cada metro, de modo que una señal luminosa que se inicia en $x = 0$, $t = 0$ sigue una recta a 45°. El punto E indica un evento puntual descrito en el sistema de referencia S por las coordenadas (x, t). Naturalmente, pueden usarse otros sistemas de referencia inerciales (S′) para describir el evento o graficar la línea de mundo, y resulta bastante interesante que estos otros sistemas de referencia poseen ejes no ortogonales ct' y x', como se muestra en la figura 1.23. (Vea el problema 40 para comprobar esta afirmación). Si se desea encontrar las coordenadas espaciales y la temporal de un evento dado E en un sistema de referencia específico, se trazan rectas paralelas a los ejes del sistema de referencia y se miden las ordenadas al origen en los ejes del sistema de referencia específico, como se muestra en la figura. Observe también que la velocidad u_x de una partícula es inversamente proporcional a la pendiente de su línea de mundo porque

$$u_x = c\,\frac{\Delta x}{\Delta ct} = \frac{c}{\text{pendiente}} \tag{1.31}$$

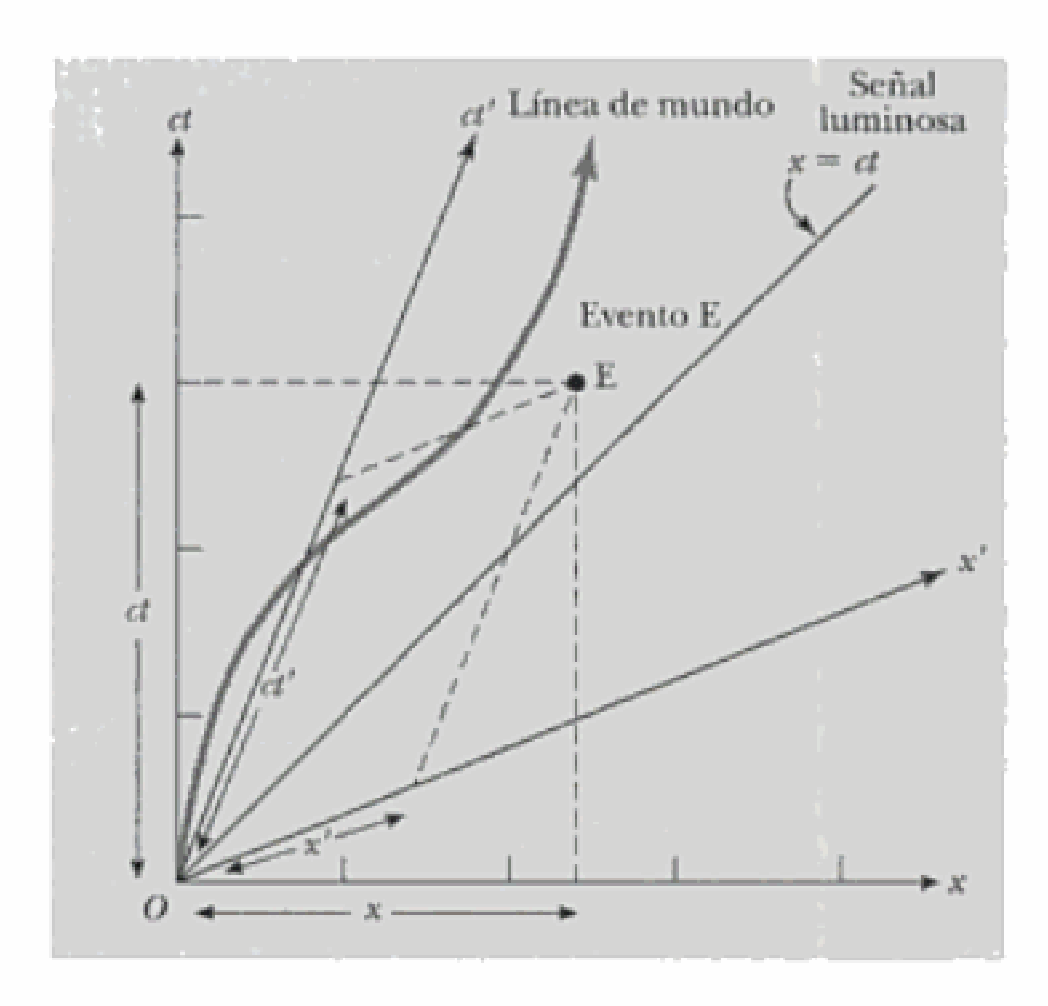


Figura 1.23 Diagrama espacio-temporal que muestra la posición de una partícula en una dimensión en instantes consecutivos. Toda la trayectoria que muestra la partícula se denomina línea de mundo de la partícula. Un evento E tiene coordenadas (x, t) en el sistema de referencia S y coordenadas (x', t') en el sistema de referencia S′.

[8]Minkowski fue uno de los profesores de Einstein; al comentar el trabajo de éste sobre la relatividad, afirmó algo como lo siguiente: "jamás hubiera esperado que este estudiante pudiera presentar algo tan brillante".

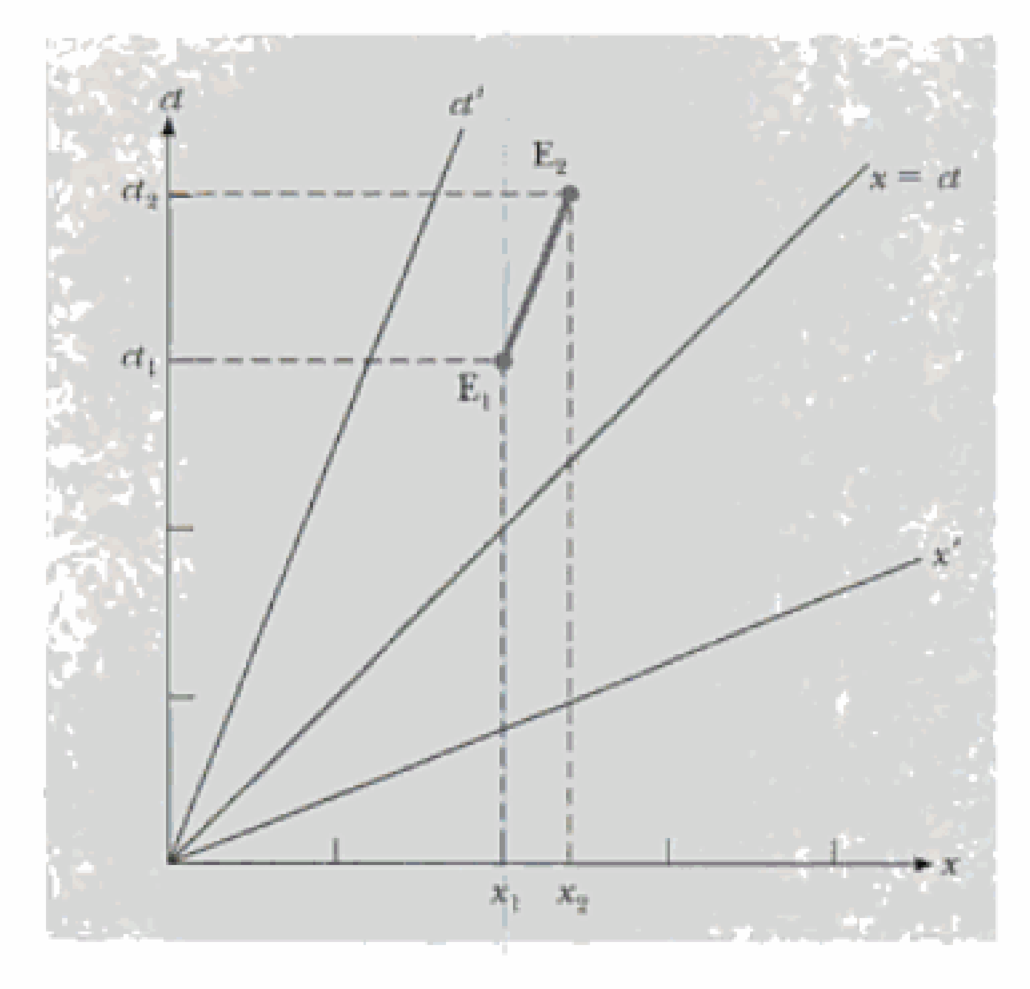


Figura 1.24 Dos eventos, E_1 y E_2, con coordenadas (x_1, t_1) y (x_2, t_2) en el sistema de referencia S.

Ya antes se planteó en esta sección que ni las longitudes ni los intervalos de tiempo en sí mismos poseen ningún significado absoluto. ¿Es posible encontrar una cantidad que sea absoluta o invariante y que represente la unión correcta de longitud y tiempo? En la figura 1.24 se muestra un gráfica espacio temporal con dos eventos, E_1 y E_2, con coordenadas (x_1, t_1) y (x_2, t_2) en el sistema de referencia S y coordenadas (x'_1, t'_1) y (x'_2, t'_2) en el sistema de referencia S′. La cantidad $(\Delta s)^2$ se define como

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (c(t_2 - t_1))^2 - (x_2 - x_1)^2 \tag{1.32}$$

donde Δs tiene la dimensión de longitud y se denomina *intervalo espacio temporal* entre dos eventos; lo cual es semejante a la distancia en mecánica clásica. Si ahora se evalúa la cantidad

$$(\Delta s')^2 = (c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = (c(t'_2 - t'_1))^2 - (x'_2 - x'_1)^2$$

para los dos eventos E_1 y E_2 cuyas coordenadas en S y S′ están relacionadas por las transformaciones de Lorentz $x'_1 = \gamma(x_1 - vt_1)$, $t'_1 = \gamma(t_1 - vx_1/c^2)$, y así sucesivamente, luego de algunos pasos algebraicos se encuentra que

$$(\Delta s')^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = (\Delta s)^2 \tag{1.33}$$

Este importante resultado establece que **la cantidad Δs, el intervalo espacio-temporal entre dos eventos, es invariante y tiene el mismo valor para todos los observadores inerciales.** Se ha encontrado la cantidad que combina correctamente el espacio y el tiempo en una forma invariante.

El intervalo espacio-temporal invariante Δs

Los diagramas de Minkowski pueden usarse para clasificar todo el universo del espacio-tiempo y determinar si un evento puede o no ser la causa de otro. En la figura 1.25 se muestra un diagrama espacio temporal para una dimensión con ejes para dos sistemas de referencia inerciales distintos S y S′, que comparten un origen común O en $x = x' = 0$ y $t = t' = 0$. Las rectas $x = \pm ct$ son las líneas de mundo de pulsos de luz que pasan por el origen y se desplazan en la dirección x positiva o negativa. Las regiones identificadas como pasado y futuro corresponden a valores negativos y positivos del tiempo, según se

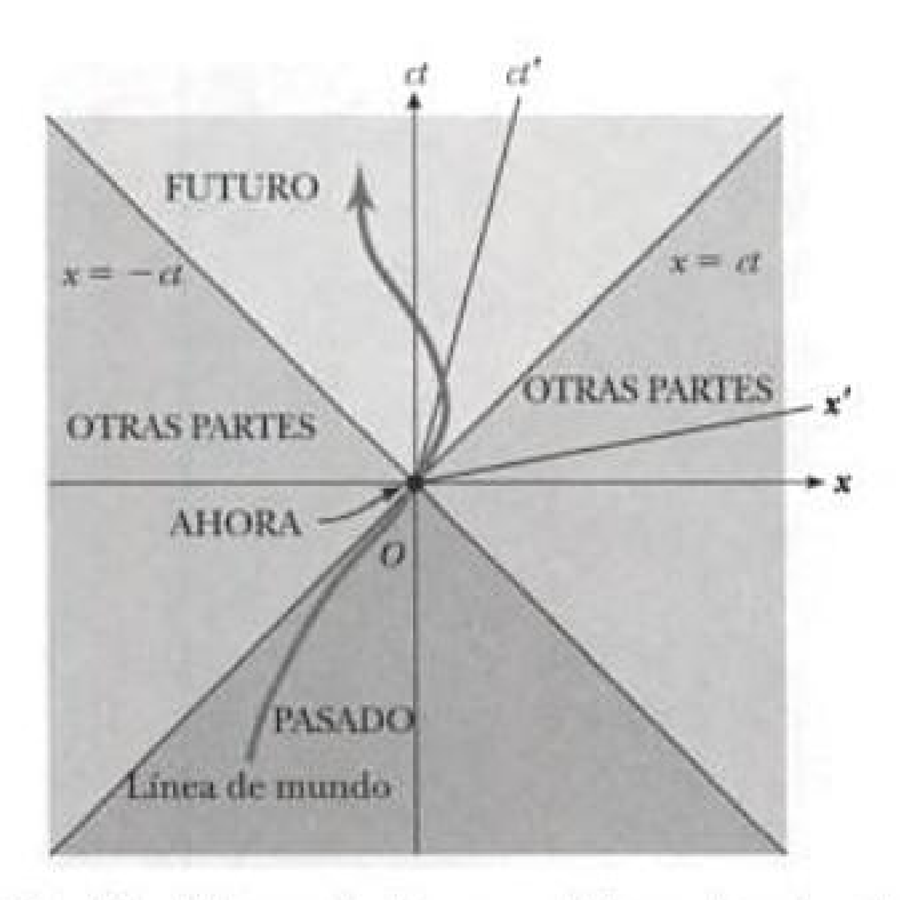


Figura 1.25 Clasificación del espacio-tiempo unidimensional en las regiones pasado, futuro y otras partes. Una partícula con una línea de mundo que pasa por O no puede llegar a las regiones indicadas como otras partes.

juzga a partir del momento presente (el ahora), que ocurre en el origen. Las regiones identificadas como "en otras partes" no pueden ser alcanzadas por ningún objeto cuya línea de mundo pase por O, ya que para llegar a ellas se requiere una pendiente espacio-temporal < 1 o una velocidad superior a c.

La cantidad $(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$ puede usarse para clasificar el intervalo entre dos eventos y determinar si un evento *puede* ser provocado por el otro. Para comprobar esto, considere los tres pares de eventos que se muestran en la figura 1.26, donde para facilitar las cosas se ha considerado que los eventos V, A y C coinciden con el origen. Para los dos eventos, V, W, $(\Delta s)^2 > 0$, ya que $c\Delta t > |\Delta x|$. El evento V *podría ser* la causa del evento W debido a que alguna señal o influencia podría cubrir la distancia Δx desde V hasta W a una velocidad inferior a c, y conectar los dos eventos. El intervalo entre V y W se denomina "semejante al tiempo" por razones que no se abordarán aquí,

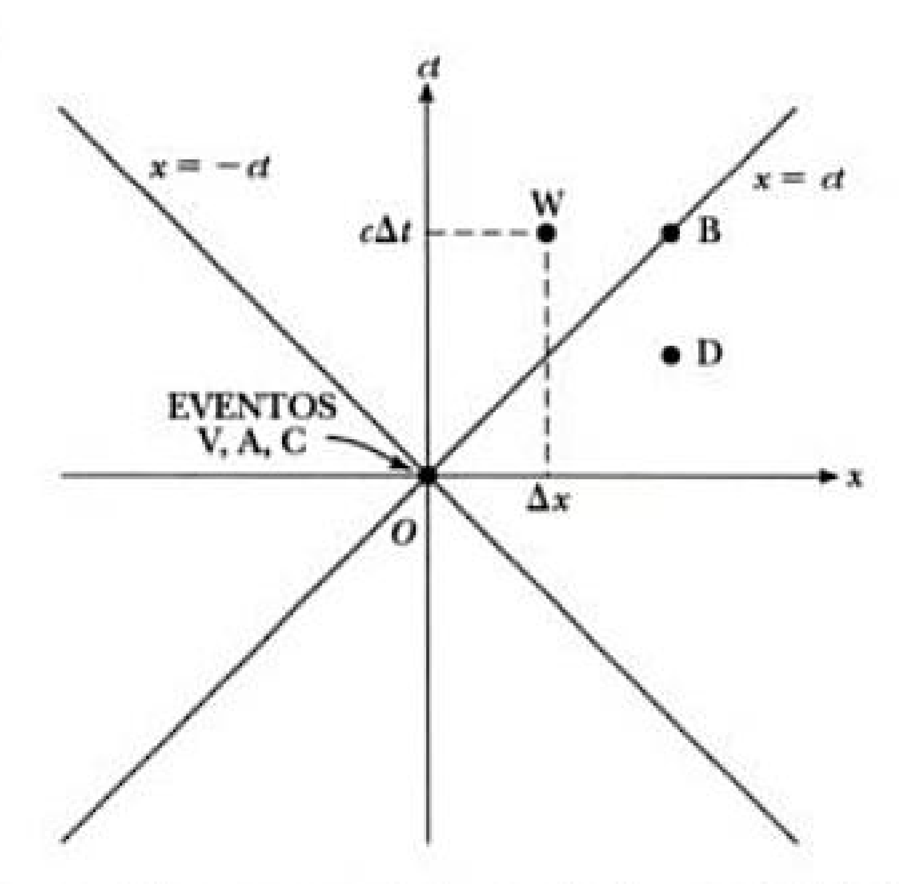


Figura 1.26 Tres pares de eventos en el espacio-tiempo: V, W; A, B; C, D. V podría causar W. A podría causar B. C podría no causar D.

aunque es importante observar que como $(\Delta s)^2$ es invariante, si V es la causa de W en el sistema de referencia S, también es la causa de W en cualquier otro sistema de referencia inercial. Así, eventos vinculados causalmente en un sistema de referencia también lo están en todos los demás sistemas de referencia inerciales.

Para los dos eventos A, B, $(\Delta s)^2 = 0$ porque $c\Delta t = |\Delta x|$. En este caso la línea de mundo de un pulso de luz une a los eventos puntuales A y B, y se dice que el intervalo espacio-tiempo Δs es "semejante a la luz".

En el caso final de los eventos C, D, $(\Delta s)^2 < 0$ porque $c\Delta t < |\Delta x|$. Esto significa que incluso una señal que se propaga a la velocidad de la luz es incapaz de cubrir la distancia $|\Delta x|$ entre los eventos C y D, de modo que posiblemente C no puede ser la causa de D en cualquier sistema de referencia inercial del que se trate.

RESUMEN

Los dos postulados fundamentales de la **teoría especial de la relatividad** son los siguientes:

- Las leyes de la física deben ser las mismas para todos los observadores que se mueven a velocidad constante entre sí.
- La velocidad de la luz debe ser la misma para todos los observadores inerciales, independientemente de su movimiento relativo.

Para cumplir estos postulados, las transformaciones galileanas deben remplazarse por las **transformaciones de Lorentz** dadas por

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{1.23}$$

$$y' = y \tag{1.24}$$

$$z' = z \tag{1.25}$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \tag{1.26}$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

Estas ecuaciones relacionan un evento de coordenadas x, y, z, t medido en S con el mismo evento de coordenadas x', y', z', t' medido en S$'$, donde se supone que el sistema primado se mueve a una velocidad v a lo largo de los ejes xx'.

La forma relativista de la **transformación de velocidad** es

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - (u_x v/c^2)} \tag{1.28}$$

donde u_x es la velocidad de un objeto, según se mide en el sistema de referencia S, y u'_x es su velocidad, medida en el sistema de referencia S$'$.

Si las componentes de la velocidad del objeto son u_y y u_z a lo largo de y y z, respectivamente, entonces las componentes en S$'$ son

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma[1 - (u_x v/c^2)]} \quad \text{y} \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma[1 - (u_x v/c^2)]} \tag{1.29}$$

A continuación se proporcionan algunas de las consecuencias de la teoría de la relatividad especial:

- Los relojes en movimiento con respecto a algún observador parecen avanzar más despacio por un factor de γ. Esto se conoce como **dilatación del tiempo.**
- Las longitudes de los objetos en movimiento parecen contraerse en la dirección del movimiento por un factor de $1/\gamma$. Esto se conoce como **contracción de la longitud.**
- Eventos que son simultáneos para un observador no lo son para otro observador en movimiento relativo con respecto al primero. Esto se conoce como **relatividad de la simultaneidad.**

Estas tres afirmaciones pueden resumirse diciendo que el tiempo, la longitud y la simultaneidad no son conceptos absolutos en la relatividad.

El corrimiento Doppler relativista para ondas electromagnéticas emitidas por una fuente en movimiento está dado por

$$f_{\text{obs}} = \frac{\sqrt{1 + (v/c)}}{\sqrt{1 - (v/c)}} f_{\text{fuente}} \tag{1.15}$$

donde f_{obs} es la frecuencia medida por un observador que se aproxima a una fuente de luz con velocidad relativa v y f_{fuente} es la frecuencia, según se mide en el sistema de la fuente en reposo. La expresión para el caso de una fuente que se aleja se obtiene al sustituir v por $-v$ en la ecuación 1.15.

La cantidad Δs, el intervalo espacio-tiempo entre dos eventos, es invariante y tiene el mismo valor para todos los observadores inerciales, donde Δs se define como $(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$.

BIBLIOGRAFÍA ADICIONAL SUGERIDA

1. E. F. Taylor y J. A. Wheeler, *Spacetime Physics,* San Francisco, W. H. Freeman, 1963.
2. R. Resnick, *Introduction to Special Relativity,* Nueva York, Wiley, 1968.
3. A. P. French, *Special Relativity,* Nueva York, Norton, 1968.
4. H. Bondi, *Relativity and Common Sense,* Science Study Series, Garden City, Nueva York, Doubleday, 1964.
5. J. Bronowski, "The Clock Paradox", *Sci. Amer.*, febrero de 1963, p. 134.
6. A. Einstein, *Out of My Later Years,* Nueva York, World Publishing, 1971.
7. A. Einstein, *Ideas and Opinions,* Nueva York, Crown, 1954.
8. G. Gamow, *Mr. Tompkins in Wonderland,* Nueva York, Cambridge University Press, 1939.
9. L. Infeld, *Albert Einstein,* Nueva York, Scribner's, 1950.
10. J. Schwinger, *Einstein's Legacy,* Scientific American Library, Nueva York, W. H. Freeman, 1985.
11. R. S. Shankland, "The Michelson–Morley Experiment", *Sci. Amer.*, noviembre de 1964, p. 107.
12. R. Skinner, *Relativity for Scientists and Engineers,* Nueva York, Dover Publications, 1982.
13. N. Mermin, *Space and Time in Special Relativity,* Prospect Heights, Illinois, Waveland Press, 1989.

PREGUNTAS

1. ¿En qué dos mediciones *siempre* coincidirán dos observadores en movimiento relativo?
2. Una nave espacial esférica pasa frente a un observador en la Tierra a una velocidad de $0.5c$. ¿Qué forma de la nave verá el observador cuando ésta pase frente a él?
3. Un astronauta se aleja de la Tierra a una velocidad próxima a la de la luz. Si un observador en la Tierra pudiese medir el tamaño del astronauta y su frecuencia cardiaca, ¿qué cambios (en caso de haber alguno) mediría? ¿El astronauta mediría algún cambio?
4. Dos relojes idénticos se sincronizan. Uno se coloca en una órbita hacia el Este alrededor de la Tierra, mientras el otro permanece en la Tierra. ¿Cuál de ellos avanza más despacio? Cuando el reloj en movimiento regresa a la Tierra, ¿siguen estando sincronizados ambos relojes?
5. Dos rayos láser situados en una nave espacial en movimiento se activan en forma simultánea. Un observador en la nave espacial afirma ver simultáneamente los pulsos de luz. ¿Qué condición se necesita para que otro observador coincida en que los dos pulsos se emiten simultáneamente?

6. Cuando se dice que un reloj en movimiento avanza más lento que un reloj estacionario, ¿esto implica que existe algo físicamente raro sobre el reloj en movimiento?
7. Cuando se habla de dilatación del tiempo, ¿esto quiere decir que el tiempo transcurre con mayor lentitud en sistemas en movimiento o que simplemente así parece ser?
8. Enumere algunas formas en que nuestras vidas cotidianas cambiarían si la velocidad de la luz fuese de sólo 50 m/s.
9. Proporcione un razonamiento físico para demostrar que es imposible acelerar un objeto de masa m a la velocidad de la luz, incluso si una fuerza continua actuara sobre el objeto.
10. Se dice que cuando Einstein era un adolescente preguntó: "¿qué vería en un espejo si lo llevara en mis manos y corriera a la velocidad de la luz?" ¿Cómo respondería usted esta pregunta?
11. Suponga que a los astronautas se les pagara según el tiempo que permanecen en el espacio. Después de un largo viaje realizado a una velocidad próxima a la de la luz, una tripulación de astronautas regresa y abre los sobres que contienen sus salarios. ¿Cuáles serían sus reacciones?
12. ¿Qué le ocurre a la densidad de un objeto a medida que aumenta su velocidad, según la mide un observador en la Tierra?

PROBLEMAS

1.2 El principio de la relatividad

1. En un sistema de referencia experimental, un observador encuentra que la segunda ley de Newton es válida en la forma $\sum_{\substack{\text{fuerza}\\\text{física}\\\text{real}}} F = ma$. Demuestre que esta ley no es válida en un sistema de referencia que pasa frente al sistema de referencia experimental del problema 1 a una aceleración constante a_1. Suponga que la masa es una cantidad invariante y que es constante en el tiempo.
2. Un automóvil de 2000 kg que se desplaza a una velocidad de 20 m/s choca y se adhiere a un automóvil de 1500 kg que está en reposo en un semáforo. Demuestre que, debido a que la cantidad de movimiento se conserva en el sistema de referencia en reposo, ésta también se conserva en un sistema de referencia que se mueve a una velocidad de 10 m/s en la dirección del automóvil en movimiento.
3. Una bola de billar de 0.3 kg de masa se desplaza a 5 m/s y choca elásticamente con una bola de 0.2 kg de masa que se mueve en dirección opuesta a 3 m/s. Demuestre que, debido a que la cantidad de movimiento se conserva en el sistema de referencia en reposo, también se conserva en un sistema de referencia que se mueve a 2 m/s en la dirección de la segunda bola.

1.3 Experimento de Michelson-Morley

4. Un avión que vuela en la dirección del viento, contra el viento y con viento transversal demuestra el principio principal del experimento de Michelson-Morley. Un avión capaz de volar a la velocidad c en aire tranquilo se desplaza en un viento cuya velocidad es v. Suponga que el avión vuela contra el viento una distancia L y que después regresa con el viento a su favor a su punto de partida. a) Encuentre el tiempo necesario para efectuar el viaje redondo y compárelo con el tiempo requerido para volar con viento transversal una distancia L y regresar. Antes de calcular esto, elabore un diagrama de ambas situaciones. b) Calcule la diferencia de tiempo para ambos recorridos si $L = 100$ mi, $c = 500$ mi/h y $v = 100$ mi/h.

1.5 Consecuencias de la relatividad especial

5. ¿A qué velocidad debe moverse un reloj para avanzar a un ritmo igual a la mitad del ritmo de un reloj en reposo?
6. ¿Cuán rápido debe moverse un objeto de un metro para observar que su longitud se contrae a 0.5 m?
7. Un reloj en una nave espacial en movimiento avanza 1 s más lentamente por día con respecto a un reloj idéntico que está en la Tierra. ¿Cuál es la velocidad relativa de la nave espacial? (*Sugerencia*: Para $v/c \ll 1$, observe que $\gamma \approx 1 + v^2/2c^2$.)
8. Un objeto de un metro que se mueve en dirección paralela a su longitud parece medir sólo 75 cm de longitud para un observador. ¿Cuál es su velocidad con respecto al observador?
9. Una nave espacial se desplaza a $0.900c$. Si su longitud es L, según la mide un observador en la nave espacial, ¿cuál es la longitud medida por un observador en la Tierra?
10. La vida media promedio de un mesón pi en su sistema de referencia propio es 2.6×10^{-8} s. Si el mesón se desplaza a una velocidad igual a $0.95c$, ¿cuáles son a) su vida media según la mide un observador en la Tierra y b) la distancia media que recorre antes de desintegrarse, según es medido por un observador en la Tierra?
11. Un reloj atómico está en un avión a propulsión a chorro. El reloj mide un intervalo de tiempo de 3600 s cuando el avión se desplaza a una velocidad de 400 m/s. ¿Cuánto más largo o más corto será el intervalo de tiempo medido por un reloj idéntico ubicado en la Tierra? (*Sugerencia*: Para $v/c \ll 1$, $\gamma \approx 1 + v^2/2c^2$.)
12. Una astronauta en la Tierra presenta un ritmo cardiaco de 70 latidos por minuto. ¿Cuál será este ritmo cuando la astronauta se encuentre viajando en una nave espacial a $0.90c$, según lo mide a) un observador que también viaja en la nave espacial y b) un observador en reposo en la Tierra?
13. El muón es una partícula inestable que se desintegra de manera espontánea en un electrón y dos neutrinos. Si el número de muones en $t = 0$ es N_0, entonces el número en el instante t está dado por $N = N_0 e^{-t/\tau}$, donde τ es la vida media, igual a 2.2 μs. Suponga que los muones se desplazan a una velocidad de $0.95c$ y que en $t = 0$ hay 5×10^4 muones. a) ¿Cuál es la vida observada de los muones? b) ¿Cuántos muones quedan después de recorrer una distancia de 3 km?
14. Una varilla de longitud L_0 se mueve a una velocidad v a lo largo de la dirección horizontal. La varilla forma un ángulo igual a θ_0 con respecto al eje x'. a) Demuestre que

la longitud de la varilla, según la mide un observador estacionario, está dada por $L = L_0[1 - (v^2/c^2)\cos^2\theta_0]^{1/2}$. b) Demuestre que el ángulo formado por la varilla con el eje x está dado por la expresión $\tan\theta = \gamma\tan\theta_0$. Estos resultados demuestran que la varilla se ha contraído y rotado. (Considere que el extremo inferior de la varilla está en el origen del sistema de coordenadas primado.)

15. *El corrimiento Doppler clásico para la luz.* Una fuente luminosa retrocede con respecto a un observador a una velocidad v, que es pequeña en comparación con c. a) Demuestre que en este caso la ecuación 1.15 se reduce a

$$\frac{\Delta f}{f} \approx -\frac{v}{c}$$

b) También demuestre que en este caso

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{v}{c}$$

(*Sugerencia*: Diferencie $\lambda f = c$ para demostrar que $\Delta\lambda/\lambda = -\Delta f/f$.)
c) Mediciones espectroscópicas de una línea de absorción que suele encontrarse a $\lambda = 397$ nm indican un corrimiento hacia el rojo de 20 nm para luz proveniente de una galaxia en la Osa Mayor. ¿Cuál es la velocidad de recesión de esta galaxia?

16. Calcule, para el juez, a qué velocidad en millas por hora iba un conductor que se pasó un alto porque le pareció que la luz roja estaba corriéndose hacia el verde. Considere que la luz roja tiene una longitud de onda igual a 650 nm y que la luz verde tiene una longitud de onda igual a 550 nm.

17. a) ¿Cuán rápido y en qué dirección debe moverse la galaxia A si una línea de absorción encontrada a 550 nm (verde) para una galaxia estacionaria se ha corrido a 450 nm (azul) para A? b) ¿Cuán rápido y en qué dirección se mueve la galaxia B si muestra que la misma línea se ha corrido a 700 nm (rojo)?

18. Un radar de policía detecta la velocidad de un automóvil (figura P1.18) como sigue: microondas de una frecuencia bien conocida se emiten hacia el automóvil. El automóvil en movimiento refleja las microondas con un efecto Doppler. Las ondas reflejadas son recibidas y combinadas con una versión atenuada de la onda transmitida. Entre las dos señales de microondas ocurren pulsaciones, cuya frecuencia es medida. a) Para una onda electromagnética reflejada hacia la fuente desde un espejo que se aproxima a una velocidad v, demuestre que la frecuencia de la onda reflejada es igual a

$$f = f_{\text{fuente}}\frac{c + v}{c - v}$$

donde f_{fuente} es la frecuencia de la fuente. b) Cuando v es mucho menor que c, la frecuencia de las pulsaciones es mucho menor que la frecuencia transmitida. En este caso, use la aproximación $f + f_{\text{fuente}} \approx 2 f_{\text{fuente}}$ y demuestre que la frecuencia de las pulsaciones puede escribirse como $f_{\text{pulsaciones}} = 2v/\lambda$. c) ¿Qué frecuencia de las pulsaciones se mide cuando un automóvil se mueve a una velocidad igual a 30 m/s si la frecuencia de las microondas es de 10 GHz? d) Si esta medición de la frecuencia de las pulsaciones es exacta hasta ±5 Hz, ¿cuán exacta es entonces la medición de la velocidad?

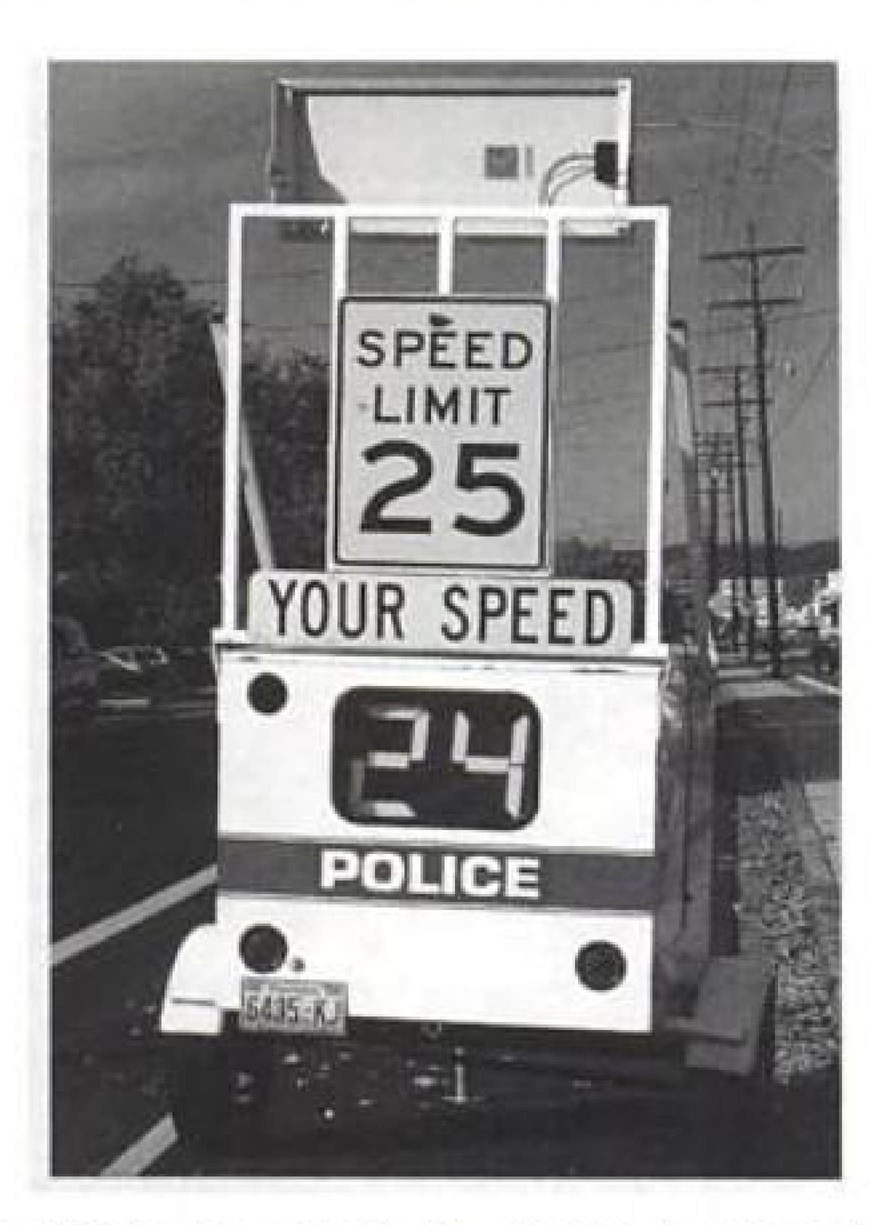


Figura P1.18 (*Trent Steffler/David R. Frazier Photo Library.*)

1.6 Transformación de Lorentz

19. Dos naves espaciales se aproximan entre sí, cada una con la *misma* velocidad, según la mide un observador en la Tierra. Si su velocidad *relativa* es $0.70c$, ¿cuál es la velocidad de cada una?

20. Un electrón se mueve a la derecha a una velocidad de $0.90c$ con respecto al sistema de referencia del laboratorio. Un protón se mueve a la derecha a la velocidad $0.70c$ con respecto al electrón. Encuentre la velocidad del protón con respecto al sistema de referencia del laboratorio.

21. Un observador en la Tierra ve dos naves espaciales que se mueven en la *misma* dirección hacia la Tierra. Parece que la nave espacial A se desplaza a una velocidad de $0.50c$ y que la nave espacial B lo hace a una velocidad de $0.80c$. ¿Cuál es la velocidad de la nave espacial A medida por un observador que se encuentra en la nave espacial B?

22. *Velocidad de la luz en un medio en movimiento.* El movimiento de un medio como el agua afecta la velocidad de la luz. El primero en observar este efecto fue Fizeau en 1851. Considere un haz luminoso que pasa a través de una columna horizontal de agua que se desplaza a una velocidad v. a) Demuentre que si el haz de luz se desplaza en la misma dirección que el flujo de agua, entonces la velocidad de la luz medida en el sistema de referencia del laboratorio está dada por

$$u = \frac{c}{n}\left(\frac{1 + nv/c}{1 + v/nc}\right)$$

donde n es el índice de refracción del agua. (*Sugerencia*: Use la transformación inversa de velocidad de Lorentz y observe que la velocidad de la luz con respecto al marco en movimiento está dada por c/n. b) Demuestre que, para $v \ll c$, la expresión anterior coincide bastante bien con el resultado experimental de Fizeau:

$$u \approx \frac{c}{n} + v - \frac{v}{n^2}$$

Lo anterior comprueba que, para la luz, es correcta la transformación de velocidad de Lorentz, no la transformación de velocidad galileana.

23. Un observador en el sistema de referencia S ve que un rayo incide en forma simultánea en dos puntos a 100 m entre sí. El primer rayo se observa en $x_1 = y_1 = z_1 = t_1 = 0$ y el segundo en $x_2 = 100$ m, $y_2 = z_2 = t_2 = 0$. a) ¿Cuáles son las coordenadas de estos dos eventos en un sistema de referencia S′ que se mueve en la configuración usual a $0.70c$ con respecto a S? b) ¿A qué distancia están los eventos en S′? c) ¿Los eventos son simultáneos en S′? En caso de no serlo, ¿cuál es la diferencia temporal entre ellos, y cuál ocurre primero?

24. Según se ve desde la Tierra, dos naves espaciales, A y B, se aproximan en direcciones perpendiculares. Si un observador en la Tierra ve que A tiene una velocidad $u_y = -0.90c$ y que B tiene una velocidad $u_x = +0.90c$, encuentre la velocidad de la nave A según la mide el piloto en B.

PROBLEMAS ADICIONALES

25. En 1962, cuando Scott Carpenter orbitó la Tierra 22 veces, la prensa afirmó que por cada órbita él envejeció 2 millonésimas de segundo menos que si hubiera permanecido en la Tierra. a) Suponiendo que Scott hubiera estado a 160 km por encima de la Tierra en una órbita circular dirigida hacia el este, determine la diferencia de tiempo entre alguien en la Tierra y el astronauta en órbita para las 22 órbitas. b) ¿La prensa reportó con exactitud la información? Explique su respuesta.

26. La longitud de una nave espacial es tres veces la de otra. Las dos naves espaciales se desplazan en la misma dirección y, mientras ambas pasan frente a un observador en la Tierra, éste mide que las dos naves tienen la misma longitud. Si la nave más lenta se mueve a una velocidad de $0.35c$, determine la velocidad de la nave más rápida.

27. La vida media del pión es de 26 ns cuando está en reposo. Para que se desplace 10 m, ¿a qué velocidad debe moverse?

28. Si los astronautas pudiesen viajar a $v = 0.95c$, quienes permanecen en la Tierra dirían que se requieren $(4.2/0.95) = 4.4$ años para llegar a Alfa Centauri, que está a 4.2 años luz de distancia. Los astronautas no están de acuerdo con esta afirmación. a) ¿Cuánto tiempo transcurriría en los relojes de los astronautas? b) ¿Qué distancia a Alfa Centauri medirían los astronautas?

29. Una nave espacial se aleja de la Tierra a una velocidad v y enciende un transbordador hacia delante a una velocidad v con respecto a la nave espacial. El piloto del transbordador lanza una sonda a una velocidad v con respecto a éste. Determine a) la velocidad del transbordador con respecto a la Tierra y b) la velocidad de la sonda con respecto a la Tierra.

30. Un observador en un cohete se mueve hacia un espejo a una velocidad v con respecto al sistema de referencia identificado como S en la figura P1.30. El espejo está en reposo con respecto a S. Un pulso de luz emitido por el cohete se desplaza hacia el espejo y es reflejado de regreso hacia el cohete. El frente del cohete está a la distancia d del espejo (según la miden observadores en S) en el instante en que el pulso de luz sale del cohete. ¿Cuál es el tiempo total de recorrido del pulso de luz según lo miden los observadores en a) el sistema de referencia S y b) el frente del cohete?

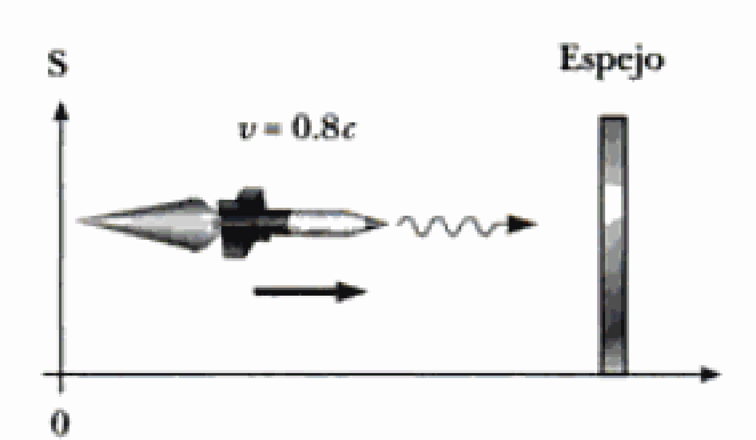


Figura P1.30

31. Una profesora de física que se encuentra en la Tierra aplica un examen a sus alumnos, que están en una nave espacial que se desplaza a una velocidad v con respecto a la Tierra. En el instante en que la nave pasa frente a la profesora, ésta indica el inicio del examen. Si ella quiere que sus alumnos cuenten con el tiempo T_0 (tiempo de la nave espacial) para completar el examen, demuestre que debe esperar un tiempo (en la Tierra) igual a

$$T = T_0\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$

antes de enviar una señal luminosa diciéndoles que se detengan. (*Sugerencia*: Recuerde que se requiere algún tiempo para que la segunda señal luminosa se desplace desde la profesora hasta los estudiantes.)

32. Una nave espacial por construir parte de la Tierra a una velocidad constante hacia un planeta por descubrir, Retah, que está a 20 horas luz de la Tierra. Se requieren 25 h (según un observador ubicado en la Tierra) para que una nave espacial llegue a dicho planeta. Suponiendo que los relojes se sincronizan al inicio del viaje, compare el tiempo transcurrido en el sistema de referencia de la nave espacial para este viaje de ida con el tiempo transcurrido según lo mide un reloj ubicado en la Tierra.

33. Suponga que nuestro Sol está a punto de explotar. En un intento por escapar, algunas personas parten a bordo de una nave espacial a $v = 0.80c$ en dirección a la estrella Tau Ceti, que está a 12 años luz de distancia. Cuando la nave espacial llega a la mitad del recorrido desde la Tierra, los pasajeros observan explotar al Sol y, desafortunadamente, en el mismo instante observan que también Tau Ceti explota. a) En el sistema de referencia de la nave espacial, ¿debe concluirse que ambas explosiones ocu-

rrieron de manera simultánea? En caso negativo, ¿cuál ocurrió primero? b) En un sistema de referencia en el que el Sol y Tau Ceti están en reposo, ¿explotaron simultáneamente? En caso negativo, ¿cuál explotó primero?

34. Dos cohetes sin potencia están por colisionar, moviéndose a velocidades de $0.800c$ y $0.600c$. Según Liz, una observadora que está en la Tierra, inicialmente se encuentran a 2.52×10^{12} m entre sí, como se muestra en la figura P1.34. Ambos cohetes miden 50 m de longitud, según lo observa Liz. a) ¿Cuáles son sus longitudes propias respectivas? b) ¿Cuál es la longitud de cada cohete según la mide un observador ubicado en el otro cohete? c) Según Liz, ¿cuánto tiempo transcurre antes de la colisión? d) Según el cohete 1, ¿cuánto tiempo transcurre antes de la colisión? e) Según el cohete 2, ¿cuánto tiempo transcurre antes de la colisión? f) Si las tripulaciones de ambos cohetes son capaces de evacuar por completo las naves en un lapso de 90 minutos (en su tiempo propio), ¿habrá alguna pérdida humana?

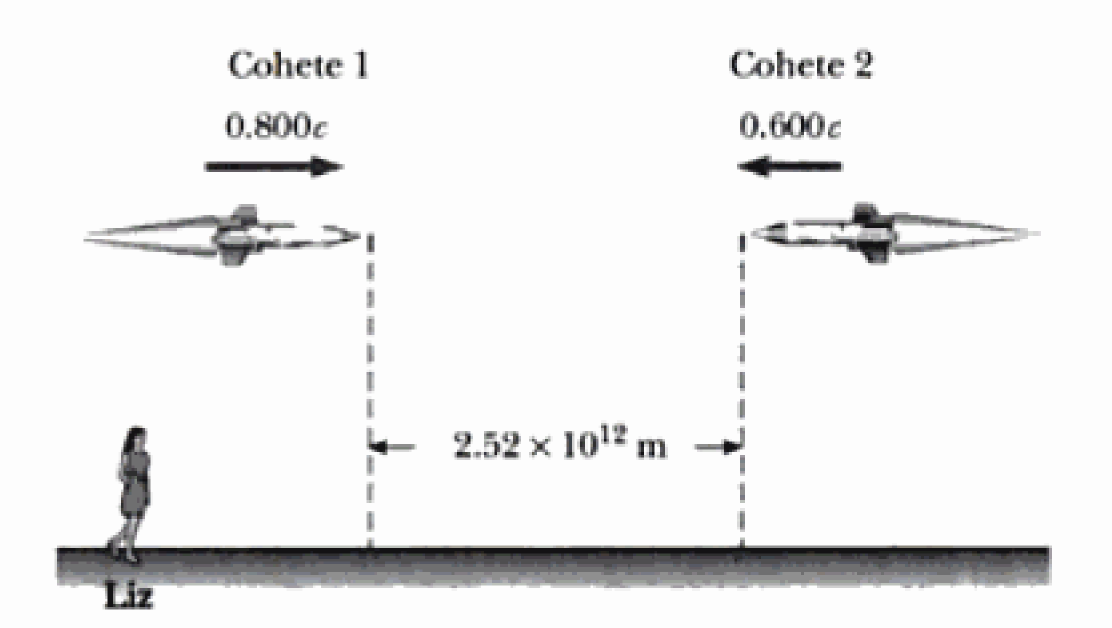


Figura P1.34

35. Los gemelos idénticos Speedo y Goslo se unen a una migración desde la Tierra hacia el planeta X. Este planeta se encuentra a 20 años luz en un sistema de referencia en el que ambos planetas están en reposo. Los gemelos, de la misma edad, parten al mismo tiempo en naves espaciales diferentes. La nave en que va Speedo se desplaza de manera uniforme a $0.950c$ y la de Goslo, a $0.750c$. Calcule la diferencia de edades entre los gemelos después que la nave de Goslo llega al planeta X. ¿Cuál gemelo es mayor?

36. Suzanne observa dos pulsos de luz emitidos desde el mismo sitio, aunque con una diferencia temporal de 3 μs. Mark observa la emisión de los dos pulsos con una separación temporal de 9 μs. a) ¿Cuán rápido se mueve Mark con respecto a Suzanne? b) Según Mark, ¿cuál es la separación espacial de los dos pulsos?

37. Un observador en un sistema de referencia S ve dos eventos como si fuesen simultáneos. El evento A ocurre en el punto (50 m, 0, 0) en el instante 9:00:00 hora universal el 15 de enero de 2001. El evento B ocurre en el punto (150 m, 0, 0) en el mismo instante. Una segunda observadora, que pasa a una velocidad de $0.800c\,\hat{i}$, también ve los dos eventos. En el sistema de referencia S′ de esta observadora, ¿qué evento ocurre primero y cuánto tiempo transcurre entre ellos?

38. Una nave espacial es lanzada desde la superficie de la Tierra a una velocidad de $0.600c$ y a un ángulo de 50° por arriba de la horizontal, que es el eje x positivo. Otra nave espacial se desplaza a una velocidad de $0.700c$ en la dirección x negativa. Determine la magnitud y la dirección de la velocidad de la primera nave espacial según la mide el piloto de la segunda nave espacial.

39. Un satélite de la Tierra usado para el sistema de posicionamiento global (GPS, por sus siglas en inglés) se mueve en una órbita circular con un periodo de 11 h 58 minutos. a) Determine el radio de su órbita. b) Determine su velocidad. c) El satélite está equipado con un oscilador que produce la señal GPS principal no militar, cuya frecuencia es igual a 1 575.42 MHz en el sistema de referencia del satélite. Cuando la señal se recibe en la superficie de la Tierra, ¿cuál es el cambio fraccionario en esta frecuencia debido a la dilatación del tiempo, de acuerdo a la relatividad especial? d) El corrimiento gravitacional hacia el azul de la frecuencia, según la relatividad general, es un efecto por separado. La magnitud de este cambio fraccionario está dada por

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta U_g}{mc^2}$$

donde $\Delta U_g/m$ es el cambio en la energía potencial gravitacional por masa unitaria entre dos puntos en que se observa la señal. Calcule este cambio fraccional en la frecuencia. e) ¿Cuál es el cambio fraccionario global? Superpuesto a estos efectos relativistas existe un corrimiento Doppler que suele ser mucho mayor. Puede tratarse de un corrimiento hacia el rojo o hacia el azul, dependiendo del movimiento del satélite con respecto al receptor GPS (figura P1.39).



Figura P1.39 (*Foto cortesía de Garmin Ltd.*)

40. Demuestre que los ejes x' y ct' en S′ no son ortogonales en un diagrama espacio-tiempo. Suponga que los sistemas inerciales S y S′ se mueven como se muestra en la figura 1.2 y que $t = t' = 0$ cuando $x = x' = 0$. (*Sugerencia*: Primero considere que el eje ct' es la línea de mundo del origen de S′ y demuestre que el eje ct' está inclinado con respecto al eje ct. Luego, observe que la línea de mundo de un pulso de luz que se mueve en la dirección $+x$, empezando en $x = 0$ y $ct = 0$, está descrita por la ecuación $x = +ct$ en S y por la ecuación $x' = ct'$ en S′.)

2

Relatividad II

Contenido del capítulo

En este capítulo se extiende la teoría de la relatividad especial a la mecánica clásica; es decir, se proporcionan expresiones correctas desde un punto de vista relativista para la cantidad de movimiento, la segunda ley de Newton y la famosa equivalencia de masa y energía. En la sección final, sobre la relatividad general, se abordan la física de los sistemas de referencia acelerados y la teoría de la gravitación de Einstein.

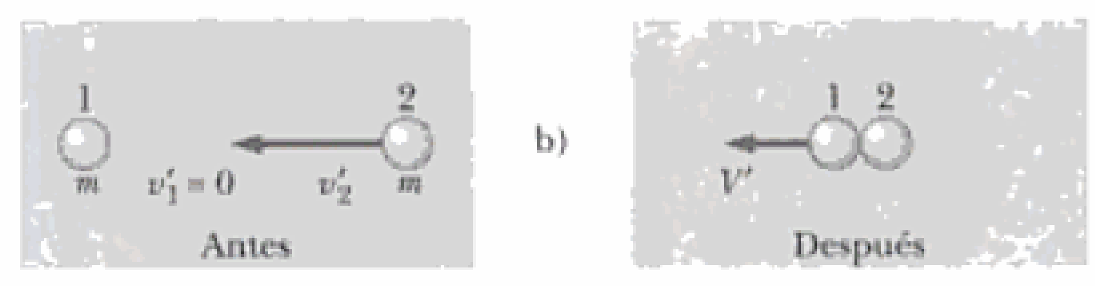
2.1 CANTIDAD DE MOVIMIENTO RELATIVISTA Y FORMA RELATIVISTA DE LAS LEYES DE NEWTON

La conservación de la cantidad de movimiento lineal establece que cuando dos cuerpos chocan entre sí, la cantidad de movimiento total permanece constante, en el supuesto de que los cuerpos estén aislados (es decir, que solamente interactúan entre sí). Suponga que la colisión se describe en un sistema de referencia S donde se conserva la cantidad de movimiento. Si las velocidades de los cuerpos en colisión se calculan en un segundo sistema de referencia inercial S′ utilizando la transformación de Lorentz y se aplica la definición clásica de cantidad de movimiento, $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$, se encuentra que ésta *no se conserva* en el segundo sistema de referencia. No obstante, debido a que las leyes de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales, si la cantidad de movimiento se conserva en un sistema de referencia, debe conservarse en todos los demás. Esta aplicación del principio de relatividad exige modificar la definición clásica de cantidad de movimiento.

Para ver cómo fracasa la forma clásica $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ y para determinar la definición relativista correcta de $\mathbf{p}$, considere el caso de una colisión inelástica entre



La cantidad de movimiento se conserva, según S
$p_{\text{antes}} = mv + m(-v) = 0$
$p_{\text{después}} = 0$



La cantidad de movimiento *no* se conserva, según S′
$p'_{\text{antes}} = \dfrac{-2mv}{1 + v^2/c^2}$
$p'_{\text{después}} = -2mv$

Figura 2.1 a) Colisión inelástica entre dos granos de arcilla iguales, según la ve un observador en el sistema de referencia S. b) La misma colisión vista desde un sistema de referencia S′ que se mueve hacia la derecha a una velocidad v con respecto a S.

dos partículas de la misma masa. En la figura 2.1a se muestra tal colisión para dos partículas idénticas que se aproximan una a la otra a una velocidad v según se observa en un sistema de referencia inercial S. Al usar la forma clásica para la cantidad de movimiento, $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ (para indicar la velocidad de la partícula se usa el símbolo **u** en vez de **v**, el cual se reserva para denotar la velocidad relativa de dos sistemas de referencia), el observador en S encuentra que la cantidad de movimiento se conserva, como se muestra en la figura 2.1a. Suponga que ahora la situación se considera desde un sistema de referencia inercial S′ que se mueve a la derecha a la velocidad v con respecto a S. En S′, las nuevas velocidades son v'_1, v'_2 y V′ (vea la figura 2.1b). Si se usa la transformación de velocidad de Lorentz

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - (u_x v/c^2)}$$

para encontrar v'_1, v'_2 y V′, y la forma clásica para la cantidad de movimiento, $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$, ¿ésta se conserva, según el observador en S′? Para contestar esta pregunta primero se calculan las velocidades de las partículas en S′en términos de las velocidades dadas en S.

$$v'_1 = \frac{v_1 - v}{1 - (v_1 v/c^2)} = \frac{v - v}{1 - (v^2/c^2)} = 0$$

$$v'_2 = \frac{v_2 - v}{1 - (v_2 v/c^2)} = \frac{-v - v}{1 - [(-v)(v)/c^2]} = \frac{-2v}{1 + (v^2/c^2)}$$

$$V' = \frac{V - v}{1 - (Vv/c^2)} = \frac{0 - v}{1 - [(0)v/c^2]} = -v$$

Al verificar la conservación de la cantidad de movimiento en S′, se tiene

$$p'_{\text{antes}} = mv'_1 + mv'_2 = m(0) + m\left[\frac{-2v}{1 + (v^2/c^2)}\right] = \frac{-2mv}{1 + (v^2/c^2)}$$

$$p'_{\text{después}} = 2mV' = -2mv$$

Así, *en el sistema de referencia S′*, la cantidad de movimiento antes de la colisión no es igual a la cantidad de movimiento después de ella, y *la cantidad de movimiento no se conserva.*

Es posible demostrar (vea el ejemplo 2.6) que la cantidad de movimiento se conserva en S y en S′ (y de hecho en todos los sistemas de referencia inerciales) si ésta se redefine como

$$\mathbf{p} \equiv \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} \qquad (2.1)$$

Definición de cantidad de movimiento relativista

donde **u** es la velocidad de la partícula y *m es la masa propia*; es decir, la masa medida por un observador en reposo con respecto a la masa.[1] Observe que cuando u es mucho menor que c, el denominador de la ecuación 2.1 tiende a la unidad y **p** tiende a $m\mathbf{u}$. En consecuencia, la ecuación relativista para **p** se reduce a la expresión clásica cuando u es pequeña en comparación con c. Debido a que es una expresión más simple, la ecuación 2.1 suele escribirse como $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{u}$, donde $\gamma = 1/\sqrt{1 - (u^2/c^2)}$. Advierta que esta γ presenta la misma forma funcional que la γ en la transformación de Lorentz, aunque aquí γ contiene a u, la velocidad de la partícula, mientras que en la transformación de Lorentz γ contiene a v, la velocidad relativa de los dos sistemas de referencia.

La **forma relativista de la segunda ley de Newton** está dada por la expresión

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m\mathbf{u}) \qquad (2.2)$$

donde **p** está dada por la ecuación 2.1. Esta expresión es razonable porque preserva la mecánica clásica en el límite de bajas velocidades y requiere **que la cantidad de movimiento de un sistema aislado (F = 0) se conserve tanto desde el punto de vista relativista como desde el enfoque clásico.** Se deja como problema (problema 3) demostrar que la aceleración relativista a de la partícula *decrece* bajo la acción de una fuerza constante aplicada en la dirección de **u**, según

$$a = \frac{F}{m}(1 - u^2/c^2)^{3/2}$$

A partir de esta fórmula puede observarse que cuando la velocidad tiende a c, la aceleración provocada por cualquier fuerza finita tiende a cero. Por tanto, es imposible acelerar una partícula desde el reposo hasta una velocidad igual o mayor que c.

[1] En este libro siempre se considera que m es constante con respecto a la velocidad, y se denomina masa invariante respecto a la velocidad, o masa propia. Algunos físicos se refieren a la masa en la ecuación 2.1 como masa en reposo, m_0, y al término $m_0/\sqrt{1 - (u^2/c^2)}$ lo denominan masa relativista. Usando esta descripción, se supone que la masa relativista se incrementa al aumentar la velocidad. Aquí la masa invariante m se usa exclusivamente porque se considera que es un concepto más claro y que la introducción de la masa relativista no conduce a ninguna comprensión física más profunda.

EJEMPLO 2.1 Cantidad de movimiento de un electrón

Un electrón, cuya masa es de 9.11×10^{-31} kg, se mueve a una velocidad de $0.750c$. Encuentre su cantidad de movimiento relativista y compare su resultado con la cantidad de movimiento calculada a partir de la expresión clásica.

Solución Al usar la ecuación 2.1 con $u = 0.750c$, se obtiene

$$p = \frac{mu}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}}$$
$$= \frac{(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(0.750 \times 3 \times 10^8\ \text{m/s})}{\sqrt{1 - [(0.750c)^2/c^2]}}$$
$$= 3.10 \times 10^{-22}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

La expresión clásica incorrecta proporcionaría

$$\text{cantidad de movimiento} = mu = 2.05 \times 10^{-22}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

Por tanto, ¡en este caso el resultado relativista correcto es 50% mayor que el resultado clásico!

EJEMPLO 2.2 Una aplicación de la forma relativista de $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$: medición de la cantidad de movimiento de una partícula cargada que se mueve a alta velocidad

Suponga que una partícula de masa m y carga q penetra con una velocidad relativista $\mathbf{u}$ en una región que contiene un campo magnético $\mathbf{B}$. La fuerza magnética $\mathbf{F}$ sobre la partícula está dada por $\mathbf{F} = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}$. Si $\mathbf{u}$ es perpendicular a $\mathbf{B}$, la fuerza está orientada radialmente hacia adentro y la partícula se mueve en un círculo de radio R con $|\mathbf{u}|$ constante. Por la ecuación 2.2 se tiene

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m\mathbf{u})$$

Solución Debido a que la fuerza magnética siempre es perpendicular a la velocidad, no realiza trabajo sobre la partícula y, por tanto, la velocidad, u, y γ son ambas constantes con el tiempo. Así, la magnitud de la fuerza sobre la partícula es

$$F = \gamma m \left| \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right| \tag{2.3}$$

Al sustituir $F = quB$ y $|d\mathbf{u}/dt| = u^2/R$ (la definición de costumbre de la aceleración centrípeta) en la ecuación 2.3, es posible despejar $p = \gamma mu$. Se encuentra

$$p = \gamma mu = qBR \tag{2.4}$$

La ecuación 2.4 muestra que la cantidad de movimiento de una partícula relativista de carga conocida q puede determinarse al medir su radio de curvatura R en un campo magnético conocido $\mathbf{B}$. Esta técnica suele aplicarse para determinar la cantidad de movimiento de partículas subatómicas a partir de fotografías de sus trayectorias en el espacio.

2.2 ENERGÍA RELATIVISTA

Hemos visto que la definición de cantidad de movimiento y las leyes de movimiento requieren de una generalización a fin de hacerlas compatibles con el principio de la relatividad. Esto implica que la forma relativista de la energía cinética también debe modificarse.

Para deducir la forma relativista del teorema trabajo-energía, se empezará con la definición de trabajo realizado por una fuerza F y con el uso de la definición de fuerza relativista, ecuación 2.2. Es decir,

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dp}{dt}\,dx \tag{2.5}$$

donde se ha supuesto que la fuerza y el movimiento se orientan a lo largo del eje x. Para efectuar esta integración y encontrar el trabajo realizado sobre una partícula o la energía cinética relativista como una función de la velocidad u de la partícula, primero se evalúa dp/dt:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{mu}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} = \frac{m\left(\dfrac{du}{dt}\right)}{[1 - (u^2/c^2)]^{3/2}} \tag{2.6}$$

Al sustituir esta expresión para dp/dt y $dx = u\,dt$ en la ecuación 2.5, se obtiene

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \frac{m\left(\frac{du}{dt}\right)u\,dt}{[1-(u^2/c^2)]^{3/2}} = m\int_0^u \frac{u\,du}{[1-(u^2/c^2)]^{3/2}}$$

donde se ha supuesto que la partícula se acelera a partir del reposo hasta una velocidad final u. Al evaluar la integral se encuentra que

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}} - mc^2 \qquad (2.7)$$

Recuerde que el teorema trabajo-energía establece que el trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre una partícula es igual al cambio en la energía cinética de la partícula. Debido a que la energía cinética inicial es cero, se concluye que el trabajo W en la ecuación 2.7 es igual a la energía cinética relativista K; es decir,

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}} - mc^2 \qquad (2.8)$$

Energía cinética relativista

A bajas velocidades, donde $u/c \ll 1$, la ecuación 2.8 debe reducirse a la expresión clásica $K = \frac{1}{2}mu^2$. Esto puede comprobarse usando la expansión binomial $(1 - x^2)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x^2 + \cdots$, para $x \ll 1$, donde las potencias de x de orden superior se ignoran. En este caso, $x = u/c$, de modo que

$$\frac{1}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \cdots$$

Al sustituir lo anterior en la ecuación 2.8 se obtiene

$$K \approx mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \cdots\right) - mc^2 = \frac{1}{2}mu^2$$

lo cual coincide con el resultado clásico. En la figura 2.2 se muestra una gráfica en la que se comparan las expresiones relativista y no relativista para u como una función de K. Observe que en el caso relativista, la velocidad de la partícu-

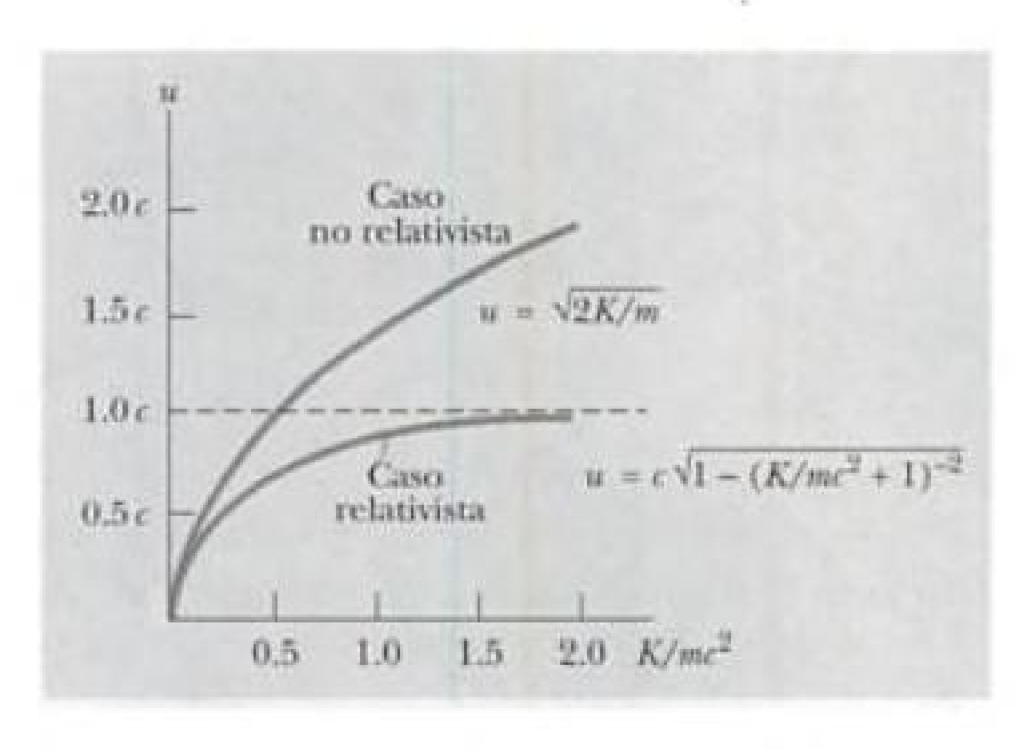


Figura 2.2 Gráfica en que se comparan las expresiones relativista y no relativista para la velocidad como una función de la energía cinética. En el caso relativista, u siempre es *menor* que c.

la jamás excede a c, sin importar la energía cinética, según se comprueba usualmente en experimentos con aceleradores de partículas de muy alta energía. Ambas curvas coinciden de manera bastante aceptable cuado $u \ll c$.

Resulta instructivo escribir la energía cinética relativista como

$$K = \gamma mc^2 - mc^2 \tag{2.9}$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

El término constante mc^2, que es independiente de la velocidad, se denomina **energía en reposo** de la partícula. El término γmc^2, que depende de la velocidad de la partícula, es, por tanto, la suma de las energías cinética y en reposo. γmc^2 se define como la **energía total** E; es decir,

Definición de energía total

$$E = \gamma mc^2 = K + mc^2 \tag{2.10}$$

Equivalencia de masa y energía

La expresión $E = \gamma mc^2$, la famosa ecuación de Einstein para la equivalencia de masa y energía, muestra que la masa es una medida de la energía total en todas las formas. Aunque para facilitar las cosas aquí se han considerado partículas aisladas (o solas), la ecuación 2.10 también es válida para objetos macroscópicos. En este caso, posee la extraordinaria implicación de que ¡cualquier tipo de energía añadida a un "ladrillo" de materia —eléctrica, magnética, elástica, térmica, gravitacional, química—, en realidad incrementa la masa! Esta idea se analiza con mayor profundidad en varias preguntas y problemas al final del capítulo. Otra implicación de la ecuación 2.10 es que una masa pequeña corresponde a una enorme cantidad de energía porque c^2 es una cantidad muy grande. Este concepto ha revolucionado el campo de la física nuclear y se aborda con detalle en la siguiente sección.

En muchas situaciones, en vez de medir la velocidad de una partícula se miden su cantidad de movimiento o su energía. En consecuencia, resulta útil contar con una expresión que relacione la energía total E con la cantidad de movimiento relativista p. Esto se logra usando $E = \gamma mc^2$ y $p = \gamma mu$. Al elevar al cuadrado y restar estas ecuaciones puede eliminarse u (problema 7). Luego de algunos pasos algebraicos se obtiene

Relación de cantidad movimiento y energía

$$E^2 = p^2c^2 + (mc^2)^2 \tag{2.11}$$

Cuando la partícula está en reposo, $p = 0$, por lo que se observa que $E = mc^2$. Es decir, la energía total es igual a la energía en reposo. Para el caso de partículas cuya masa es igual a cero, como los fotones (partículas de luz sin masa ni carga), se considera $m = 0$ en la ecuación 2.11 y se obtiene

$$E = pc \tag{2.12}$$

Esta ecuación es una expresión *exacta* que relaciona la energía y la cantidad de movimiento de los fotones, que siempre se desplazan a la velocidad de la luz.

Por último, observe que, como la masa m de una partícula es independiente de su movimiento, m debe tener el mismo valor en todos los sistemas de referencia. Por otra parte, la energía total y la cantidad de movimiento de una partícula dependen del sistema de referencia en el que se miden, ya que ambas dependen de la velocidad. Debido a que m es una constante, entonces, según la ecuación 2.11, la cantidad $E^2 - p^2c^2$ debe tener el mismo valor en todos los

sistemas de referencia. Es decir, $E^2 - p^2c^2$ es *invariante* bajo una transformación de Lorentz.

Cuando se trabaja con electrones u otras partículas subatómicas, conviene expresar su energía en **electrón-volts (eV),** ya que a las partículas suele imprimirse esta energía por aceleración mediante una diferencia de potencial. El factor de conversión es

$$1 \text{ eV} = 1.60 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Por ejemplo, la masa de un electrón es 9.11×10^{-31} kg. Por tanto, la energía en reposo del electrón es

$$m_ec^2 = (9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(3 \times 10^8 \text{ m/s})^2 = 8.20 \times 10^{-14} \text{ J}$$

Al convertir lo anterior a electrón volts se obtiene

$$m_ec^2 = (8.20 \times 10^{-14} \text{ J})(1 \text{ eV}/1.60 \times 10^{-19} \text{ J}) = 0.511 \text{ MeV}$$

donde 1 MeV = 10^6 eV. Por último, advierta que como $m_ec^2 = 0.511$ MeV, la masa del electrón puede expresarse como $m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$, según la práctica de medir las masas de las partículas en unidades MeV/c^2.

EJEMPLO 2.3 Energía de un electrón veloz

La velocidad de un electrón es $u = 0.850c$. Encuentre sus energías total y cinética en electrón volts.

Solución Al considerar que la energía en reposo del electrón es 0.511 MeV y que $E = \gamma mc^2$ se obtiene

$$E = \frac{m_ec^2}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} = \frac{0.511 \text{ MeV}}{\sqrt{1 - [(0.85c)^2/c^2]}}$$

$$= 1.90(0.511 \text{ MeV}) = 0.970 \text{ MeV}$$

La energía cinética se obtiene restando la energía en reposo de la energía total:

$$K = E - m_ec^2 = 0.970 \text{ MeV} - 0.511 \text{ MeV} = 0.459 \text{ MeV}$$

EJEMPLO 2.4 Energía de un protón veloz

La energía total de un protón es igual a tres veces su energía en reposo.

a) Encuentre la energía en reposo del protón en electrón volts.

Solución

$$\text{energía en reposo} = m_pc^2$$

$$= (1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})(3 \times 10^8 \text{ m/s})^2$$

$$= (1.50 \times 10^{-10} \text{ J})(1 \text{ eV}/1.60 \times 10^{-19} \text{ J})$$

$$= 938 \text{ MeV}$$

b) ¿A qué velocidad se mueve el protón?

Solución Debido a que la energía total E es igual a tres veces la energía en reposo, al aplicar $E = \gamma mc^2$ se obtiene

$$E = 3m_pc^2 = \frac{m_pc^2}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}}$$

$$3 = \frac{1}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}}$$

Al despejar u se obtiene

$$\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = \frac{1}{9} \quad \text{o} \quad \frac{u^2}{c^2} = \frac{8}{9}$$

$$u = \frac{\sqrt{8}}{3}c = 2.83 \times 10^8 \text{ m/s}$$

c) Determine la energía cinética del protón en electrón volts.

Solución

$$K = E - m_pc^2 = 3m_pc^2 - m_pc^2 = 2m_pc^2$$

Debido a que $m_pc^2 = 938$ MeV, $K = 1876$ MeV.

d) ¿Cuál es la cantidad de movimiento del protón?

Solución Puede usarse la ecuación 2.11 para calcular la cantidad de movimiento con $E = 3m_pc^2$:

$$E^2 = p^2c^2 + (m_pc^2)^2 = (3m_pc^2)^2$$

$$p^2c^2 = 9(m_pc^2)^2 - (m_pc^2)^2 = 8(m_pc^2)^2$$

$$p = \sqrt{8}\,\frac{m_pc^2}{c} = \sqrt{8}\,\frac{(938 \text{ MeV})}{c} = 2650\,\frac{\text{MeV}}{c}$$

Observe que la cantidad de movimiento se deja en unidades MeV/c por conveniencia.

2.3 LA MASA COMO UNA MEDIDA DE LA ENERGÍA

La ecuación $E = \gamma mc^2$, según se aplica a una partícula, sugiere que incluso cuando una partícula está en reposo ($\gamma = 1$) sigue teniendo una energía enorme debido a su masa. La prueba experimental más evidente de la equivalencia que existe entre masa y energía ocurre en interacciones de partículas nucleares y elementales en las que se llevan a cabo la conversión de masa en energía y de energía en masa. Debido a esta convertibilidad de masa en energía, ya no es posible seguir aceptando las leyes clásicas de la conservación de la masa y la conservación de la energía por separado; en vez de ello, es necesario hablar de una sola ley unificada, **la conservación de la masa-energía.** Planteada en términos sencillos, esta ley requiere que **la suma de la masa-energía de un sistema de partículas antes de la interacción debe ser igual a la suma de la masa-energía del sistema después de la interacción, donde la masa-energía de la *i*-ésima partícula se define como la energía relativista total**

Conservación de la masa-energía

$$E_i = \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - (u_i^2/c^2)}}$$

Para comprender la conservación de la masa-energía y ver cómo las leyes relativistas son más simétricas y poseen un alcance más amplio que las leyes clásicas de la conservación de la cantidad de movimiento y de la energía, se considerará la simple colisión inelástica antes abordada.

Como puede observarse en la figura 2.1a, *desde un punto de vista clásico* la cantidad de movimiento, se conserva pero la energía cinética no, debido a que la energía cinética total antes de la colisión es igual a mu^2 y 0 después de la colisión (la v que se muestra en la figura 2.1 ha sido sustituida por u). Ahora, considere los mismos dos granos de arcilla que colisionan y utilice la ley relativista de la conservación de la masa-energía. Si la masa de cada grano es m y la masa del objeto compuesto es M, debe tenerse

$$E_{\text{antes}} = E_{\text{después}}$$

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} = Mc^2$$

o bien,

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} \tag{2.13}$$

Debido a que $\sqrt{1 - (u^2/c^2)} < 1$, ¡la masa compuesta M es mayor que la suma de las masas individuales! Es más, es fácil demostrar que el incremento de masa del grano compuesto, $\Delta M = M - 2m$, es igual a la suma de las energías cinéticas incidentes de los granos en colisión ($2K$) divididas entre c^2:

$$\Delta M = \frac{2K}{c^2} = \frac{2}{c^2}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} - mc^2\right) \tag{2.14}$$

Así, se obtienen un ejemplo de la conversión de la energía cinética en la masa y el resultado satisfactorio de que, en mecánica relativista, la energía cinética no se pierde en una colisión inelástica sino que se observa un incremento en la masa del objeto compuesto final. De hecho, la simetría más pronunciada de la teoría de la relatividad muestra que, *tanto la masa-energía como la cantidad de movimiento relativistas, siempre se conservan en una colisión,* mientras que los métodos clásicos muestran que se conserva la cantidad de movimiento pero no la energía cinética, a menos que la colisión sea perfectamente elástica. En efecto, como se demuestra en el ejemplo 2.6, la cantidad de movimiento y la energía

relativistas están vinculadas de manera indisoluble debido a que la conservación de la cantidad de movimiento sólo se cumple en todos los sistemas de referencia inerciales si también se cumple la conservación de la masa-energía.

EJEMPLO 2.5

a) Calcular el incremento de masa para una colisión frontal completamente inelástica de dos pelotas de 5 kg cada una que se aproximan entre sí a 1 000 mi/h (la velocidad de un avión veloz). b) Explique por qué las mediciones en objetos macroscópicos refuerzan las creencias relativistas *incorrectas* de que en una colisión inelástica se conserva la masa ($M = 2m$) y se pierde la energía cinética.

Solución a) $u = 1\,000$ mi/h $= 450$ m/s, de modo que

$$\frac{u}{c} = \frac{4.5 \times 10^2 \text{ m/s}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 1.5 \times 10^{-6}$$

Debido a que $u^2/c^2 \ll 1$, al sustituir

$$\frac{1}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}$$

en la ecuación 2.14 se obtiene

$$\begin{aligned}\Delta M &= 2m\left(\frac{1}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}} - 1\right)\\ &\approx 2m\left(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} - 1\right) \approx \frac{mu^2}{c^2}\\ &= (5 \text{ kg})(1.5 \times 10^{-6})^2 = 1.1 \times 10^{-11} \text{ kg}\end{aligned}$$

b) Debido a que el incremento de masa de 1.1×10^{-11} kg es una fracción inconmensurablemente pequeña de $2m$ (10 kg), resulta bastante natural suponer que la masa permanece constante cuando objetos macroscópicos experimentan una colisión inelástica. Por otra parte, el cambio en la energía cinética desde mu^2 hasta 0 es tan grande (10^6 J) que ésta se percibe fácilmente como pérdida en una colisión inelástica de objetos macroscópicos.

Ejercicio 1 Demuestre que para una colisión completamente inelástica $\Delta M = 2\Delta K/c^2$, como se afirmó.

EJEMPLO 2.6

Demuestre que al aplicar la definición relativista de cantidad de movimiento

$$p = \frac{mu}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}}$$

se llega a la conservación de cantidad de movimiento tanto en S como en S′ para la colisión inelástica que se muestra en la figura 2.1.

Solución En el sistema de referencia S:

$$p_{\text{antes}} = \gamma mv + \gamma m(-v) = 0$$

$$p_{\text{después}} = \gamma MV = (\gamma M)(0) = 0$$

Por tanto, la cantidad de movimiento se conserva en S. Observe que M fue utilizada como la masa combinada después de la colisión y que se permitió la posibilidad relativista de que M no necesariamente es igual a $2m$.

En el sistema de referencia S′:

$$p'_{\text{antes}} = \gamma mv_1' + \gamma mv_2' = \frac{(m)(0)}{\sqrt{1-(0)^2/c^2}}$$
$$+ \frac{m}{[\sqrt{1 - [-2v/1 + (v^2/c^2)]^2}](1/c^2)} \times \left(\frac{-2v}{1 + v^2/c^2}\right)$$

Luego de algunos pasos algebraicos se encuentra que

$$\frac{m}{[\sqrt{1 - [2v/1 + (v^2/c^2)]^2}](1/c^2)} = \frac{m(1 + v^2/c^2)}{(1 - v^2/c^2)}$$

y se obtiene

$$p'_{\text{antes}} = \frac{m(1 + v^2/c^2)}{(1 - v^2/c^2)}\left(\frac{-2v}{1 + v^2/c^2}\right) = \frac{-2mv}{(1 - v^2/c^2)}$$

$$p'_{\text{después}} = \gamma MV' = \frac{M(-v)}{\sqrt{1 - [(-v)^2/c^2]}} = \frac{-Mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Para demostrar que la cantidad de movimiento se conserva en S′, se utiliza el hecho de que según la relatividad M no es simplemente igual a $2m$. Como se muestra, la masa combinada M, formada a partir de la colisión de dos partículas, cada una de masa m y moviéndose una hacia la otra a una velocidad v, es mayor que $2m$. Esto ocurre debido a la equivalencia de masa y energía; es decir, en la teoría de la relatividad, la energía cinética de las partículas incidentes se manifiesta como un ligero incremento en la masa, que puede medirse en realidad como energía térmica. Así, a partir de la ecuación 2.13, que resulta al imponer la conservación masa-energía, se tiene

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}$$

Al sustituir este resultado para M en $p'_{\text{después}}$, se obtiene

$$\begin{aligned}p'_{\text{después}} &= \frac{2m}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}\,\frac{-v}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}\\ &= \frac{-2mv}{1-(v^2/c^2)} = p'_{\text{antes}}\end{aligned}$$

Por tanto, la cantidad de movimiento se conserva en S y en S′, en el supuesto de utilizar la definición relativista correcta de la cantidad de movimiento, $p = \gamma mu$, y suponer la conservación masa-energía.

La ausencia de cambios de masa observables en colisiones inelásticas de objetos macroscópicos obliga a buscar otras áreas en dónde probar esta ley, en que las velocidades de las partículas sean más altas, las masas se conozcan con mayor precisión y las fuerzas sean más intensas que las fuerzas eléctricas o mecánicas. Esta situación nos lleva a considerar las reacciones nucleares, ya que las masas nucleares pueden medirse con una gran precisión mediante un espectrómetro de masas, las fuerzas nucleares son mucho más intensas que las fuerzas eléctricas y a menudo se obtienen productos de desintegración con velocidades extremadamente altas.

Quizá la confirmación más directa de la conservación masa-energía ocurre en la desintegración de un núcleo pesado radiactivo en reposo en varias partículas más ligeras emitidas con energías cinéticas altas. Para un núcleo así, de masa M, que experimenta *fisión* en partículas de masas M_1, M_2 y M_3, cuyas velocidades son u_1, u_2 y u_3, la conservación de la energía relativista total requiere

Fisión

$$Mc^2 = \frac{M_1c^2}{\sqrt{1-(u_1^2/c^2)}} + \frac{M_2c^2}{\sqrt{1-(u_2^2/c^2)}} + \frac{M_3c^2}{\sqrt{1-(u_3^2/c^2)}} \qquad (2.15)$$

Debido a que todas las raíces cuadradas son menores que 1, $M > M_1 + M_2 + M_3$ y la pérdida de masa, $M - (M_1 + M_2 + M_3)$, aparece como energía de movimiento de los productos. Esta **energía de desintegración** liberada por fisión a menudo se denota con el símbolo Q, y en este caso puede escribirse como

$$Q = [M - (M_1 + M_2 + M_3)]c^2 = \Delta mc^2 \qquad (2.16)$$

EJEMPLO 2.7 Una reacción por fisión

Un núcleo excitado de $^{236}_{92}$U se desintegra en reposo en $^{90}_{37}$Rb, $^{143}_{55}$Cs y varios neutrones $^{1}_{0}$n. a) Conservando la carga y el número total de protones y neutrones, escriba una ecuación de reacción balanceada y determine el número de neutrones que se producen. b) Calcule por cuánto es menor la masa "obtenida" que la masa "original". c) Calcule la energía liberada por fisión. d) Calcule la energía liberada en kilowatts-hora cuando 1 kg de uranio experimenta fisión en una planta nuclear cuya eficiencia es de 40%.

Solución a) En general, un elemento se representa por el símbolo $^{A}_{Z}$X, donde X es el símbolo del elemento, A es el número de neutrones y protones que hay en el núcleo (número de masa) y Z es el número de protones que hay en el núcleo (número atómico). La conservación de la carga y del número de nucleones proporciona

$$^{236}_{92}\text{U} \longrightarrow {}^{90}_{37}\text{Rb} + {}^{143}_{55}\text{Cs} + 3\,^{1}_{0}\text{n}$$

De modo que se producen tres neutrones por fisión.

b) Las masas de las partículas que se desintegran se proporcionan en el apéndice B en términos de unidades de masa atómica, u, donde 1 u = 1.660×10^{-27} kg = 931.5 MeV/c^2.

$$\begin{aligned}\Delta m &= M_U - (M_{Rb} + M_{Cs} + 3m_n) = 236.045563 \text{ u} \\ &\quad -(89.914811 \text{ u} + 142.927220 \text{ u} \\ &\quad + (3)(1.008665) \text{ u}) \\ &= 0.177537 \text{ u} = 2.9471 \times 10^{-28} \text{ kg}\end{aligned}$$

En consecuencia, los productos de la reacción poseen una masa combinada que es aproximadamente 3×10^{-28} kg menor que la masa inicial de uranio.

c) La energía liberada por cada evento de fisión es justamente Δmc^2. Esto se calcula con mayor facilidad si primero Δm se convierte a unidades de masa MeV/c^2. Debido a que 1 u = 931.5 MeV/c^2,

$$\begin{aligned}\Delta m &= (0.177537 \text{ u})(931.5 \text{ MeV}/c^2) \\ &= 165.4 \text{ MeV}/c^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q = \Delta mc^2 &= 165.4 \frac{\text{MeV}}{c^2} c^2 = 165.4 \text{ MeV} \\ &= -165.4 \text{ MeV}\end{aligned}$$

d) Para encontrar la energía liberada por la fisión de 1 kg de uranio es necesario calcular el número de núcleos, N, que hay en 1 kg de ^{236}U.

$$N = \frac{(6.02 \times 10^{23} \text{ núcleos/mol})}{(236 \text{ g/mol})}(1\,000 \text{ g})$$
$$= 2.55 \times 10^{24} \text{ núcleos}$$

La energía total producida, E, es

$$E = (\text{eficiencia})NQ$$
$$= (0.40)(2.55 \times 10^{24} \text{ núcleos})(165 \text{ MeV/núcleo})$$
$$= 1.68 \times 10^{26} \text{ MeV}$$
$$= (1.68 \times 10^{26} \text{ MeV})(4.45 \times 10^{-20} \text{ kWh/MeV})$$
$$= 7.48 \times 10^{6} \text{ kWh}$$

Ejercicio 2 Con esta energía, ¿cuánto tiempo permanecerá encendido un foco de 100 W?

Respuesta ≈ 8 500 años.

Se ha considerado el caso más simple que muestra la conversión de masa en energía y la liberación de esta energía nuclear: la desintegración de un elemento pesado inestable en varios elementos más ligeros. No obstante, el caso más común es aquel en que la masa de una partícula compuesta es *menor que* la suma de las masas de las partículas que la integran. Al analizar el apéndice B puede observarse que la masa de cualquier núcleo es menor que la suma de las masas de los neutrones y protones que lo componen por una cantidad Δm. Esto ocurre debido a que los núcleos son estables, a sistemas *ligados* de neutrones y protones (ligados por intensas fuerzas nucleares de atracción), y a que para disociarlos en nucleones por separado es necesario suministrar una cantidad de energía Δmc^2 al núcleo. Esta energía o trabajo necesario para separar un sistema ligado, dejando a sus componentes libres de fuerzas de atracción y en reposo, se denomina energía de enlace, *BE*. Así, la masa y la energía de un sistema ligado se describen con la ecuación

$$Mc^2 + BE = \sum_{i=1}^{n} m_i c^2 \tag{2.17}$$

donde M es la masa del sistema ligado, las m_i's son las masas de las partículas componentes libres y n es el número de partículas componentes. A propósito de la ecuación 2.17 son pertinentes dos comentarios generales. Primero, es válida con bastante generalidad para cualquier tipo de sistema ligado por fuerzas de atracción, ya sean gravitacionales, eléctricas (químicas) o nucleares. Por ejemplo, la masa de una molécula de agua es menor que la masa combinada de dos átomos libres de hidrógeno y un átomo libre de oxígeno, aunque en este caso no es posible medir directamente la diferencia de masa. (En el caso nuclear es posible medirla porque las fuerzas y la energía de enlace son mucho mayores.) Segundo, la ecuación 2.17 muestra la posibilidad de liberar grandes cantidades de energía, *BE*, si la ecuación se lee de derecha a izquierda; es decir, si partículas nucleares chocan con una cantidad pequeña pero suficiente de energía cinética para superar la repulsión de protones y fusionar las partículas en nuevos elementos con masas menores. Este proceso se denomina *fusión*, y un ejemplo de esta reacción es cuando dos núcleos de deuterio se combinan para formar un núcleo de helio, liberando 23.9 MeV por fusión. (Vea el capítulo 14 para más información sobre el proceso de fusión.) Esta reacción puede representarse de forma esquemática como

Fusión

$$^{2}_{1}\text{H} + {}^{2}_{1}\text{H} \longrightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + 23.9 \text{ MeV}$$

EJEMPLO 2.8

a) ¿Cuánto más ligera es una molécula de agua que dos átomos de hidrógeno y un átomo de oxígeno? La energía de enlace del agua es aproximadamente igual a 3 eV. b) Encuentre la pérdida fraccionaria de masa por gramo de agua formada. c) Encuentre la energía total liberada (sobre todo como calor y luz) cuando se forma un gramo de agua.

Solución a) La ecuación 2.17 puede resolverse como sigue para la diferencia de masa:

$$\Delta m = (m_H + m_H + m_O) - M_{H_2O} = \frac{BE}{c^2} = \frac{3\text{ eV}}{c^2}$$

$$= \frac{(3\text{ eV})(1.6 \times 10^{-19}\text{ J/eV})}{(3 \times 10^8\text{ m/s})^2} = 5.3 \times 10^{-36}\text{ kg}$$

b) Para encontrar la pérdida fraccionaria de masa por molécula, Δm se divide entre la masa de una molécula de agua, $M_{H_2O} = 18\text{u} = 3 \times 10^{-26}$ kg:

$$\frac{\Delta m}{M_{H_2O}} = \frac{5.3 \times 10^{-36}\text{ kg}}{3 \times 10^{-26}\text{ kg}} = 1.8 \times 10^{-10}$$

Debido a que la pérdida fraccionaria de masa por molécula es igual a la pérdida fraccionaria por gramo de agua que se forma, por cada gramo se perderían 1.8×10^{-10} g de masa. Esta cantidad representa una masa demasiado pequeña para medirla en forma directa, y este cálculo muestra que, en general, la no conservación de la masa no se presenta como un efecto mensurable en las reacciones químicas.

c) La energía liberada cuando se forma 1 gramo de agua es simplemente el cambio en masa cuando 1 gramo de agua formada se multiplica por c^2:

$$E = \Delta mc^2 = (1.8 \times 10^{-13}\text{ kg})(3 \times 10^8\text{ m/s})^2 \approx 16\text{ kJ}$$

Este cambio de energía, en oposición al decremento en masa, se mide fácilmente al proporcionar otro caso semejante al ejemplo 2.5, donde los cambios de masa son diminutos aunque los cambios de energía, amplificados por un factor de c^2, pueden medirse con facilidad.

2.4 CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO Y LA ENERGÍA RELATIVISTAS

Hasta el momento sólo se han considerado casos concernientes a la conservación masa-energía. No obstante, la más común y sólida confirmación de la teoría de la relatividad proviene de la aplicación cotidiana de la conservación relativista de la cantidad de movimiento y la energía a interacciones de partículas elementales. A menudo, la medición de la cantidad de movimiento (a partir de la curvatura de la trayectoria en un campo magnético —vea el ejemplo 2.2) y de la energía cinética (a partir de la distancia recorrida por la partícula en una sustancia conocida antes de llegar al reposo) son suficientes cuando se combinan con la conservación de la cantidad de movimiento y de la masa-energía para determinar propiedades de las partículas fundamentales como masa, carga y vida media.

EJEMPLO 2.9 Medición de la masa del mesón π^+

El mesón π^+ (también denominado *pión*) es una partícula subatómica responsable de la fuerza nuclear fuerte entre protones y neutrones. Se observa que, en reposo, se desintegra en un mesón μ^+ (muón) y en un neutrino,[2] denotado v. Debido a que el neutrino carece de carga y posee una masa pequeña, no deja rastros en una cámara de burbujas. (Una cámara de burbujas es una gran cámara llena de hidrógeno líquido que muestra las trazas de partículas cargadas como una serie de burbujas pequeñas.) No obstante, la traza del muón cargado es visible a medida que pierde energía cinética y llega al reposo (figura 2.3). Si se sabe que la masa del muón es igual a 106 MeV/c^2 y, a partir de la longitud de su trayectoria, se mide que la energía cinética, K, del muón es igual a 4.6 MeV, encuentre la masa del π^+.

Solución La ecuación de desintegración es $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + v$. La conservación de la energía proporciona

$$E_\pi = E_\mu + E_v$$

[2]Neutrino, del italiano, significa "algo neutro muy pequeño". Siguiendo esta lógica, neutrón probablemente debería ser neutrone, "algo neutro muy grande".

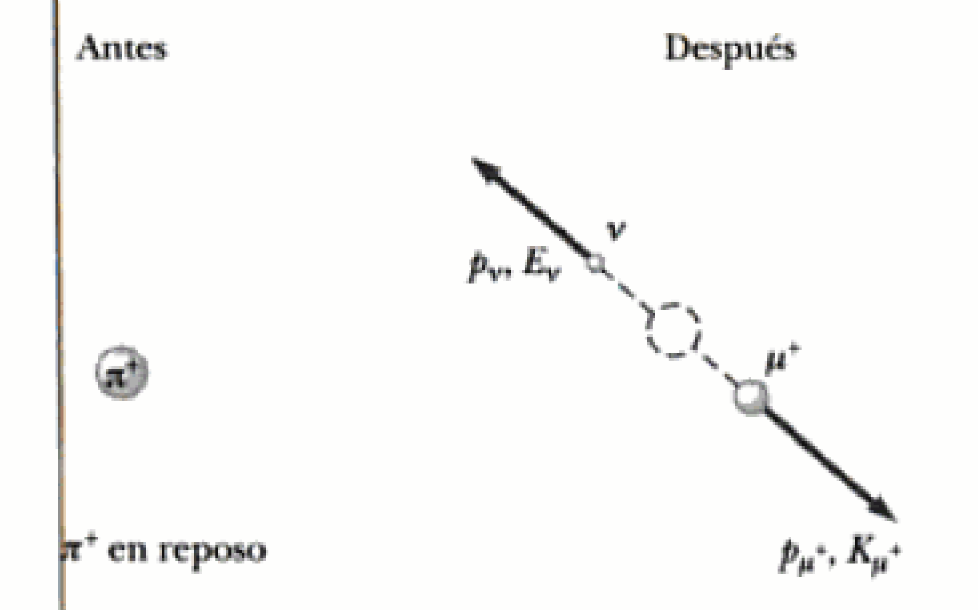


Figura 2.3 (Ejemplo 2.9) Desintegración del pión en reposo en un neutrino y un muón.

Debido a que el pión está en reposo cuando se desintegra y a que la masa del neutrino es despreciable,

$$m_\pi c^2 = \sqrt{(m_\mu c^2)^2 + (p_\mu^2 c^2)} + p_\nu c \qquad (2.18)$$

La conservación de la cantidad de movimiento en la desintegración lleva a $p_\mu = p_\nu$. Al sustituir la cantidad de movimiento del muón por la cantidad de movimiento del neutrino en la ecuación 2.18 se obtiene la siguiente expresión para la energía en reposo del pión en términos de la masa y la cantidad de movimiento del muón:

$$m_\pi c^2 = \sqrt{(m_\mu c^2)^2 + (p_\mu^2 c^2)} + p_\mu c \qquad (2.19)$$

Finalmente, para obtener p_μ a partir del valor medido de la energía cinética del muón, K_μ, comenzamos con la ecuación 2.11, $E_\mu^2 = p_\mu^2 c^2 + (m_\mu c^2)^2$, y de ella despejamos $p_\mu^2 c^2$:

$$p_\mu^2 c^2 = E_\mu^2 - (m_\mu c^2)^2 = (K_\mu + m_\mu c^2)^2 - (m_\mu c^2)^2$$
$$= K_\mu^2 + 2K_\mu m_\mu c^2$$

Al sustituir esta expresión para $p_\mu^2 c^2$ en la ecuación 2.19, se llega a la expresión buscada para la masa del pión en términos de la masa y la energía cinética del muón:

$$m_\pi c^2 = \sqrt{(m_\mu^2 c^4 + K_\mu^2 + 2K_\mu m_\mu c^2} + \sqrt{K_\mu^2 + 2K_\mu m_\mu c^2} \qquad (2.20)$$

Por último, al sustituir $m_\mu c^2 = 106$ MeV y $K_\mu = 4.6$ MeV en la ecuación 2.20, se obtiene

$$m_\pi c^2 = 111 \text{ MeV} + 31 \text{ MeV} \approx 1.4 \times 10^2 \text{ MeV}$$

Así, la masa del pión es

$$m_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2$$

Este resultado muestra por qué esta partícula se denomina mesón; posee una masa intermedia (de la palabra griega *mesos*, que significa "en medio") entre la del electrón ligero (0.511 MeV/c^2) y la del protón pesado (938 MeV/c^2).

2.5 RELATIVIDAD GENERAL

Hasta el momento se ha evitado un curioso rompecabezas. La masa posee dos propiedades notoriamente disímiles: una *atracción gravitacional* hacia otras masas y una propiedad *inercial* que representa una resistencia a la aceleración. Para designar estos dos atributos se usan los subíndices g e i y se escribe

$$\text{Propiedad gravitacional:} \qquad F_g = G\frac{m_g m_g'}{r^2}$$

$$\text{Propiedad inercial:} \qquad \sum F = m_i a$$

El valor de la constante gravitacional G se eligió a fin de hacer numéricamente iguales las magnitudes m_g y m_i. Sin importar cómo se elige G, no obstante, la proporcionalidad estricta de m_g y m_i se ha establecido experimentalmente hasta un grado bastante exacto: unas cuantas partes en 10^{12}. Así, parece que la masa gravitacional y la masa inercial podrían, en efecto, ser exactamente proporcionales.

Pero, ¿y qué con ello? Parecen implicar dos conceptos totalmente diferentes: una fuerza de atracción gravitacional mutua entre dos masas y la resistencia de una masa simple a ser acelerada. Esta cuestión, que intrigó a Newton y a muchos otros físicos durante varios años, fue resuelta por Einstein en 1916 cuando publicó su teoría de la gravitación, conocida como *teoría general de la relatividad.* Debido a que se trata de una teoría matemáticamente compleja, aquí sólo se presenta un esbozo de su elegancia y brillantez.

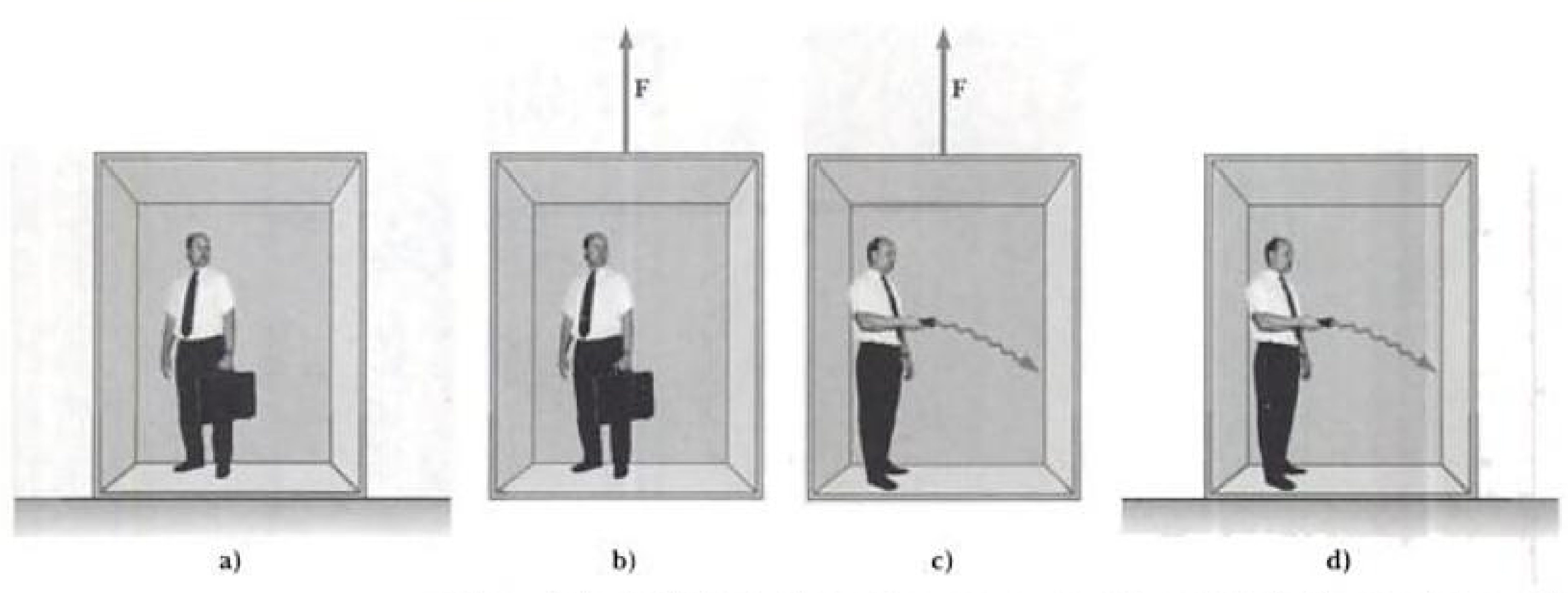


Figura 2.4 a) El observador está en reposo en un campo gravitacional uniforme **g** dirigido hacia abajo. b) El observador está en una región donde la gravedad es ignorable, a pesar de que el sistema de referencia es acelerado por una fuerza externa **F** que produce una aceleración **g** dirigida hacia arriba. Según Einstein, los sistemas de referencia en los incisos a) y b) son equivalentes en todas las formas. Ningún experimento local puede distinguir diferencia alguna entre los dos sistemas de referencia. c) En el sistema de referencia acelerado, un rayo de luz parece desviarse hacia abajo debido a la aceleración del elevador. d) Si los incisos a) y b) son en verdad equivalentes, como propuso Einstein, entonces el inciso c) sugiere que un rayo de luz debería desviarse hacia abajo en un campo gravitacional.

Desde el punto de vista de Einstein, el comportamiento dual de la masa constituía una evidencia de una muy estrecha y fundamental relación entre ambos comportamientos. Einstein indicó que ningún experimento mecánico (como dejar caer un objeto) podía distinguir entre las dos situaciones que se ilustran en las figuras 2.4a y 2.4b. En la figura 2.4a, una persona se encuentra en un elevador sobre la superficie de un planeta y se siente presionada hacia el piso del elevador debido a la fuerza gravitacional. En la figura 2.4b, la persona está en un elevador en el espacio vacío, acelerando hacia arriba con $a = g$. La persona se siente oprimida hacia el piso con la misma fuerza que en la figura 2.4a. En cada caso, un objeto soltado por el observador experimenta una aceleración hacia abajo de magnitud g con respecto al piso. En la figura 2.4a, la persona se encuentra en un sistema de referencia inercial en un campo gravitacional. En la figura 2.4b, la persona se encuentra en un sistema de referencia no inercial acelerado en un espacio sin gravedad. Einstein afirmó que estas dos situaciones son *completamente* equivalentes. Debido a que los dos sistemas de referencia en aceleración relativa no pueden distinguirse entre sí, este hecho extiende la idea de equivalencia física completa a sistemas de referencia *acelerados translacionalmente* entre sí. Esto resolvió otra cuestión filosófica planteada por Einstein; a saber, la artificialidad de confinar el principio de relatividad a sistemas de referencia sin aceleración.

Einstein llevó más lejos esta idea y propuso que *ningún* experimento, mecánico o de otro tipo, podía distinguir entre los dos casos. Esta extensión, que incluye a todos los fenómenos (no sólo los mecánicos) posee consecuencias interesantes. Por ejemplo, suponga que un pulso de luz se envía en sentido horizontal a través de un elevador que está acelerando hacia arriba en el espacio vacío, como se muestra en la figura 2.4c. Desde el punto de vista de un ob-

servador situado en un sistema de referencia inercial fuera del elevador, la luz viaja en línea recta mientras el piso del elevador se acelera hacia arriba. No obstante, según el observador que está en el elevador la trayectoria del pulso de luz se desvía hacia abajo a medida que el piso del elevador (y el observador) se acelera hacia arriba. En consecuencia, basado en la igualdad de los incisos a) y b) de la figura para todos los fenómenos, Einstein propuso que **un haz de luz también debía desviarse hacia abajo o caer en un campo gravitacional,** como en la figura 2.4d. Este efecto ha sido comprobado en forma experimental, aunque la desviación es pequeña. Un rayo láser dirigido hacia el horizonte se desvía menos de 1 cm después de recorrer 6 000 km.

Los dos postulados de la **teoría general de la relatividad** de Einstein son

Postulados de la teoría general de la relatividad

- Las leyes de la naturaleza tienen la misma forma para observadores situados en cualquier sistema de referencia, acelerado o no.
- En la vecindad de cualquier punto, un campo gravitacional es equivalente a un sistema de referencia acelerado, en ausencia de efectos gravitacionales (**principio de equivalencia**).

Un efecto interesante predicho por la teoría general es que el tiempo es alterado por la gravedad. Un reloj en presencia de un campo gravitacional avanza más lentamente que otro ubicado donde éste es despreciable. En consecuencia, las frecuencias de la radiación emitida por átomos en presencia de un campo gravitacional fuerte se *corren hacia el rojo* hacia frecuencias más bajas cuando se comparan con las mismas emisiones en presencia de un campo débil. Este corrimiento se ha detectado en las líneas espectrales emitidas por átomos en estrellas de gran masa. También se ha comprobado en la Tierra al comparar las frecuencias de los rayos gamma (una forma de radiación electromagnética de alta energía) emitidos por núcleos separados verticalmente por una distancia aproximada de 20 m (vea la sección 3.7).

El segundo postulado sugiere que un campo gravitacional puede "transformarse" en cualquier punto si se elige un sistema de referencia acelerado idóneo: uno en caída libre. Einstein desarrolló un método ingenioso que permite describir la aceleración necesaria para hacer "desaparecer" el campo gravitacional. Especificó una idea, la *curvatura del espacio-tiempo*, que describe el efecto gravitacional en todo punto. De hecho, esta curvatura remplaza por completo a la teoría gravitacional de Newton. Según Einstein, la fuerza de gravitación no existe en absoluto. En vez de ello, la presencia de una masa provoca una curvatura del espacio-tiempo en la vecindad de la masa, la cual determina la trayectoria espacio-tiempo que deben seguir todos los objetos que se desplazan libremente. En 1979, John Wheeler (físico teórico estadounidense nacido en 1911) resumió la teoría general de la relatividad de Einstein en una sola expresión: "El espacio le dice a la materia cómo moverse y la materia le dice al espacio cómo curvarse".

Como ejemplo de los efectos del espacio-tiempo curvo, imagine a dos viajeros que se mueven en trayectorias paralelas separadas por unos cuantos metros sobre la superficie terrestre y que mantienen exactamente una dirección hacia el norte a lo lago de dos líneas de longitud. Si ambos se observan cerca del Ecuador, pueden afirmar que sus trayectorias son exactamente paralelas. No obstante, cuando se aproximan al Polo Norte, observan que se aproximan entre sí, y se encuentran en realidad en el Polo Norte. Así, podrán afirmar que se desplazaron siguiendo trayectorias paralelas, aunque, de hecho, lo hicieron acercándose mutuamente, *como si entre ellos hubiese una fuerza de atracción.* Llegarán a esta conclusión con base en su experiencia cotidiana de moverse sobre

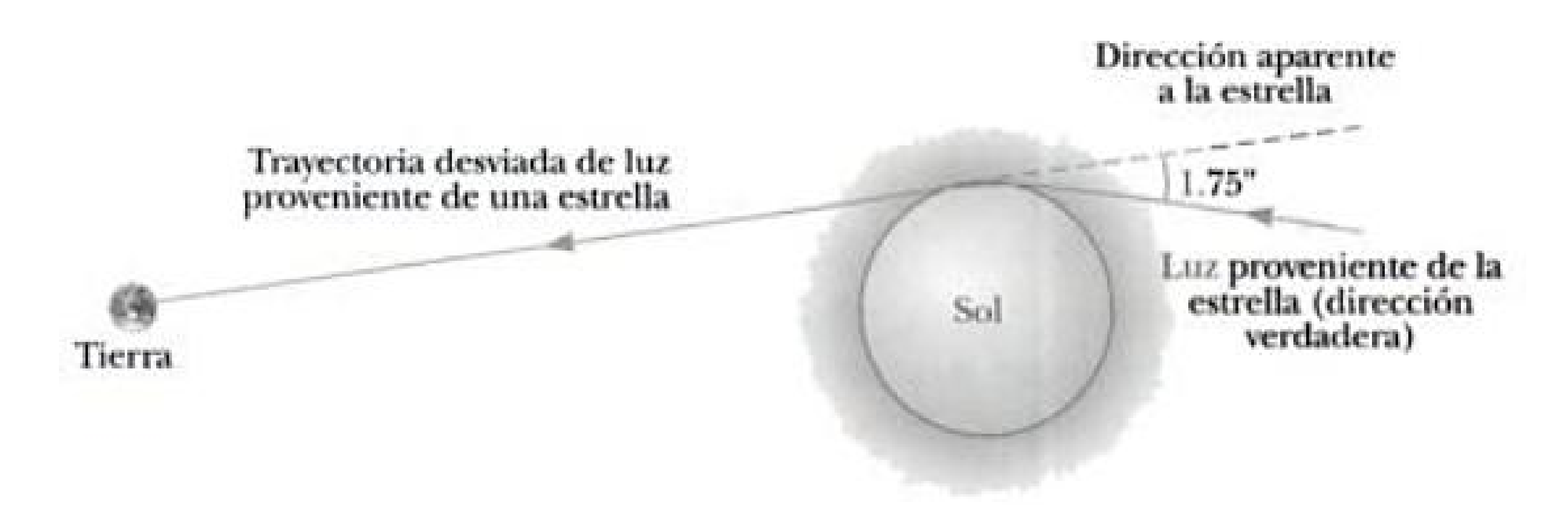


Figura 2.5 Deflexión de luz estelar que pasa cerca del Sol. Debido a este efecto, el Sol o algún objeto remoto puede actuar como una *lente gravitacional.* En su teoría general de la relatividad, Einstein calculó que la luz estelar que apenas llega a la superficie del Sol debe desviarse un ángulo de 1.75 s de arco.

superficies planas. No obstante, desde nuestra perspectiva percibimos que los viajeros caminan sobre una superficie curva, y es la geometría de ésta lo que provoca su convergencia, más que una fuerza de atracción. De manera semejante, la relatividad general sustituye la idea de fuerzas por el movimiento de objetos a través de un espacio-tiempo curvo.

Una predicción importante de la teoría general de la relatividad es que un rayo de luz que pase cerca del Sol deberá desviarse en el espacio-tiempo curvo creado por la masa del Sol. Esta predicción fue confirmada cuando los astrónomos detectaron la desviación de la luz de las estrellas cerca del Sol durante un eclipse total de Sol que ocurrió poco después de la Primera Guerra Mundial (figura 2.5). Cuando se anunció este descubrimiento, Einstein se convirtió en una celebridad mundial. (Consulte el ensayo en la red de Clifford Will para otras pruebas y ramificaciones importantes de la relatividad general en http://info.brookscole.com/mp3e.)

Si la concentración de masa se vuelve muy grande, como se cree que ocurre cuando las estrella grandes agotan su combustible nuclear y se reducen a un volumen muy pequeño, podría formarse un **hoyo negro.** Aquí, la curvatura del espacio-tiempo es tan extrema que, dentro de una pequeña distancia a partir del centro del hoyo negro, toda la materia y la luz quedarían atrapadas, según se analiza en la sección 3.7.

Figura 2.6 Albert Einstein. El registro en imágenes de la gravedad fue otro triunfo de Einstein, ya que en 1936 indicó que esto podría ocurrir. (*Cortesía de AIP/Niels Bohr Library.*)

Radiación gravitacional, o una buena onda es difícil de encontrar

La radiación gravitacional es un tema casi tan antiguo como la relatividad general. Alrededor de 1916, Einstein tuvo éxito al demostrar que las ecuaciones de campo de la relatividad general admitían soluciones ondulatorias análogas a las de la teoría electromagnética. Por ejemplo, una mancuerna que gira con respecto a un eje que pasa por su centro formando ángulos rectos emitirá ondas gravitacionales que se desplazan a la velocidad de la luz. Las ondas gravitacionales también transportan energía lejos de la mancuerna, de igual manera a como las ondas electromagnéticas disminuyen la energía de la fuente de luz. También, como las ondas electromagnéticas (em), se cree que las ondas gravitacionales poseen una naturaleza dual: corpuscular y ondulatoria. Se cree que la partícula gravitacional, el gravitón, tiene una masa igual a cero, que se desplaza a la velocidad de la luz c, y que obedece la ecuación relativista $E = pc$.

En 1968, Joseph Weber inició un programa de detección de ondas gravitacionales usando barras de aluminio detectoras de gran masa suspendidas en el vacío y aisladas de fuerzas externas. Las ondas gravitacionales son mucho más



Figura 2.7 Joseph Weber trabajando en una barra detectora en la Universidad de Maryland a principios de la década de 1970. La frecuencia fundamental de la barra era de 1 660 Hz. Cristales piezoeléctricos alrededor del centro de la barra convierten diminutas vibraciones mecánicas en señales eléctricas. (*Cortesía de AIP Emilio Segre Visual Archives.*)

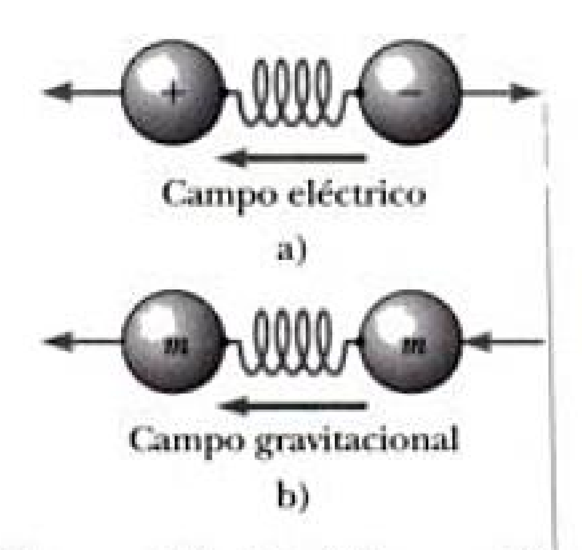


Figura 2.8 Modelos sencillos de detectores de ondas em y de la gravedad. Los detectores se muestran como dos "cargas" con un resorte entre ellas; la idea es que las ondas ejercen fuerzas sobre las cargas, haciendo que el resorte vibre proporcionalmente a la intensidad de la onda. El detector es en extremo sensible cuando la frecuencia de las ondas corresponde a la frecuencia natural del sistema resorte-masa. a) Cargas eléctricas iguales y opuestas se mueven en direcciones opuestas cuando se someten a una onda em y excitan el resorte con facilidad. b) Una barra metálica detectora de ondas gravitacionales puede modelarse mediante un resorte que conecta dos masas iguales; sin embargo, una onda que encuentra ambas masas en fase no provoca vibración alguna en el resorte.

difíciles de detectar que las ondas em, no sólo porque las fuerzas gravitacionales son mucho más débiles que las fuerzas eléctricas, sino porque la "carga" o masa gravitacional sólo se presenta en una variedad: positiva. En la figura 2.8a se muestra por qué un detector bipolar de ondas em es mucho más sensible que el detector de barra gravitacional que se muestra en la figura 2.8b. Sin embargo, como se muestra en la figura 2.9, si la distancia entre las masas detectoras es del mismo orden de magnitud que la longitud de onda de la gravedad, entonces las ondas gravitacionales que pasan ejercen una fuerza de oscilación neta débil que, de manera alternada, comprime y extiende la longitud de la barra.

Las vibraciones débiles de la barra se detectan mediante cristales fijos a la barra que las convierten en señales eléctricas. Hoy día, una docena de laboratorios alrededor del mundo se dedican a elaborar y mejorar el detector básico de "barra de Weber", tratando de reducir el ruido proveniente de fuentes térmicas, eléctricas y del medio ambiente a fin de detectar las muy débiles oscilaciones producidas por una onda gravitacional. Para una barra de 1 m de longitud, el desafío es detectar una variación en longitud menor que 10^{-20} m, o 10^{-5} veces el radio de un protón. Esta sensibilidad se basa en una fuente casi *catastrófica* de ondas gravitacionales, como el colapso gravitacional de una estrella que daría origen a un hoyo negro en el centro de nuestra galaxia. Así, las ondas de gravedad no sólo son difíciles de detectar, sino también difíciles de generar con una gran intensidad. Es interesante que las estrellas que están en colapso pronostican que éste dura alrededor de 1 milisegundo, con la producción de ondas de gravedad con una frecuencia aproximada de 1 kHz y cuyas longitudes de onda miden varios cientos de kilómetros.

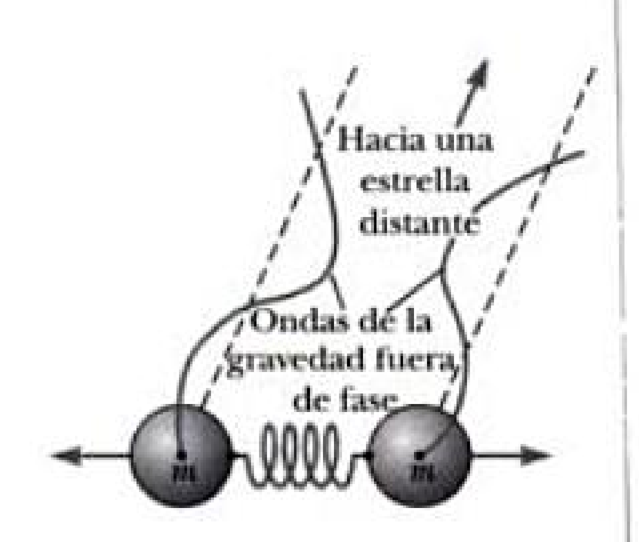
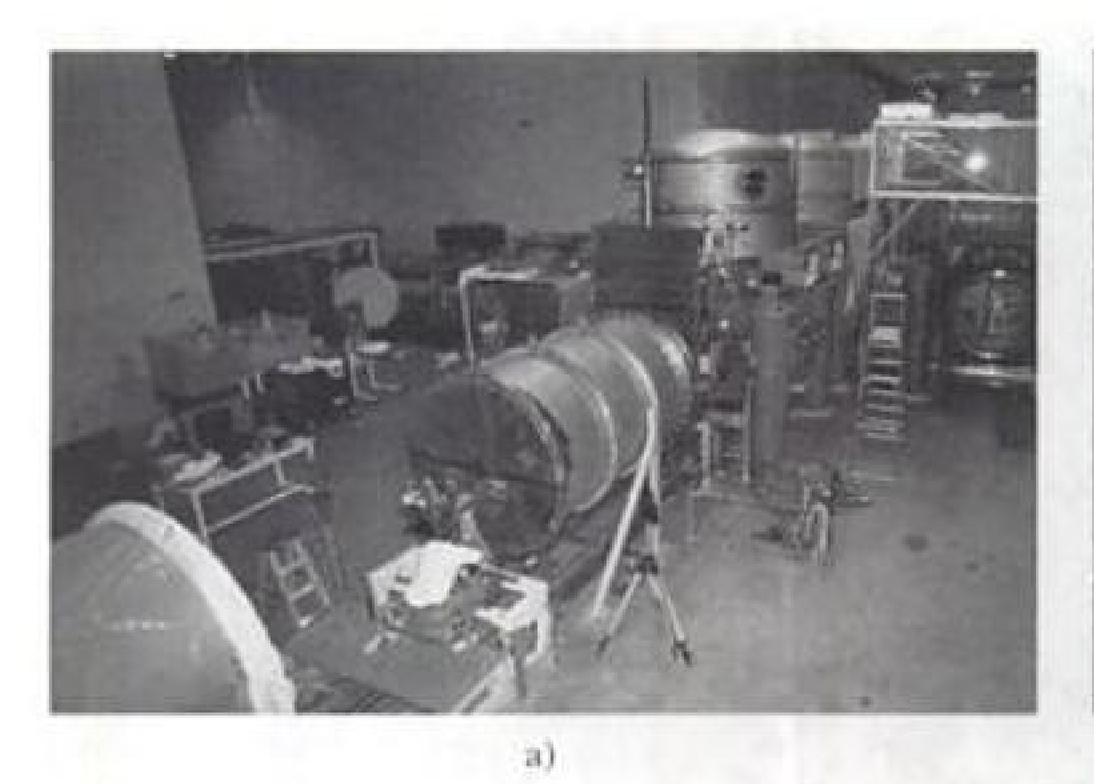


Figura 2.9 Si el detector de ondas gravitacionales es del mismo tamaño que la longitud de onda de la radiación detectada, entonces las ondas llegan fuera de fase a las dos masas y el sistema empieza a vibrar.



a)



b)

Figura 2.10 a) Aparato LIGO prototipo con brazos de 40 m. b) Foto del LIGO de Louisiana con brazos de 4 km. (*a: Tony Tyson/Lucent Technologies/Bell Labs Innovations; b: cortesía del California Institute of Technology.*)

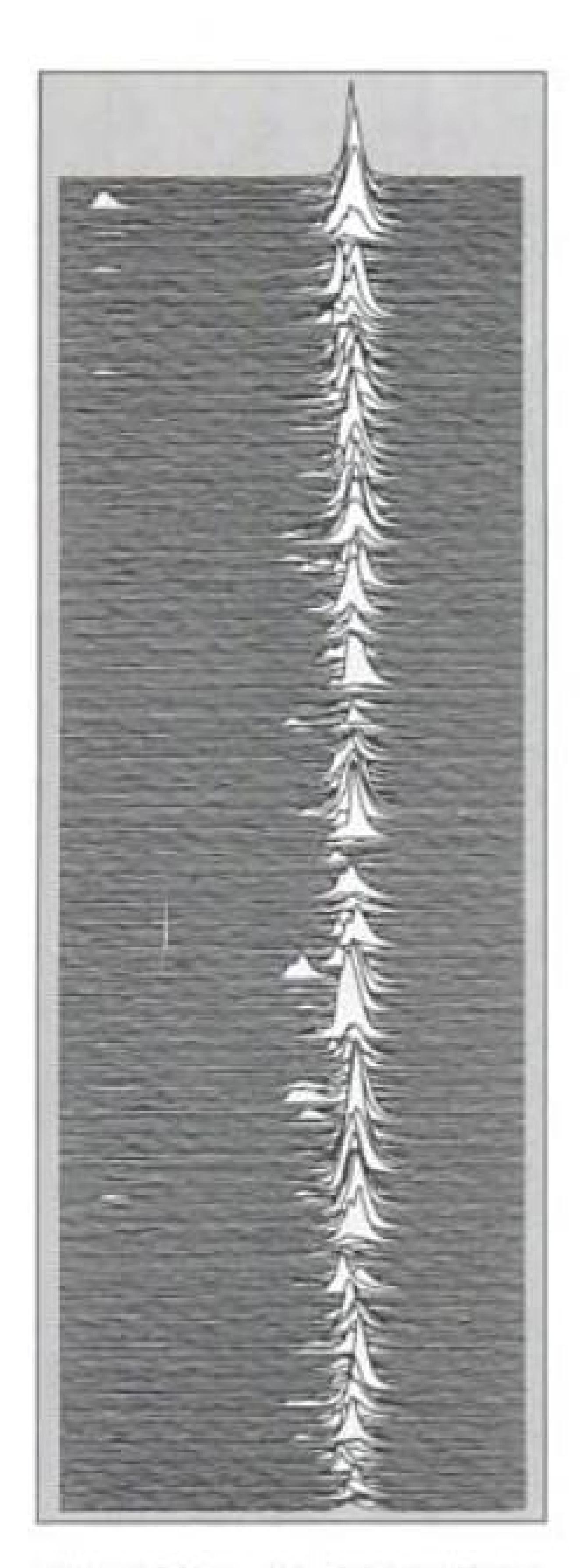


Figura 2.11 400 pulsos consecutivos de radiofrecuencia provenientes del pulsar PSR 0950+08. Cada una de las 400 líneas representa un intervalo de tiempo consecutivo de 0.253 s.

Actualmente, en Estados Unidos y Europa están en operación o en construcción varios observatorios de ondas gravitacionales por interferómetros láser, (LIGO, por sus siglas en inglés) los cuales reflejan rayos láser a lo largo de brazos perpendiculares para monitorear pequeñas variaciones en longitud entre espejos separados por varios kilómetros en un aparato de Michelson-Morley gigante. (Vea las figuras 2.10a y b.) Las variaciones en la longitud del brazo deben ocurrir cuando una onda gravitacional pase por el aparato. Dos sitios LIGO con brazos de 4 km están actualmente en operación en Livingston, Louisiana y Handford, Washington. Los dos sitios, a una distancia aproximada de 2 000 millas entre sí, buscan señales que ocurren en forma simultánea en ambos lugares. Es más probable que tales coincidencias sean ondas gravitacionales provenientes de una estrella distante que señales de ruido local.

Aunque no se ha detectado directamente radiación gravitacional, se sabe que existe debido a las observaciones de un extraordinario sistema conocido como pulsar binario. Descubierto en 1974 por los radioastrónomos Rusell Hulse y Joseph Taylor, consta de un pulsar (que es una estrella de neutrones que gira con rapidez) y una estrella acompañante en órbita una alrededor de la otra. Aunque la acompañante no se ha observado en forma directa, también se cree que es una estrella de neutrones. El pulsar actúa como un reloj extremadamente estable, cuyo periodo de pulso es de cerca de 59 milisegundos con un cambio de sólo 0.25 ns/año. En la figura 2.11 se muestra la extraordinaria regularidad de 400 pulsos de radio consecutivos de un pulsar. Al medir los tiempos de llegada de los pulsos de radio a la Tierra, los observadores pudieron determinar el movimiento del pulsar con respecto a su acompañante con una precisión impresionante. Por ejemplo, el valor exacto del periodo orbital es 27 906.980 895 s, y la excentricidad orbital es 0.617|131. Como una mancuerna giratoria, un sistema binario en órbita debe emitir radiación gravitacional y, durante el proceso, perder algo de su energía orbital. Esta pérdida de energía hace que el pulsar y su acompañante se dirijan una a la otra en espiral y que el periodo orbital se acorte. Según la relatividad general, el decremento pronosticado para el periodo orbital es de 75.8 μs/año. El decremento observado coincide con la predicción hasta un margen mejor que 0.5%. Esto confirma la existencia de radiación gravitacional y las ecuaciones relativistas

a)



b)

Figura 2.12 a) Russell Hulse en 1974 operando su computadora y teletipo en el observatorio Arecibo en Puerto Rico. La forma registra la "fantástica" detección del PSR 1913+16, con sus siempre cambiantes periodos rayados por la frustración de Hulse. b) Joseph Taylor encontró evidencias de las ondas gravitacionales en los movimientos del PSR 1913+16: un par de estrellas de neutrones. (*a: Foto cortesía de Russell Hulse. © The Nobel Foundation, 1993; b: cortesía de Office of Communications, Princeton University.*)

generales que la describen. Hulse y Taylor (figura 2.12) recibieron el premio Nobel en 1993 gracias a su descubrimiento.

RESUMEN

La expresión relativista para la **cantidad de movimiento lineal** de una partícula que se mueve a la velocidad **u** es

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} = \gamma m\mathbf{u} \tag{2.1}$$

donde γ está dada por

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}}$$

La expresión relativista para la **energía cinética** de una partícula es

$$K = \gamma mc^2 - mc^2 \tag{2.9}$$

donde mc^2 se denomina **energía en reposo** de la partícula.

La energía total E de una partícula se relaciona con la masa mediante la expresión

$$E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}} \tag{2.10}$$

La energía total de una partícula de masa m se relaciona con la cantidad de movimiento por medio de la ecuación

$$E^2 = p^2c^2 + (mc^2)^2 \tag{2.11}$$

Por último, la ley de conservación de la masa-energía establece que *la suma de la masa-energía de un sistema de partículas antes de la interacción debe ser igual a la suma de la masa-energía del sistema después de la interacción, donde la masa-energía de la i-ésima partícula se define como*

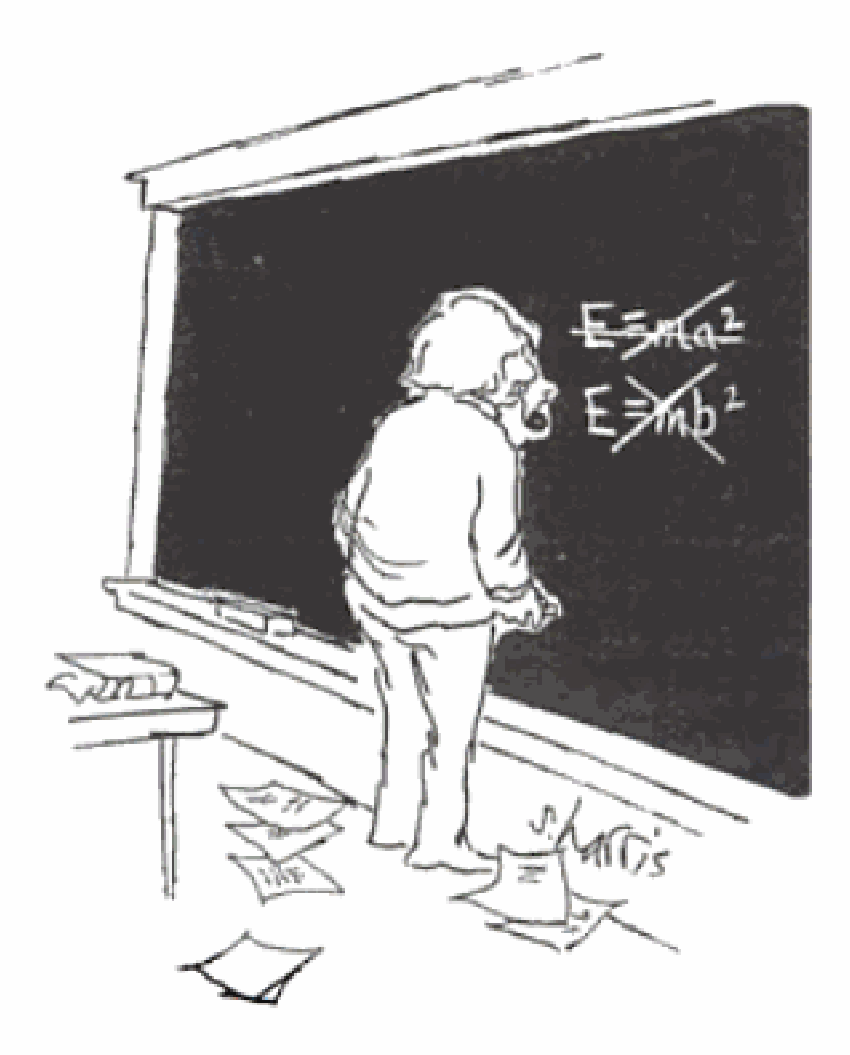
$$E_i = \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - (u_i^2/c^2)}}$$

La aplicación del principio de conservación de la masa-energía a los casos específicos de 1) la fisión de un núcleo pesado en reposo y 2) la fusión de varias partículas en un núcleo compuesto con menos masa total permite definir la energía liberada por fisión, Q, y la energía de enlace de un sistema compuesto, *BE*.

Los dos postulados de la **teoría general de la relatividad** de Einstein son:

- Las leyes de la naturaleza tienen la misma forma para observadores en cualquier sistema de referencia, acelerado o no.
- En la vecindad de cualquier punto, un campo gravitacional es equivalente a un sistema de referencia acelerado en ausencia de efectos gravitacionales. (Éste es el **principio de equivalencia.**)

Las ecuaciones de campo de la relatividad general pronostican ondas gravitacionales, y actualmente se está llevando a cabo una investigación a nivel mundial para detectar estas elusivas ondas.



(© *S. Harris*)

BIBLIOGRAFÍA ADICIONAL SUGERIDA

1. E. F. Taylor y J. A. Wheeler, *Spacetime Physics*, San Francisco, W. H. Freeman, 1963.
2. R. Resnick, *Introduction to Special Relativity*, Nueva York, Wiley, 1968.
3. A. P. French, *Special Relativity*, Nueva York, Norton, 1968.
4. H. Bondi, *Relativity and Common Sense*, Science Study Series, Garden City, NY, Doubleday, 1964.
5. A. Einstein, *Out of My Later Years*, Nueva York, World Publishing, 1971.
6. A. Einstein, *Ideas and Opinions*, New York, Crown, 1954.
7. G. Gamow, *Mr. Tompkins in Wonderland*, Nueva York, Cambridge University Press, 1939.
8. L. Infeld, *Albert Einstein*, Nueva York, Scribner's, 1950.
9. J. Schwinger, *Einstein's Legacy*, Scientific American Library, Nueva York, W. H. Freeman, 1985.
10. R. S. Shankland, "The Michelson-Morley Experiment". *Sci. Amer.*, noviembre de 1964, p. 107.
11. R. Skinner, *Relativity for Scientists and Engineers*, Nueva York, Dover Publications, 1982.
12. N. Mermin, *Space and Time in Special Relativity*, Prospect Heights, IL, Waveland Press, 1989.
13. M. Bartusiak, *Einstein's Unfinished Symphony*, Nueva York, Berkley Books, 2000. (Historia y explicación no matemáticas de la búsqueda de ondas de gravedad.)

PREGUNTAS

1. Una partícula se mueve a una velocidad inferior a $c/2$. Si se duplica la velocidad de la partícula, ¿qué ocurre con su cantidad de movimiento?
2. Proporcione un razonamiento físico que demuestre la imposibilidad de acelerar un objeto de masa m a la velocidad de la luz, incluso si una fuerza continua actuara sobre él.
3. El límite superior de la velocidad de un electrón es la velocidad de la luz, c. ¿Significa lo anterior que la cantidad de movimiento del electrón posee un límite superior?
4. Debido a que la masa es una medida de energía, ¿puede concluirse que la masa de un resorte comprimido es mayor que la masa del mismo resorte cuando no está comprimido?
5. La masa de los fotones de luz es igual a cero. ¿Cómo es posible que tengan cantidad de movimiento?
6. "La mecánica newtoniana describe correctamente objetos que se mueven a velocidades normales, y la mecánica relativista describe correctamente objetos que se mueven muy rápido." "La mecánica relativista debe efectuar una transición continua a medida que se reduce a la mecánica newtoniana en aquellos casos en que la velocidad de un objeto se vuelva pequeña en comparación con la velocidad de la luz." Argumente a favor o en contra de estas dos afirmaciones.
7. Dos objetos son idénticos, excepto que uno es más caliente que el otro. Compare cómo responden a fuerzas idénticas.
8. Respecto a los sistemas de referencia, ¿cuál es la diferencia entre la relatividad general y la relatividad especial?
9. Dos relojes idénticos están en la misma casa: uno en el dormitorio del primer piso, y el otro en la planta baja, en la cocina. ¿Cuál avanza más lentamente? Explique su respuesta.
10. *Un experimento conceptual.* Imagine hormigas que viven en un carrusel, que es su mundo bidimensional. A partir de mediciones realizadas en pequeños círculos, las hormigas están bastante familiarizadas con el número π. Cuando miden la circunferencia de su mundo y la dividen entre el diámetro, esperan calcular el número $\pi = 3.14159...$ Nosotros vemos que el carrusel gira a velocidad relativista. Desde nuestro punto de vista, las unidades de medida de las hormigas en la circunferencia experimentan la contracción de Lorentz en la dirección tangencial; por tanto, las hormigas requieren algunas unidades de medida adicionales para cubrir por completo esa distancia. Las unidades que mide el diámetro, sin embargo, no se contraen debido a que su movimiento es perpendicular a sus longitudes. Como resultado, la razón calculada no coincide con el número π. Si usted fuese una hormiga, ¿podría decir que el resto del universo está girando en círculos y que el disco en que se encuentra está en reposo? Entonces, ¿qué explicación posible podría proporcionar para la discrepancia, en vista de la teoría general de la relatividad?

PROBLEMAS

2.1 Cantidad de movimiento relativista y forma relativista de las leyes de Newton

1. Calcule la cantidad de movimiento de un protón que se mueve a una velocidad de a) $0.010c$, b) $0.50c$ y c) $0.90c$. d) Convierta las respuestas de los incisos a), b) y c) a MeV/c.
2. La cantidad de movimiento de un electrón es 90% mayor que su cantidad de movimiento clásica. a) Encuentre la velocidad del electrón. b) ¿Cómo cambiaría su resultado si la partícula fuese un protón?
3. Considere la forma relativista de la segunda ley de Newton. Demuestre que cuando **F** es paralela a **v**,

$$F = m\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \frac{dv}{dt}$$

donde m es la masa de un objeto y v es su velocidad.

4. Una partícula cargada se mueve a lo largo de una línea recta en un campo eléctrico uniforme E con una velocidad v. Si tanto el movimiento como el campo eléctrico

están en la dirección x, a) demuestre que la magnitud de la aceleración de la carga q está dada por

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{qE}{m}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

b) Analice la importancia de la dependencia de la aceleración con respecto a la velocidad. c) Si la partícula parte del reposo desde $x = 0$ en $t = 0$, encuentre la velocidad y la posición de la partícula después que transcurre un tiempo t. Comente sobre los valores límite de v y x cuando $t \to \infty$.

5. Recuerde que la fuerza magnética sobre una carga q que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ en un campo magnético $\mathbf{B}$ es igual a $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Si una partícula cargada se desplaza en una órbita circular con una velocidad fija v en presencia de un campo magnético constante, use la forma relativista de la segunda ley de Newton para demostrar que la frecuencia de su movimiento orbital es

$$f = \frac{qB}{2\pi m}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

6. Demuestre que la cantidad de movimiento de una partícula que tiene una carga e y que se mueve en un círculo de radio R en un campo magnético B está dada por $p = 300BR$, donde p está en MeV/c, B está en teslas y R está en metros.

2.2 Energía relativista

7. Demuestre que la relación energía-cantidad de movimiento dada por $E^2 = p^2c^2 + (mc^2)^2$ se deduce a partir de las expresiones $E = \gamma mc^2$ y $p = \gamma mu$.
8. Un protón se mueve a una velocidad de $0.95c$. Calcule a) su energía en reposo, b) su energía total y c) su energía cinética.
9. La energía cinética de un electrón es cinco veces mayor que su energía en reposo. Encuentre a) su energía total y b) su velocidad.
10. Encuentre la velocidad de una partícula cuya energía total es 50% mayor que su energía en reposo.
11. A un protón en un acelerador de alta energía se le imprime una energía cinética de 50 GeV. Determine a) la cantidad de movimiento y b) la velocidad del protón.
12. La velocidad de un electrón es de $0.75c$. Encuentre la velocidad de un protón que tenga a) la misma energía cinética que el electrón y b) la misma cantidad de movimiento que el electrón.
13. Los protones en un acelerador en el Laboratorio Nacional Fermi, cerca de Chicago, son acelerados hasta una energía igual a 400 veces su energía en reposo. a) ¿Cuál es la velocidad de estos protones? b) ¿Cuál es su energía cinética en MeV?
14. *¿Cuánto más brillará el Sol, Nellie?* El Sol irradia aproximadamente 4×10^{26} J de energía hacia el espacio cada segundo. a) ¿Cuánta masa se libera como radiación cada segundo? b) Si la masa del Sol es 2×10^{30} kg, ¿cuánto tiempo brillará el Sol si la liberación de energía continúa al ritmo actual?
15. Los electrones en aparatos de televisión son acelerados mediante una diferencia de potencial de 50 000 V. a) Calcule la velocidad de los electrones usando la forma relativista de la energía cinética, suponiendo que éstos parten del reposo. b) Calcule la velocidad de los electrones usando la forma clásica de la energía cinética. c) En su opinión, ¿la diferencia en velocidad es importante en el diseño del aparato de televisión?
16. Como se observó en la sección 2.2, la cantidad $E^2 - p^2c^2$ es *invariante* en la teoría de la relatividad. Esto significa que la cantidad $E^2 - p^2c^2$ tiene el mismo valor en todos los sistemas de referencia inerciales, incluso si E y p tienen valores distintos en sistemas de referencia diferentes. Muestre este hecho explícitamente al considerar el siguiente caso. Una partícula de masa m se mueve en la dirección $+x$ con una velocidad u y en el sistema de referencia S tiene una cantidad de movimiento p y una energía E. a) Si S′ se mueve a una velocidad v en la forma usual, encuentre la cantidad de movimiento p' y la energía E' que se observan en S′. (*Sugerencia:* Use la transformación de velocidad de Lorentz para encontrar p' y E'. ¿Se cumple que $E = E'$ y $p = p'$? b) Demuestre que $E^2 - p^2c^2$ es igual a $E'^2 - p'^2c^2$.

2.3 La masa como una medida de la energía

17. Un isótopo del radio se desintegra en un isótopo de radón, ^{222}Rn, emitiendo una partícula α (un núcleo de helio) según el esquema de desintegración $^{226}\text{Ra} \to {}^{222}\text{Rn} + {}^{4}\text{He}$. Las masas de los átomos son 226.0254 (Ra), 222.0175 (Rn) y 4.0026 (He). ¿Cuánta energía se libera como resultado de esta desintegración?
18. Considere la desintegración ${}^{55}_{24}\text{Cr} \to {}^{55}_{25}\text{Mn} + e^-$, donde e^- es un electrón. La masa del núcleo ^{55}Cr es 54.9279 u, y la del núcleo ^{55}Mn es 54.9244 u. a) Calcule la diferencia de masa en MeV. b) ¿Cuál es la energía cinética máxima del electrón emitido?
19. Calcule la energía de enlace en MeV por nucleón en el isótopo ${}^{12}_{6}\text{C}$. Observe que la masa de este isótopo es exactamente 12 u, y que las masas del protón y del neutrón son 1.007276 u y 1.008665 u, respectivamente.
20. Se sabe que el neutrón libre se desintegra en un protón, un electrón y un antineutrino $\overline{v}$ (de masa en reposo despreciable) según

$$\text{n} \longrightarrow \text{p} + \text{e}^- + \overline{v}$$

Esta expresión se denomina *desintegración beta* y se analizará con más detalle en el capítulo 13. Se ha medido que los productos de la desintegración poseen una energía cinética total de 0.781 MeV ± 0.005 MeV. Demuestre que esta observación es consistente con el exceso de energía pronosticado por la relación masa-energía de Einstein.

2.4 Conservación de la cantidad de movimiento y la energía relativistas

21. Un electrón cuya energía cinética es $K = 1$ MeV choca de frente con un positrón en reposo. (Un positrón es una partícula de antimateria que tiene la misma masa que el electrón, aunque carga opuesta.) En la colisión, ambas partículas se aniquilan mutuamente y son remplazadas por dos rayos γ de igual energía, cada uno viajando a ángulos iguales θ en la dirección de movimiento del electrón. (Los rayos gamma son partículas sin

masa de radiación electromagnética que poseen una energía $E = pc$.) Encuentre la energía E, la cantidad de movimiento p y el ángulo de emisión θ de los rayos gamma.

22. El mesón K^0 es un miembro sin carga del "zoológico de partículas", que se desintegra en dos piones cargados, según $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$. Los piones poseen cargas opuestas, como se indica, y la misma masa, $m_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2$. Suponga que un K^0 en reposo se desintegra en dos piones en una cámara de burbujas donde está presente un campo magnético de 2 T (vea la figura P2.22). Si el radio de curvatura de los piones es de 34.4 cm, encuentre a) las cantidades de movimiento y las velocidades de los piones y b) la masa del mesón K^0.

23. Una partícula inestable de masa igual a 3.34×10^{-27} kg se encuentra inicialmente en reposo. La partícula se desintegra en dos fragmentos que se desplazan a las velocidades $0.987c$ y $-0.868c$. Encuentre las masas en reposo de los fragmentos.

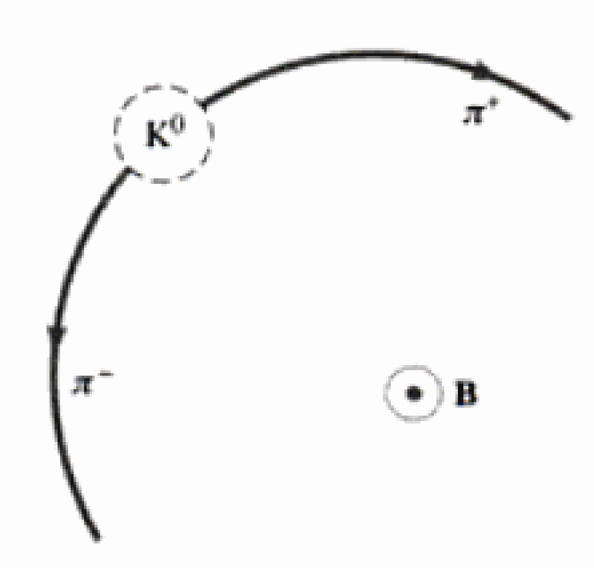


Figura P2.22 Bosquejo de las trazas hechas por el π^+ y el π^- en la desintegración del mesón K^0 en reposo. El movimiento del pión es perpendicular a **B**. (**B** está dirigido hacia afuera de la página.)

PROBLEMAS ADICIONALES

24. Según la medición de unos observadores en un sistema de referencia S, una partícula con carga q se mueve a una velocidad **v** en un campo magnético **B** y en un campo eléctrico **E**. Luego se mide que la fuerza resultante sobre la partícula es $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Otro observador se mueve junto con la partícula cargada y mide que su carga es q, aunque también mide que el campo eléctrico es $\mathbf{E}'$. Si ambos observadores miden la misma fuerza, **F**, demuestre que $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

25. *Desviación clásica de la luz por el Sol.* Estime la desviación de la luz de las estrellas que llega a la superficie del Sol. Suponga que la luz consta de partículas de masa m que se mueven a la velocidad c y que la desviación es pequeña. (a) Use $\Delta p_x = \int_{-\infty}^{+\infty} F_x\,dt$ para demostrar que el ángulo de deflexión θ está dado por $\theta \cong \dfrac{2GM_s}{bc^2}$, donde Δp_x es el cambio total en la cantidad de movimiento de una partícula que llega al Sol. Vea las figuras P2.25a y b. b) Para $b = R_s$, demuestre que $\theta = 4.2 \times 10^{-6}$ rad.

26. Un objeto con una masa de 900 kg que se desplaza a una velocidad de $0.850c$ choca con un objeto estacionario con masa de 1 400 kg. Los dos objetos se adhieren mutuamente. Encuentre a) la velocidad y b) la masa del objeto compuesto.

27. Imagine que todo el Sol se colapsa en una esfera de radio R_g de modo que el trabajo necesario para eliminar una pequeña masa m de la superficie debe ser igual a su energía en reposo, mc^2. Este radio se denomina *radio gravitacional* del Sol. Encuentre R_g. (Se cree que el destino final de las estrellas muy masivas es su colapso más allá de sus radios gravitacionales en agujeros negros.)

28. Una batería recargable AA con una masa de 25 g puede suministrar una potencia de 1.20 W durante 50 min. a) ¿Cuál es la diferencia de masa entre una batería cargada y una no cargada? b) ¿Qué fracción de la masa total es esta diferencia de masa?

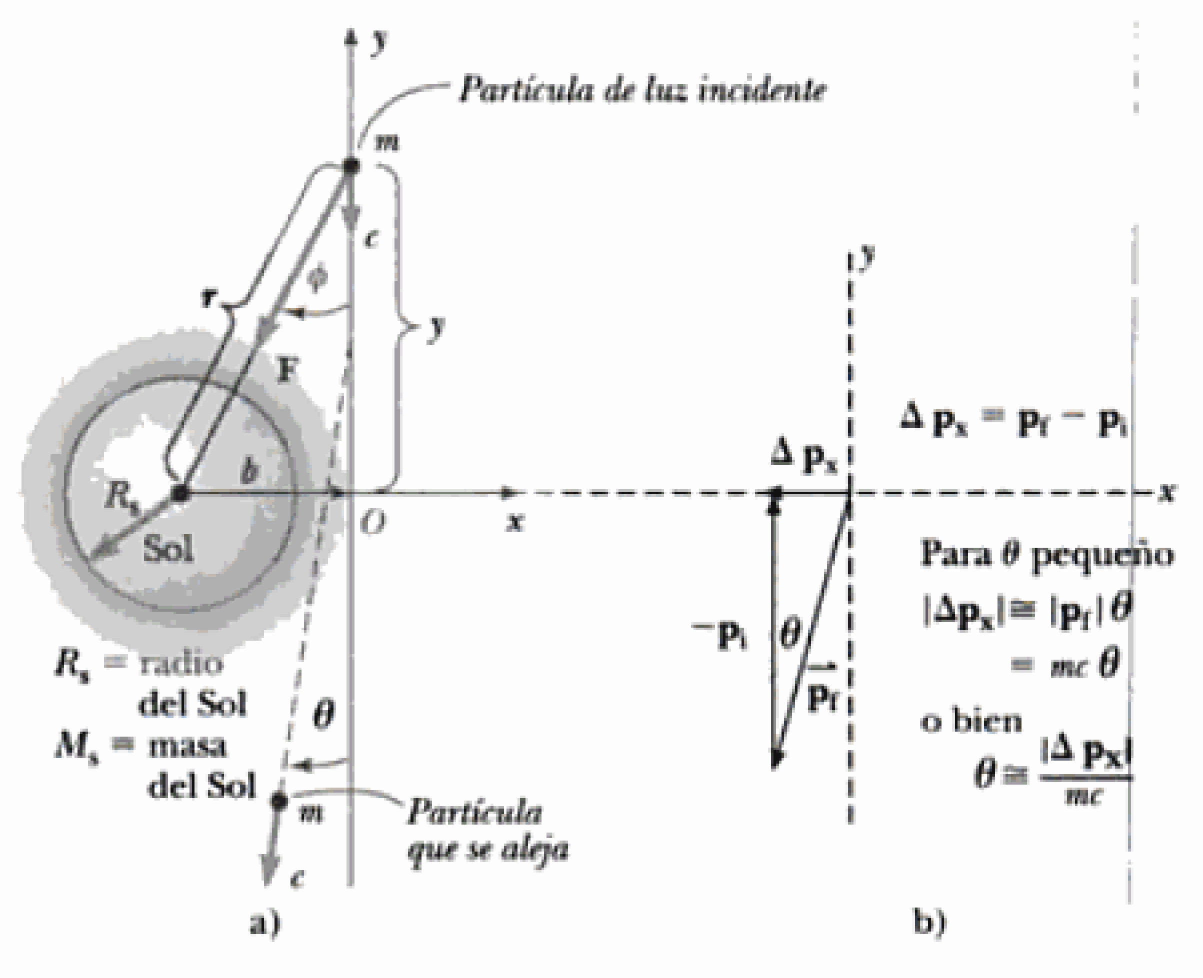


Figura P2.25 Deflexión clásica de luz estelar que llega al Sol.

29. Un objeto se desintegra en dos fragmentos. Uno de ellos tiene una masa igual a $1 \text{ MeV}/c^2$ y una cantidad de movimiento de $1.75 \text{ MeV}/c$ en la dirección x positiva. El otro fragmento tiene masa igual a $1.50 \text{ MeV}/c^2$ y una cantidad de movimiento de $2.005 \text{ MeV}/c$ en la dirección y positiva. Encuentre a) la masa y b) la velocidad del objeto original.

30. La creación y el estudio de nuevas partículas elementales constituye una parte importante de la física contemporánea. Especialmente interesante es el descubrimiento de una partícula muy masiva. Para crear una partícula de masa M se requiere una energía Mc^2. Con energía suficiente, es posible crear una partícula exótica al dejar que una partícula de materia normal que se desplaza

rápidamente, como un protón, choque con una partícula objetivo semejante. Considere una colisión perfectamente inelástica entre dos protones: un protón incidente con masa m, energía cinética K y cantidad de movimiento de magnitud p se une a un protón "blanco" que se encuentra inicialmente en reposo, formando una partícula producto simple de masa M. Podría pensarse que la creación de una nueva partícula producto, nueve veces más masiva que en un experimento previo, requiere justamente nueve veces más energía para el protón incidente. Desafortunadamente, no toda la energía cinética del protón incidente está disponible para la creación de la partícula producto, ya que la conservación de la cantidad de movimiento requiere que después de la colisión el sistema como un todo posea algo de energía cinética. Así, sólo una fracción de la energía de la partícula incidente está disponible para crear una nueva partícula. Usted determinará cómo la energía disponible para la creación de una partícula depende de la energía del protón en movimiento. Demuestre que la energía disponible para crear una partícula producto está dada por

$$Mc^2 = 2mc^2\sqrt{1 + \frac{K}{2mc^2}}$$

A partir de este resultado, cuando la energía cinética K del protón incidente es grande en comparación con su energía en reposo mc^2, se observa que M tiende a $(2mK)^{1/2}/c$. Por tanto, si la energía del protón incidente se incrementa por un factor de 9, la masa que puede crearse se incrementa sólo por un factor de 3. Este resultado decepcionante es la razón principal de que la mayor parte de los aceleradores modernos, como los del CERN (en Europa), el Fermilab (cerca de Chicago), el SLAC (en Stanford) y el DESY (en Alemania) utilicen *haces en colisión*. Aquí la cantidad de movimiento total de un par de partículas interactuantes puede ser igual a cero. El centro de masa puede estar en reposo después de la colisión, de modo que, en principio, toda la energía cinética inicial puede usarse para la creación de una partícula según

$$Mc^2 = 2mc^2 + K = 2mc^2\left(1 + \frac{K}{2mc^2}\right)$$

donde K es la energía cinética total de dos partículas idénticas en colisión. Aquí, si $K >> mc^2$, se tiene que M es directamente proporcional a K, como se quería. Estas máquinas son difíciles de construir y operar, aunque abren nuevas perspectivas a la física.

31. Una partícula de masa m que se mueve a lo largo del eje x con una componente de velocidad $+u$ choca de frente y se adhiere a una partícula de masa $m/3$ que se mueve a lo largo del eje x con la componente de velocidad $-u$. ¿Cuál es la masa M de la partícula resultante?
32. Rayos láser compactos de alta potencia pueden producir un pulso de luz de 2 J que dure 100 fs enfocado a un punto de 1 μm de diámetro. (Consulte el trabajo de Mourou y Umstader, "Extreme Light", *Scientific American*, mayo de 2002, p. 81.) El campo eléctrico en la luz acelera los electrones en el material objetivo hasta casi la velocidad de la luz. a) ¿Cuál es la potencia media del láser durante el pulso? b) ¿Cuántos electrones pueden acelerarse hasta $0.9999c$ si 0.0100% de la energía del pulso se convierte en energía de movimiento del electrón?
33. La energía llega a la atmósfera superior de la Tierra desde el Sol a un ritmo de 1.79×10^{17} W. Si toda esta energía fuese absorbida por la Tierra sin ser emitida de nuevo, ¿cuánto se incrementaría su masa en un año?

3

Teoría cuántica de la luz

Contenido del capítulo

A principios del siglo XX, siguiendo a Newton y Maxwell, los físicos hubieran podido rescribir el relato bíblico de la creación como sigue:

En el principio, Él creó el Cielo y la Tierra:

$$F = G\frac{mm'}{r^2} = ma$$

Y luego dijo: "Hágase la luz":

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = 0 \qquad \oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I + \varepsilon_0\mu_0\frac{d\Phi_E}{dt}$$

En realidad, además de los pilares gemelos de la mecánica y el electromagnetismo erigidos por los gigantes Newton y Maxwell, había un tercer soporte sólido para la física en 1900: la termodinámica y la mecánica estadística. La termodinámica clásica fue el tema de estudio de muchos investigadores (Carnot, Mayer, Helmholtz, Clausius, Lord Kelvin). Destaca especialmente por el hecho de que parte de dos proposiciones sencillas y genera resultados sólidos y concluyentes, independientes de mecanismos físicos en detalle. La mecánica estadística, creada por Maxwell, Clausius, Boltzmann[1] y Gibbs, utiliza los méto-

[1] En cuya lápida está escrito $S = k_B \log W$, una fórmula fundamental de la mecánica estadística atribuida a él.

dos de la teoría de la probabilidad para calcular promedios y fluctuaciones a partir del promedio para sistemas que contienen muchas partículas o modos de vibración. Es interesante que la física cuántica comenzó no con una ruptura de las leyes de Maxwell o Newton aplicadas al átomo, sino con un problema de la mecánica estadística clásica: el cálculo de la intensidad de radiación a una longitud de onda dada proveniente de una cavidad caliente. La solución desesperada a este problema de radiación fue descubierta en 1900 por un minucioso especialista en termodinámica clásica: Max Planck. En efecto, es significativo que tanto Planck como Einstein volviesen una y otra vez a los fundamentos sencillos y generales de la termodinámica y la mecánica estadística como las únicas bases ciertas de la nueva teoría cuántica. Aunque aquí no se seguirán por completo los razonamientos termodinámicos originales, en este capítulo se verá cómo Planck llegó a la distribución espectral correcta para la radiación en una cavidad al permitir sólo ciertas energías para los osciladores emisores de radiación en las paredes de la cavidad. También se verá cómo Einstein extendió esta cuantización de la energía a la luz misma, explicando así, de manera brillante el efecto fotoeléctrico. Esta breve historia de la teoría cuántica de la luz concluye con un análisis sobre la dispersión de la luz provocada por los electrones (efecto Compton), lo cual demostró de manera irrefutable que los cuantos de luz transportan cantidad de movimiento, así como energía. Por último, en la sección 3.7 se describe la atracción que la gravedad ejerce sobre la luz.

3.1 EXPERIMENTOS DE HERTZ: LA LUZ COMO ONDA ELECTROMAGNÉTICA

Es irónico que quien confirmó con tanto cuidado que las "novedosas" ondas de Maxwell realmente existían y que poseían las mismas propiedades que la luz también socavó la teoría de las ondas electromagnéticas como la explicación completa de la luz. Para entender esta ironía, repasemos brevemente la teoría del electromagnetismo desarrollada entre 1865 y 1873 por el insigne físico escocés James Clerk Maxwell.

Maxwell estaba interesado en particular en los efectos de las oscilaciones de la corriente eléctrica en los alambres. Según su teoría, una corriente alterna debía generar campos eléctricos y magnéticos fluctuantes en la región circundante a la perturbación original. Además, se predecía que estas ondas tenían una frecuencia igual a la frecuencia de las oscilaciones de la corriente. *Además, y lo cual es más importante, la teoría de Maxwell predecía que las ondas irradiadas debían comportarse exactamente como la luz:* las ondas electromagnéticas debían reflejarse en espejos metálicos, ser refractadas por dieléctricos como el cristal, presentar polarización e interferencia, y desplazarse hacia afuera del alambre por el vacío a una velocidad de 3×10^8 m/s. Es natural que lo anterior llevara al postulado unificador y simplificador de que la luz también era un tipo de onda de Maxwell o perturbación electromagnética, creada por osciladores eléctricos de frecuencia extremadamente alta en la materia. A fines del siglo XIX se ignoraba la naturaleza exacta de estos osciladores submicroscópicos cargados (Planck los llamó resonadores), aunque los físicos asumieron que de alguna forma eran capaces de emitir ondas de luz cuya frecuencia era igual a la frecuencia de movimiento del oscilador.

Incluso en esa época, no obstante, resultaba evidente que este modelo de emisión de luz no podía ser verificado en forma directa mediante experimentos, ya que las frecuencias eléctricas más altas que podían alcanzarse entonces se ubicaban en el valor de 10^9 Hz y se sabía que la frecuencia de la luz visible

era un millón de veces más alta. Pero Heinrich Hertz (figura 3.1) hizo lo siguiente. En una serie de experimentos brillantes y exhaustivos, demostró que la teoría de Maxwell era correcta y que, en efecto, una corriente eléctrica que oscila irradia ondas electromagnéticas que poseen todas las características de la luz, excepto la misma longitud de onda que ésta. Usando un simple oscilador de chispa que consta de dos puntas cortas que terminan en pequeñas esferas metálicas separadas por aire aproximadamente media pulgada, aplicó pulsos de alto voltaje, con los cuales logró que una chispa librara dicha separación y produjese una oscilación eléctrica de alta frecuencia, de aproximadamente 5×10^8 Hz. Esta oscilación, o arco, se mantiene mientras el hueco de aire permanece conduciendo, y entre las esferas la carga va de una a la otra hasta que se establece un equilibrio eléctrico. Usando una simple antena circular con un pequeño hueco de chispa como receptor, Hertz pudo detectar casi de inmediato la radiación proveniente de este oscilador de chispa, incluso a varios cientos de metros. Además, encontró que la radiación detectada tenía una longitud de onda aproximada de 60 cm, lo cual corresponde a la frecuencia del oscilador de 5×10^8 Hz. (Recuerde que $c = \lambda f$, donde λ es la longitud de onda y f es la frecuencia.)



Figura 3.1 Heinrich Hertz (1857-1894), experimentalista alemán de dotes extraordinarias. (©*Bettmann/Corbis.*)

En un extenuante *tour de force*, Hertz procedió de inmediato a demostrar que estas ondas electromagnéticas podían reflejarse, refractarse, enfocarse, polarizarse y hacer que interfirieran: en resumen, convenció a los físicos de aquel entonces que las ondas hertzianas y las ondas de luz eran lo mismo. El modelo clásico de emisión de la luz era un concepto que ya había llegado a su fin. Se distribuyó como un incendio fuera de control. La idea de que la luz era una onda electromagnética irradiada por cargas eléctricas submicroscópicas que oscilan (ahora se sabe que son electrones atómicos) fue aplicada rápidamente a la transmisión de la luz a través de sólidos, a la reflexión desde superficies metálicas y al efecto Zeeman, recientemente descubierto. En 1896, Pieter Zeeman, un físico holandés, descubrió que un campo magnético intenso puede cambiar la frecuencia de la luz emitida por un cristal resplandeciente. En un impresionante triunfo para Maxwell, se encontró que sus ecuaciones predecían correctamente (en casi todos los casos) el cambio de vibración de los osciladores eléctricos y, por tanto, el cambio en la frecuencia de la luz emitida. (Vea el problema 1.) Maxwell, con Hertz detrás del trono, quedó como rey supremo, ya que ¡había logrado unir los reinos previamente independientes de la electricidad, el magnetismo y la luz! (Vea la figura 3.2.)

Una observación sutil hecha por Hertz sobre su confirmación de la naturaleza electromagnética de la luz termina este análisis. Al describir su transmisor de chispa, enfatizó: "es esencial pulir con frecuencia las superficies de las

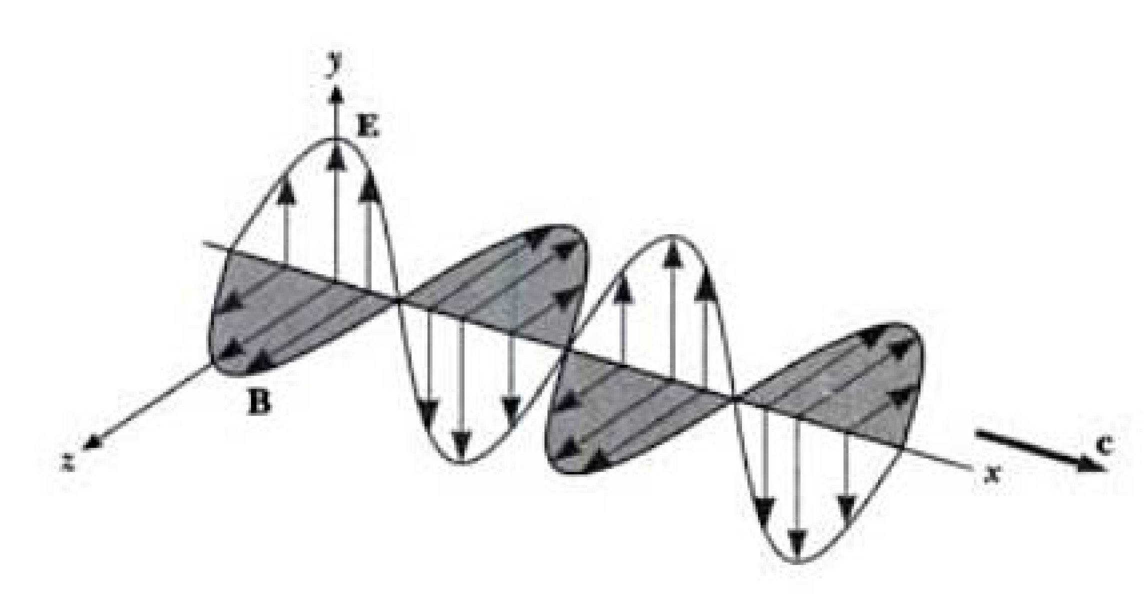


Figura 3.2 Onda de luz o de radio lejos de la fuente, según Maxwell y Hertz.

terminales de la chispa" para poder garantizar que opere de manera confiable.[2] En apariencia, esto fue al principio bastante misterioso para Hertz. En un intento por resolver el misterio, posteriormente investigó este efecto lateral y concluyó que era la luz ultravioleta de la chispa inicial actuando sobre una superficie metálica limpia lo que provocaba que la corriente fluyese con mayor libertad entre los polos del hueco de la chispa. En este proceso de verificación de la teoría de la luz como onda electromagnética, Hertz descubrió el efecto fotoeléctrico, un fenómeno que habría de minar la prioridad de la teoría ondulatoria de la luz y establecer la teoría corpuscular de ésta al mismo nivel.

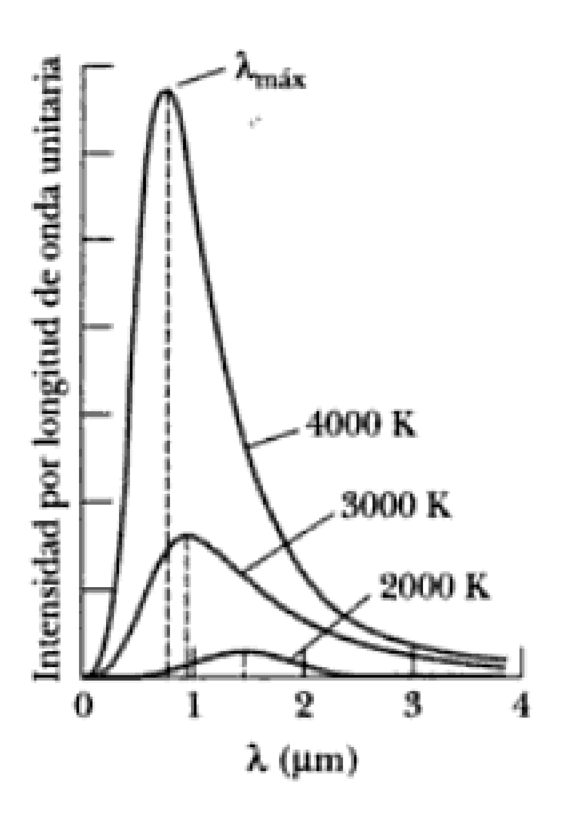


Figura 3.3 Emisión de radiación por un sólido resplandeciente. Observe que la cantidad de radiación emitida (el área bajo la curva) crece rápidamente con el incremento de la temperatura.

3.2 RADIACIÓN DE CUERPO NEGRO

El impresionante éxito de la teoría de la emisión de luz de Maxwell de inmediato condujo a intentos por aplicarla a un añejo rompecabezas sobre la radiación: el denominado problema del "cuerpo negro". Este problema consiste en predecir la intensidad de radiación a una longitud de onda dada emitida por un sólido resplandeciente calentado a una temperatura específica. Antes de abordar de inmediato la solución que dio Planck a este problema, consideremos la importancia que tiene para la física clásica repasando brevemente su historia.

Thomas Wedgwood, pariente de Charles Darwin y conocido fabricante de porcelana, parece haber sido el primero en observar el carácter universal de todos los objetos calientes. En 1792 observó que todos los objetos en sus hornos, sin importar su naturaleza química, tamaño o forma, se vuelven rojos a la misma temperatura. Esta primera observación fue mejorada considerablemente gracias a la evolución de la espectroscopía, de modo que a mediados del siglo XIX se sabía que los sólidos resplandecientes emiten espectros continuos y no las bandas o líneas que emiten los gases calientes. (Vea la figura 3.3.) Gustav Kirchhoff demostró el importante teorema que lleva su nombre cuando probó, con razonamientos basados en la termodinámica, que para cualquier cuerpo en equilibrio térmico con la radiación[3] la potencia emitida es proporcional a la potencia absorbida. De manera más específica,

$$e_f = J(f, T)A_f \tag{3.1}$$

donde e_f es la potencia emitida por unidad de área y por unidad de frecuencia por un objeto caliente particular, A_f es la potencia de absorción (fracción de la potencia incidente absorbida por unidad de área y por unidad de frecuencia por el objeto caliente), y $J(f, T)$ es una función universal (la misma para todos los cuerpos) que sólo depende de f, la frecuencia de la luz, y de T, la temperatura absoluta del cuerpo. Un *cuerpo negro* se define como un objeto que absorbe toda la radiación electromagnética que incide sobre él, por lo que, en consecuencia, parece negro. Para un cuerpo negro se cumple que $A_f = 1$ para todas las frecuencias, de modo que el teorema de Kirchhoff para un cuerpo negro se plantea como

Cuerpo negro

$$e_f = J(f, T) \tag{3.2}$$

[2]H. Hertz, *Ann. Physik* (Leipzig), 33:983, 1887.

[3]Un ejemplo de un cuerpo en equilibrio con la radiación sería un horno con paredes cerradas a una temperatura fija y la radiación dentro de la cavidad del horno. Afirmar que la radiación está en equilibrio térmico con las paredes del horno significa que ha intercambiado muchas veces energía con ellas y que es homogénea, isotrópica y no polarizada. De hecho, se puede considerar que el equilibrio térmico de la radiación dentro de una cavidad es bastante semejante al equilibrio térmico de un fluido dentro de un recipiente que se mantiene a temperatura constante: en ambos casos el termómetro en el centro de la cavidad alcanzará una temperatura estacionaria final igual a la del recipiente.

La ecuación 3.2 muestra que la potencia emitida por unidad de área y por unidad de frecuencia por un cuerpo negro sólo depende de la temperatura y de la frecuencia de la luz y no de la estructura física o química del cuerpo negro, de acuerdo con la temprana observación de Wedgwood.

Debido a que la absorción y la emisión están relacionadas con el teorema de Kirchhoff, se observa que un cuerpo negro o un absorbente perfecto también es un radiador ideal. En la práctica, una pequeña abertura en cualquier cavidad caliente, como la puerta de un horno, se comporta como un cuerpo negro, porque tal abertura atrapa toda la radiación incidente (figura 3.4). Si en la figura 3.4 se invierte la dirección de la radiación, la luz emitida por una pequeña abertura estará en equilibrio térmico con las paredes, porque ya ha sido absorbida y vuelta a emitir varias veces.

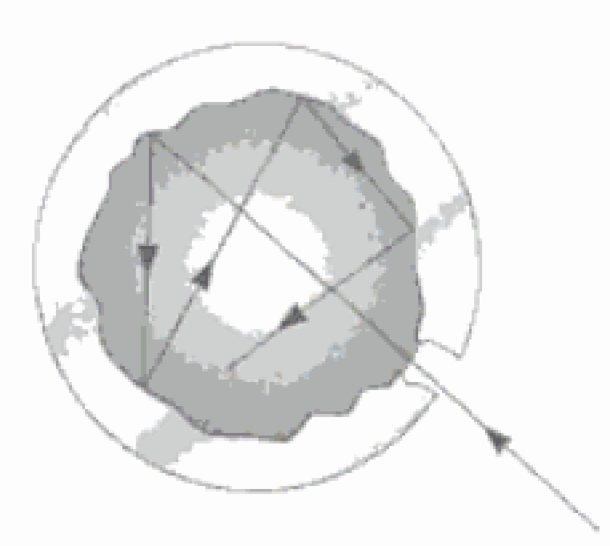


Figura 3.4 La abertura hacia la cavidad dentro de un cuerpo es una buena aproximación al cuerpo negro. La luz que penetra por la pequeña abertura incide en la pared lejana, donde una parte es absorbida a un ángulo al azar. La luz sigue siendo reflejada y, en cada reflexión, una porción de la luz es absorbida por las paredes de la cavidad. Luego de muchas reflexiones, esencialmente toda la energía incidente es absorbida.

El siguiente avance importante en la búsqueda por comprender el carácter universal de la radiación emitida por sólidos luminosos fue proporcionado en 1879 por el físico austriaco Josef Stefan (1835-1893). Stefan encontró experimentalmente que la potencia total emitida por unidad de área a todas las frecuencias por un cuerpo sólido, e_{total}, era proporcional a la cuarta potencia de su temperatura absoluta. En consecuencia, la ley de Stefan puede escribirse como

$$e_{total} = \int_0^\infty e_f \, df = \sigma T^4 \qquad (3.3)$$

donde e_{total} es la potencia por unidad de área emitida en la superficie del cuerpo negro a todas las frecuencias, e_f es la potencia por unidad de área por unidad de frecuencia emitida por el cuerpo negro, T es la temperatura absoluta del cuerpo, y σ es la constante de Stefan-Boltzmann, dada por $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$. Un cuerpo que no es un radiador ideal satisface la misma ley general pero con un coeficiente, a, menor que 1:

Ley de Stefan

$$e_{total} = a\sigma T^4 \qquad (3.4)$$

Sólo cinco años después ocurrió otra confirmación impresionante de la teoría electromagnética de la luz de Maxwell, cuando Boltzmann dedujo la ley de Stefan a partir de una combinación de la termodinámica y las ecuaciones de Maxwell.

EJEMPLO 3.1 Ley de Stefan aplicada al Sol

Calcule la temperatura superficial del Sol a partir de la siguiente información. El radio del Sol está dado por $R_s = 7 \times 10^8$ m. La distancia media de la Tierra al Sol es $R = 1.5 \times 10^{11}$ m. La potencia por unidad de área (a todas las frecuencias) emitidas por el Sol que se mide en la Tierra es igual a 1 400 W/m². Suponga que el Sol es un cuerpo negro.

Solución Para un cuerpo negro se toma $a = 1$, de modo que la ecuación 3.4 proporciona

$$e_{total}(R_s) = \sigma T^4 \qquad (3.5)$$

donde la notación $e_{total}(R_s)$ indica la potencia total por unidad de área en la superficie del Sol. Debido a que en el planteamiento del problema se proporciona la potencia total por unidad de área en la Tierra, $e_{total}(R)$, se requiere la relación entre $e_{total}(R)$ y $e_{total}(R_s)$, la cual se obtiene de la conservación de la energía:

$$e_{total}(R_s) \cdot 4\pi R_s^2 = e_{total}(R) \cdot 4\pi R^2$$

o

$$e_{total}(R_s) = e_{total}(R) \cdot \frac{R^2}{R_s^2}$$

Al usar la ecuación 3.5, se obtiene

$$T = \left[\frac{e_{total}(R) \cdot R^2}{\sigma R_s^2}\right]^{1/4}$$

o

$$T = \left[\frac{(1400 \text{ W/m}^2)(1.5 \times 10^{11} \text{ m})^2}{(5.6 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4)(7 \times 10^8 \text{ m})^2}\right]^{1/4}$$
$$= 5\,800 \text{ K}$$

Como puede observarse en la figura 3.3, *la longitud de onda a la que se tiene la potencia de emisión máxima de un cuerpo negro*, $\lambda_{\text{máx}}$, se desplaza hacia longitudes de onda más cortas a medida que el cuerpo negro se calienta más. Esto coincide con la observación general de Wedgwood de que los objetos en el horno cambiaban de color rojo mate a anaranjado y a blanco a medida que aumentaba la temperatura. Este simple efecto de $\lambda_{\text{máx}} \propto T^{-1}$ no fue establecido en forma definitiva, sin embargo, sino hasta casi 20 años después que la obra fundamental de Kirchhoff había iniciado la búsqueda para encontrar la forma de la función universal $J(f, T)$. En 1893, Wilhelm Wien propuso una forma general para la ley de distribución de cuerpo negro $J(f, T)$, que explicaba el comportamiento experimental correcto de $\lambda_{\text{máx}}$ con la temperatura. Esta ley se denomina *ley de desplazamiento de Wien* y puede escribirse como

$$\lambda_{\text{máx}} T = 2.898 \times 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K} \tag{3.6}$$

donde $\lambda_{\text{máx}}$ es la longitud de onda en metros correspondiente a la intensidad máxima de cuerpo negro y T es la temperatura absoluta de la superficie del objeto que emite la radiación. Suponiendo que la sensibilidad máxima del ojo humano (que ocurre aproximadamente a 500 nm: luz azul-verde) coincide con $\lambda_{\text{máx}}$ para el Sol (un cuerpo negro), es posible comprobar la consistencia de la ley de desplazamiento de Wien con la ley de Stefan calculando de nuevo la temperatura superficial del Sol:

$$T = \frac{2.898 \times 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}}{500 \times 10^{-9}\ \text{m}} = 5\,800\ \text{K}$$

Así, se tiene una concordancia aceptable entre las mediciones realizadas a todas las longitudes de onda (ejemplo 3.1) y a la longitud de onda de intensidad máxima.

Ejercicio 1 ¡Cuán conveniente resulta que la emisión máxima del Sol esté a la misma longitud de onda que la sensibilidad máxima del ojo humano! ¿Puede explicar esta afirmación?

Densidad de energía espectral de un cuerpo negro

Hasta el momento se ha analizado la potencia radiada por unidad de área por unidad de frecuencia del cuerpo negro, $J(f, T)$. No obstante, es más conveniente considerar la densidad de energía espectral, o *energía por unidad de volumen por unidad de frecuencia de la radiación dentro de la cavidad del cuerpo negro,* $u(f, T)$. Para luz que esté en equilibrio con las paredes, la potencia emitida por centímetro cuadrado de abertura es simplemente proporcional a la densidad de energía de la luz en la cavidad. Debido a que la radiación en la cavidad es isotrópica y no polarizada, es posible promediar respecto a la dirección a fin de mostrar que la constante de proporcionalidad entre $J(f, T)$ y $u(f, T)$ es $c/4$, donde c es la velocidad de la luz. En consecuencia,

$$J(f, T) = u(f, T)c/4 \tag{3.7}$$

En 1893, Wien se aventuró a proponer la forma de la función universal $u(f, T)$, como

$$u(f, T) = Af^3 e^{-\beta f/T} \tag{3.8}$$

donde A y β son constantes. Ese resultado se conoce como ley exponencial de Wien; se parece y está vagamente basada en la distribución de velocidad de Maxwell para las moléculas de un gas. En menos de un año el gran espectros-

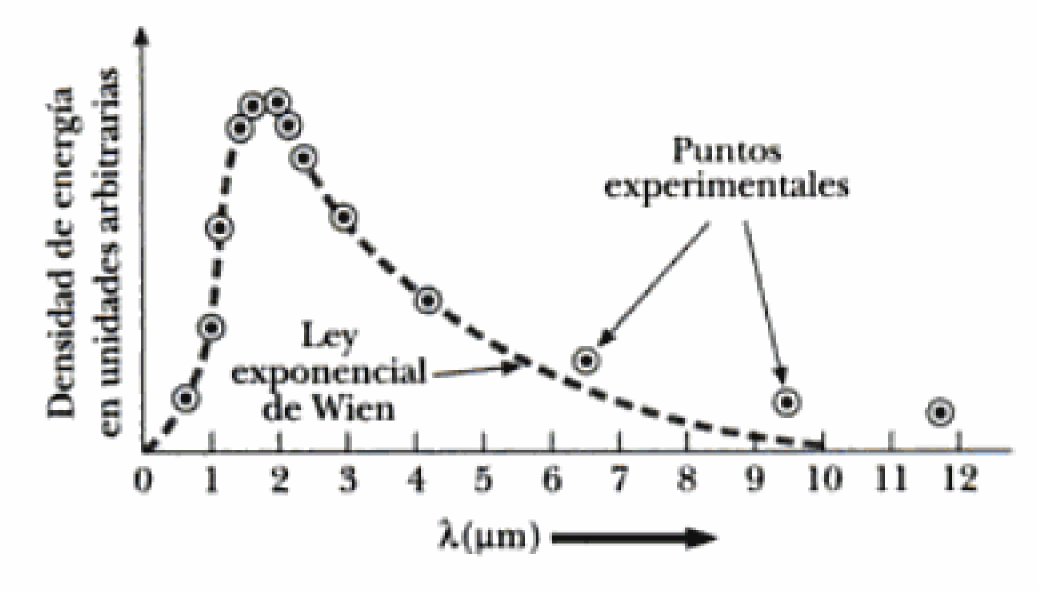


Figura 3.5 Discrepancia entre la ley de Wien y datos experimentales para un cuerpo negro a 1 500 K.

copista alemán Friedrich Paschen confirmó la conjetura de Wien al trabajar en el entonces difícil intervalo de frecuencias del infrarrojo de 1 a 4 μm y a temperaturas de 400 a 1 600 K.[4]

Como puede verse en la figura 3.5, Paschen realizó la mayoría de sus mediciones en la región de energía máxima de un cuerpo calentado a 1 500 K encontrando una coincidencia bastante aceptable con la ley exponencial de Wien. No obstante, en 1900, Lummer y Pringsheim extendieron las mediciones a 18 μm, y Rubens y Kurlbaum fueron aún más lejos: hasta 60 μm. Ambos equipos concluyeron que la ley de Wien fracasaba en esta región (vea la figura 3.5). En la figura 3.6 se muestra el arreglo experimental usado por Rubens y Kurlbaum. Es interesante observar que estos experimentos históricos implicaban la

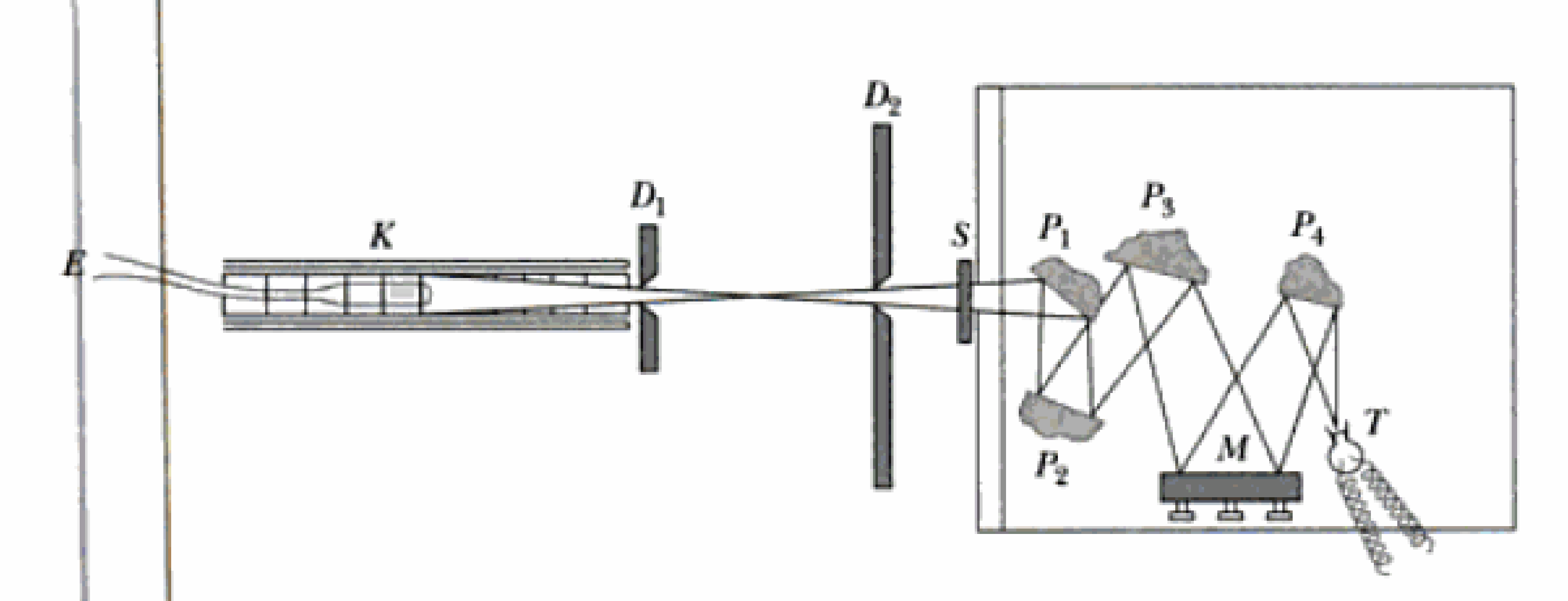


Figura 3.6 Aparato para medir la radiación de cuerpo negro a una sola longitud de onda en la región lejana del infrarrojo. La técnica experimental que refutó la ley de Wien y fue tan importante para el descubrimiento de la teoría cuántica fue el método de rayos residuales (*Restrahlen*). En esta técnica, se aísla una banda estrecha de radiación infrarroja lejana haciendo que la luz blanca experimente reflexiones múltiples por cristales de haluro de alcálido (P_1–P_4). Debido a que cada haluro de alcálido posee una reflexión máxima a una longitud de onda característica, es posible obtener bandas bastante puras de radiación infrarroja lejana mediante reflexiones repetidas. Enseguida, estas bandas puras pueden dirigirse sobre una termopila (T) para medir la intensidad. E es un termopar que se usa para medir la temperatura del horno de cuerpo negro, K.

[4]Es necesario indicar la gran dificultad para hacer mediciones de radiación de cuerpo negro y los peculiares adelantos realizados por espectroscopistas alemanes en las áreas fundamentales de fuentes de cuerpo negro, detectores sensibles y técnicas para operar en la región infrarroja. De hecho, quizá Planck no hubiese descubierto tan rápido la ley de cuerpo negro correcta sin su estrecha relación con los experimentalistas de la Physikalisch Technische Reichsanstalt de Berlín (una especie de Oficina Nacional Alemana de Normas): Otto Lummer, Ernst Pringsheim, Heinrich Rubens y Ferdinand Kurlbaum.

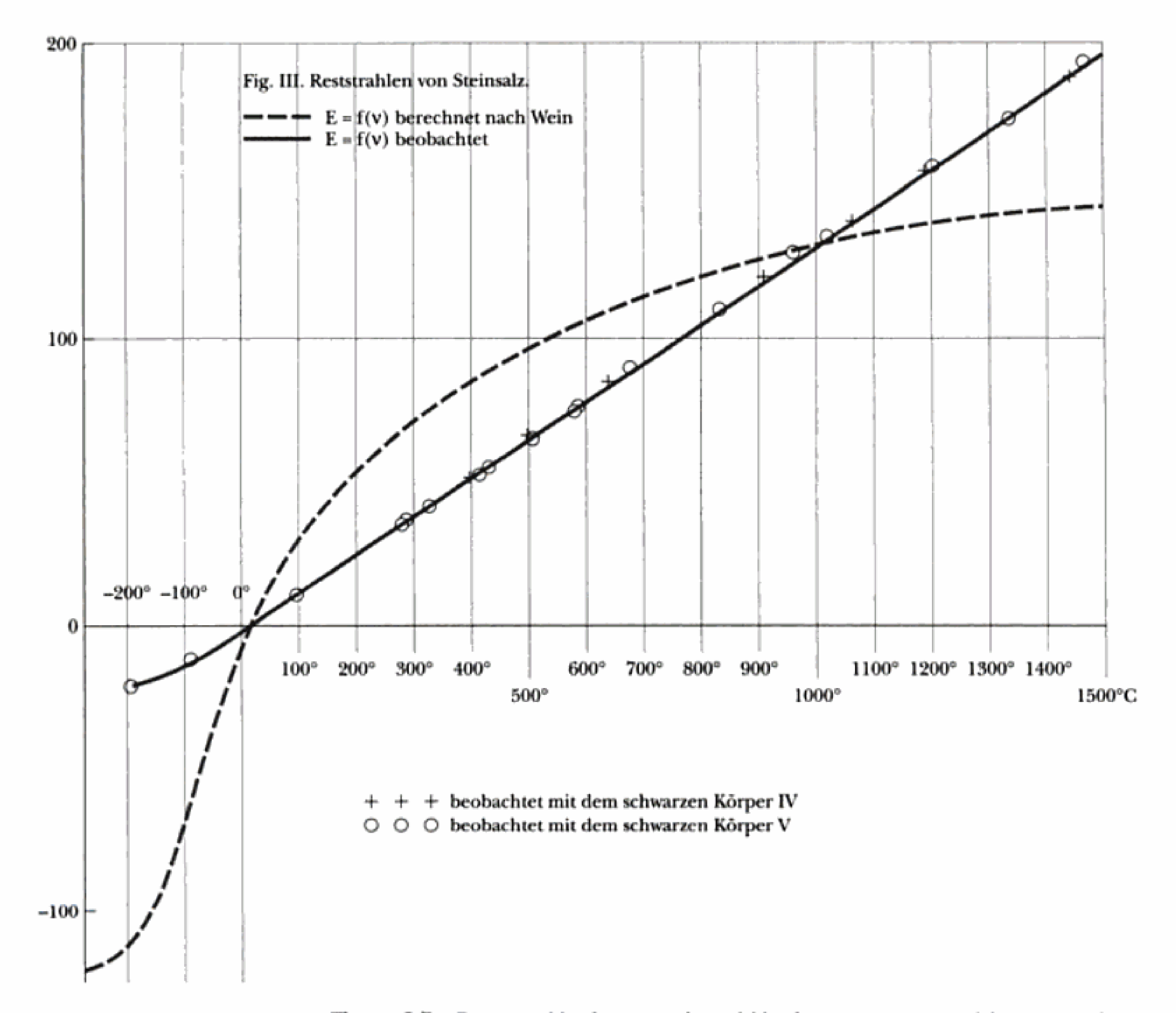


Figura 3.7 Comparación de curvas de emisión de cuerpo negro teóricas y experimentales a 51.2 μm sobre el intervalo de temperatura de -188°C a 1 500°C. El título de esta figura modificada es "Rayos residuales de sal de roca". *Berechnet nach* significa "calculado según", y *beobachtet* significa "observado". El eje vertical es la intensidad de emisión en unidades arbitrarias. (*Tomada de H. Rubens y S. Kurlbaum*, Ann. Physik, 4:649, 1901.)

medición de la intensidad de radiación de cuerpo negro a una longitud de onda fija y a una temperatura variable. En la figura 3.7 se muestran los resultados típicos, tomados del artículo de Rubens y Kurlbaum, que se obtienen a $\lambda = 51.2$ μm y sobre el intervalo de temperatura de -200° hasta $+1$ 500°C.

Planck entra en escena

En la tarde de un domingo de octubre de 1900, Max Planck descubrió la famosa fórmula de cuerpo negro, que anunció el surgimiento de la teoría cuántica. La cercanía de Planck con los experimentalistas Reichsanstalt fue extremadamente importante para su descubrimiento —ese mismo día había escuchado a Rubens decir que sus últimas mediciones demostraban que $u(f, T)$, la densidad de energía espectral, era proporcional a T para longitudes de onda grandes

o bajas frecuencias. Planck sabía que la ley de Wien coincidía bastante bien con los datos a altas frecuencias y, de hecho, había estado trabajando arduamente durante varios años en la deducción de la ley exponencial de Wien a partir de los principios de la mecánica estadística y de las leyes de Maxwell. Al interpolar entre las dos formas límite (la ley exponencial de Wien y la densidad de energía proporcional a la temperatura), encontró de inmediato una fórmula general, que envió a Rubens, en una tarjeta postal, esa misma tarde. Su fórmula era[5]

$$u(f, T) = \frac{8\pi h f^3}{c^3}\left(\frac{1}{e^{hf/k_B T} - 1}\right) \tag{3.9}$$

donde h es la constante de Planck $= 6.626 \times 10^{-34}$ J·s, y k_B es la constante de Boltzmann $= 1.380 \times 10^{-23}$ J/K. Con ayuda de unas cuantas aproximaciones puede observarse que la ecuación 3.9 posee el comportamiento correcto en el límite de frecuencias altas y bajas. A altas frecuencias, donde $hf/k_B T \gg 1$,

$$\frac{1}{e^{hf/k_B T} - 1} \approx e^{-hf/k_B T}$$

de modo que

$$u(f, T) = \frac{8\pi h f^3}{c^3}\left(\frac{1}{e^{hf/k_B T} - 1}\right) \approx \frac{8\pi h f^3}{c^3}\, e^{-hf/k_B T}$$

y se recupera la ley exponencial de Wien, ecuación 3.8. A bajas frecuencias, donde $hf/k_B T \ll 1$,

$$\frac{1}{e^{hf/k_B T} - 1} = \frac{1}{1 + \dfrac{hf}{k_B T} + \cdots - 1} \approx \frac{k_B T}{hf}$$

y

$$u(f, T) = \frac{8\pi h f^3}{c^3}\left(\frac{1}{e^{hf/k_B T} - 1}\right) \approx \frac{8\pi f^2}{c^3}\, k_B T$$

Este resultado muestra que la densidad de energía espectral es proporcional a T en la región de bajas frecuencias o región clásica, como descubrió Rubens.

Debe recalcarse que la obra de Planck implicaba mucho más que una manipulación matemática inteligente. Durante más de seis años, Planck (figura 3.8) trabajó para encontrar una deducción rigurosa de la curva de distribución del cuerpo negro. Estaba motivado, en sus propias palabras, por el hecho de que el problema de emisión: "representa algo absoluto, y como siempre he considerado a la búsqueda de lo absoluto como la meta más elevada de toda la actividad científica, entusiastamente me pusé a trabajar". A este trabajo dedicó casi toda su vida pues se esforzó por asignar a su fórmula una interpretación física aún más profunda y por reconciliar las energías cuánticas discretas con la teoría clásica.

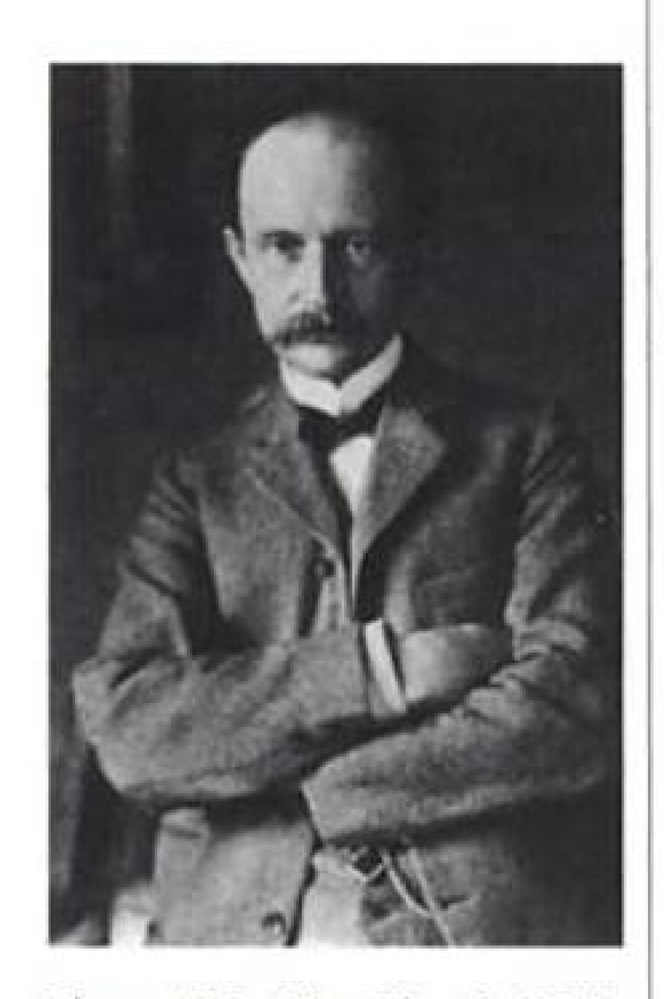


Figura 3.8 Max Planck (1858-1947). La obra que condujo a la "afortunada" fórmula de la radiación de cuerpo negro fue descrita por Planck en su discurso de aceptación del premio Nobel (1920): "Pero incluso si la fórmula de la radiación fuese perfectamente correcta, después de todo sólo sería una fórmula de interpolación descubierta por un trabajo afortunado de conjeturas, y entonces nos hubiera dejado más bien insatisfechos. Por consiguiente, desde el día de este descubrimiento he luchado para proporcionar una interpretación física real, lo cual me llevó a considerar las relaciones entre entropía y probabilidad, según las ideas de Boltzmann. Al cabo de algunas semanas del más intenso trabajo de mi vida, comenzó a aparecer la luz y a la distancia se revelaron perspectivas inesperadas". (*AIP Niels Bohr Library, W. F. Meggers Collection.*)

[5]Originalmente, Planck publicó su fórmula como $u(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5}\left(\frac{1}{e^{C_2/\lambda T} - 1}\right)$, donde $C_1 = 8\pi ch$ y $C_2 = hc/k_B$. Luego encontró valores de mejor ajuste a los datos experimentales para C_1 y C_2 y evaluó $h = 6.55 \times 10^{-34}$ J·s y $k_B = N_A/R = 1.345 \times 10^{-23}$ J/K. Debido a que R, la constante universal de los gases, era bastante bien conocida en la época, esta técnica también dio por resultado otro método para determinar N_A, el número de Avogadro.

El cuanto de energía

La justificación teórica original de Planck de la ecuación 3.9 es más bien abstracta, ya que implica razonamientos basados en la entropía, la mecánica estadística y varios teoremas, demostrados previamente por Planck, relacionados con la materia y la radiación en equilibrio.[6] Aunque aquí se presentarán razonamientos más fáciles de visualizar físicamente, se espera transmitir el espíritu y el impacto revolucionario del trabajo original de Planck.

Planck estaba convencido de que la radiación de cuerpo negro era producto de cargas eléctricas submicroscópicas en vibración, que denominó resonadores. Supuso que las paredes de una cavidad luminosa estaban constituidas literalmente por billones de estos resonadores (cuya naturaleza exacta se desconocía entonces), todos vibrando con frecuencias diferentes. Por tanto, según Maxwell, cada oscilador debía emitir radiación con una frecuencia correspondiente a su frecuencia de vibración. **También, según la teoría clásica de Maxwell, un oscilador de frecuencia f podría tener cualquier valor de energía y cambiar su amplitud de manera continua a medida que radiase cualquier fracción de su energía.** Es aquí donde Planck planteó su revolucionaria idea. A fin de asegurarse que se coincidiera con los experimentos, **Planck debió suponer que la energía total de un resonador con frecuencia mecánica f sólo podía ser un múltiplo entero de hf, o bien,**

$$E_{\text{resonador}} = nhf \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.10}$$

donde h es una constante fundamental de la física cuántica, $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J·s, conocida como constante de Planck. Además, concluyó que se emitía radiación de frecuencia f cuando un resonador caía al siguiente estado energético más bajo. *Por tanto, el resonador puede cambiar su energía sólo por la diferencia ΔE, según*

$$\Delta E = hf \tag{3.11}$$

Es decir, no puede perder cualquier cantidad de su energía total, sino sólo una cantidad finita, hf, denominada cuanto de energía. En la figura 3.9 se muestran los niveles de energía cuantizados y las transiciones permitidas propuestas por Planck.

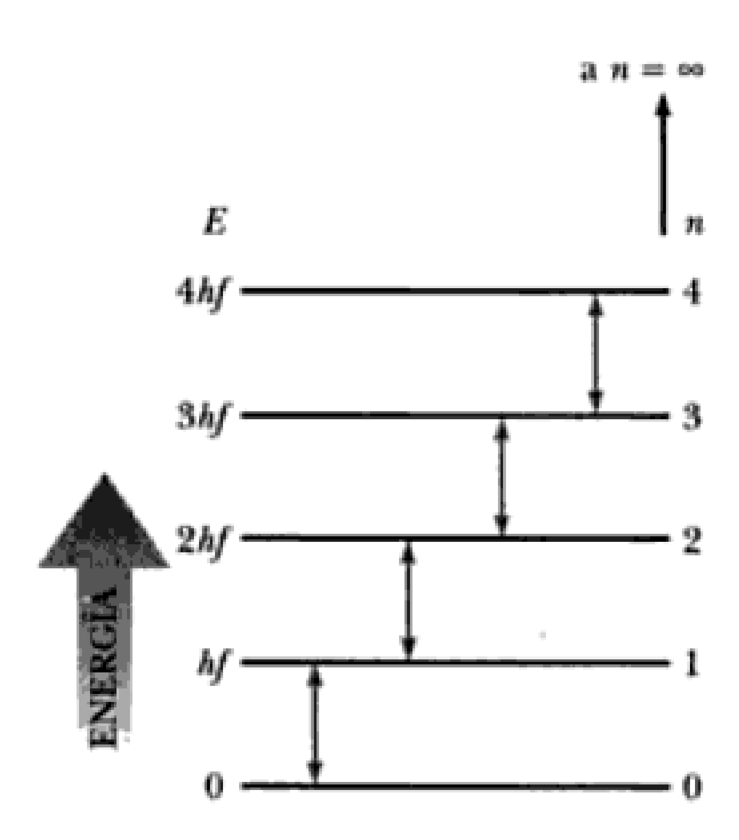


Figura 3.9 Niveles de energía permitidos para un oscilador con frecuencia f según la hipótesis original de Planck. Las transiciones permitidas están indicadas por las flechas con dos puntas.

[6]M. Planck, *Ann. Physik*, 4:553, 1901.

EJEMPLO 3.2 Un oscilador cuántico *versus* un oscilador clásico

Considere las implicaciones de la conjetura de Planck en el sentido de que *todos* los sistemas oscilatorios de frecuencia natural f poseen energías discretas permitidas, $E = nhf$, y que el mínimo cambio en la energía del sistema está dado por $\Delta E = hf$.

a) Primero compare un oscilador atómico que emite luz de 540 nm (verde) con uno que emite luz de 700 nm (roja), calculando el cambio mínimo de energía de cada uno. Para el cuanto verde,

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{verde}} &= hf = \frac{hc}{\lambda}\\ &= \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(3 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{540 \times 10^{-9}\ \text{m}}\\ &= 3.68 \times 10^{-9}\ \text{J}\end{aligned}$$

En realidad, el joule es una unidad de energía demasiado grande para describir procesos atómicos; una unidad de energía más apropiada es el electrón-volt (eV), el cual considera a la carga del electrón como su unidad de carga. Por definición, un electrón acelerado a través de una diferencia de potencial de 1 volt posee una energía de 1 eV. Un electrón-volt puede convertirse a joules al observar que

$$\begin{aligned}E &= V\cdot q = 1\ \text{eV} = (1.602 \times 10^{-19}\ \text{C})(1\ \text{J/C})\\ &= 1.602 \times 10^{-19}\ \text{J}\end{aligned}$$

También es de utilidad contar con expresiones para h y hc en términos de electrón-volts. Éstas son

$$\begin{aligned}h &= 4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s}\\ hc &= 1.240 \times 10^{-6}\ \text{eV}\cdot\text{m} = 1240\ \text{eV}\cdot\text{nm}\end{aligned}$$

Volviendo al ejemplo, se observa que el cambio mínimo de energía de un oscilador atómico que emite luz verde es

$$\Delta E_{\text{verde}} = \frac{3.68 \times 10^{-19}\ \text{J}}{1.602 \times 10^{-19}\ \text{J/eV}} = 2.30\ \text{eV}$$

Para el cuanto rojo, el cambio mínimo de energía es

$$\begin{aligned}\Delta E_{\text{rojo}} &= \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(3 \times 10^{8}\ \text{m/s})}{700 \times 10^{-9}\ \text{m}}\\ &= 2.84 \times 10^{-19}\ \text{J} = 1.77\ \text{eV}\end{aligned}$$

Observe que la mínima cantidad permitida o "cuanto" de energía no es el mismo en todas las condiciones, como sí lo es en cambio el cuanto de carga: el cuanto de energía es proporcional a la frecuencia natural del oscilador. Advierta, también, una frecuencia alta de los osciladores atómicos da lugar a un cuanto de energía mensurable de varios electrón-volts.

b) Ahora considere un péndulo con una longitud de $\ell = 1$ m que experimenta una pequeña oscilación. Según la teoría clásica, si existe fricción del aire, la amplitud de la oscilación y, en consecuencia, la energía decrecen *de manera continua* con el tiempo, como se muestra en la figura 3.10a. En realidad, *todos* los sistemas que vibran con frecuencia f están cuantizados (según la ecuación 3.10) y pierden energía en paquetes discretos o cuantos, hf. Esto debería conducir a una disminución escalonada de la energía del péndulo, como se muestra en la figura 3.10b. Demostraremos que no hay contradicción entre la teoría cuántica y el comportamiento observado de los péndulos y resortes de laboratorio.

Un cambio de energía de un cuanto corresponde a

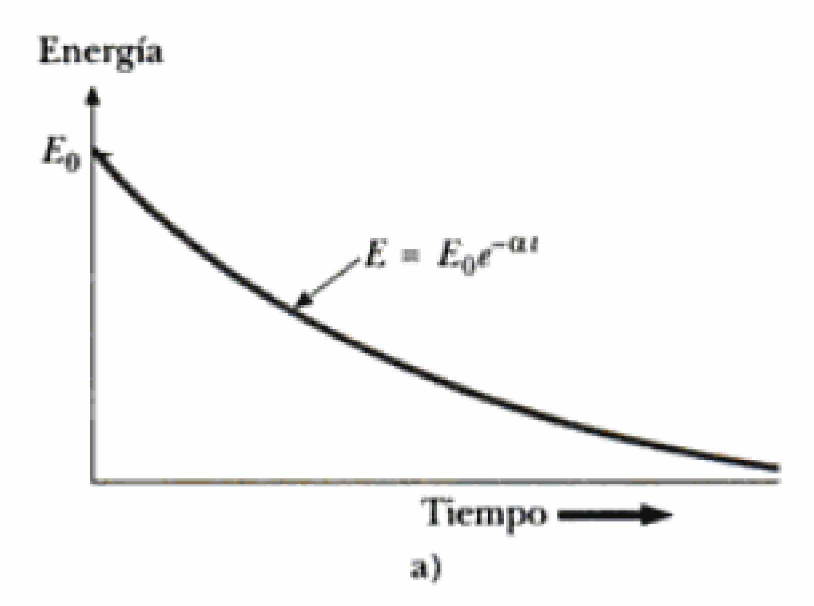
$$\Delta E = hf$$

donde la frecuencia del péndulo es

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell}} = 0.50\ \text{Hz}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\Delta E &= (6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(0.50\ \text{s}^{-1})\\ &= 3.3 \times 10^{-34}\ \text{J}\\ &= 2.1 \times 10^{-15}\ \text{eV}\end{aligned}$$



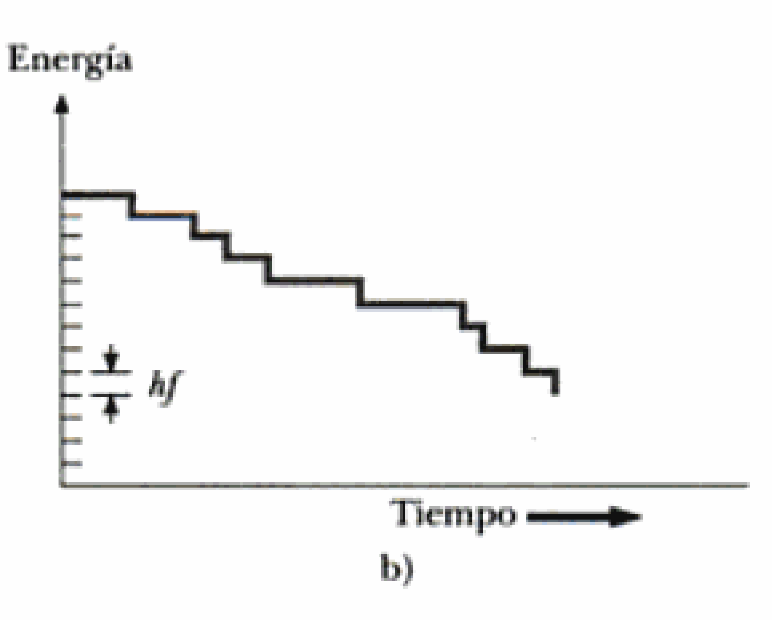


Figura 3.10 (Ejemplo 3.2) a) Comportamiento clásico observado de un péndulo. b) Comportamiento cuántico predicho para un péndulo.

Debido a que la energía total de un péndulo de masa m y longitud ℓ que se desplaza un ángulo θ es

$$E = \text{mg}\ell(1 - \cos\theta)$$

entonces, para un péndulo típico con $m = 100$ g, $\ell = 1$ m y $\theta = 10^{\circ}$ se tiene

$$E = (0.10\text{ kg})(9.8\text{ m/s}^2)(1.0\text{ m})(1 - \cos 10^{\circ}) = 0.015\text{ J}$$

En consecuencia, la razón, $\Delta E/E$, es extremadamente pequeño:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{3.3 \times 10^{-34}\text{ J}}{1.5 \times 10^{-2}\text{ J}} = 2.2 \times 10^{-32}$$

Observe que la cuantización de energía de grandes sistemas que vibran pasa desapercibida debido a sus bajas frecuencias en comparación con las altas frecuencias de los osciladores atómicos. Por tanto, no existe contradicción entre el postulado cuántico de Planck y el comportamiento de osciladores macroscópicos.

Ejercicio 2 Calcule el número cuántico, n, para este péndulo con $E = 1.5 \times 10^{-2}$ J.

Respuesta 4.6×10^{31}

Ejercicio 3 Un objeto de masa m en un resorte de rigidez k oscila con una amplitud A con respecto a su posición en equilibrio. Suponga que $m = 300$ g, $k = 10$ N/m, y $A = 10$ cm. a). Encuentre la energía total. b) Encuentre la frecuencia de vibración mecánica de la masa. c) Calcule el cambio en amplitud cuando el sistema pierde un cuanto de energía.

Respuesta a) $E_{\text{total}} = 0.050$ J; b) $f = 0.92$ Hz; c) $\Delta E_{\text{cuántica}} = 6.1 \times 10^{-34}$ J, tanto que

$$\Delta A \approx -\frac{\Delta E}{\sqrt{2Ek}} = -6.1 \times 10^{-34}\text{ m}$$

Hasta ahora, la atención se ha centrado en las extraordinarias propiedades cuánticas de osciladores simples con frecuencia f. Planck explicó el espectro continuo del cuerpo negro al suponer que las paredes calientes contenían resonadores que vibraban a muchas frecuencias diferentes, cada uno emitiendo con una frecuencia igual a su frecuencia de vibración. Al considerar las condiciones que condujeron al equilibrio entre los resonadores de la pared y la radiación en la cavidad del cuerpo negro, pudo demostrar que la densidad de energía espectral $u(f, T)$ podía expresarse como el producto del número de osciladores, cuya frecuencia estaba entre f y $f + df$, denotado como $N(f)\,df$, y la energía media emitida por cada oscilador, $\overline{E}$. Así, se tiene el resultado importante

$$u(f, T)\,df = \overline{E}N(f)\,df \tag{3.12}$$

Además, Planck demostró que el número de osciladores con frecuencia entre f y $f + df$ era proporcional a f^2, o bien,

$$N(f)\,df = \frac{8\pi f^2}{c^3}\,df \tag{3.13}$$

(Para más detalles al respecto, vea el apéndice 1 de nuestro sitio en la red, en http://info.brookscole.com/mp3e.)

Al sustituir la ecuación 3.13 en la ecuación 3.12 se obtiene

$$u(f, T)\,df = \overline{E}\,\frac{8\pi f^2}{c^3}\,df \tag{3.14}$$

Este resultado muestra que la densidad de energía espectral es proporcional al producto de la frecuencia al cuadrado y la energía promedio del oscilador. También, como $u(f, T)$ tiende a cero a frecuencias altas (vea la figura 3.5), $\overline{E}$ debe tender a cero a frecuencias altas más rápidamente que $1/f^2$. El que la energía promedio del oscilador deba volverse extremadamente pequeña cuando la frecuencia se hace alta guió a Planck en el desarrollo de su teoría. En la siguiente sección se verá que el hecho de que $\overline{E}$ no se volviera pequeña a frecuencias altas en la teoría clásica de Rayleigh-Jeans condujo a la "catástrofe ultravioleta": la predicción de una densidad de energía espectral infinita a frecuencias altas en la región ultravioleta.

OPCIONAL

3.3 LEY DE RAYLEIGH-JEANS Y LEY DE PLANCK

Ley de Rayleigh-Jeans

Tanto la ley de Planck como la ley de Rayleigh-Jeans (la teoría clásica de la radiación de cuerpo negro planteada por Lord Rayleigh, John William Strutt, 1842-1919, físico inglés, y James Jeans, 1887-1946, astrónomo y físico inglés) pueden deducirse utilizando la idea de que la energía de la radiación de cuerpo negro por unidad de volumen con frecuencia entre f y $f + df$ puede expresarse como el producto del número de osciladores por unidad de volumen en este intervalo de frecuencia y la energía promedio por oscilador:

$$u(f, T)\,df = \overline{E}\,N(f)\,df \tag{3.12}$$

Resulta útil realizar los cálculos tanto de Rayleigh-Jeans como de Planck para ver el efecto sobre $u(f, T)$ al calcular $\overline{E}$ a partir de una distribución *continua* de energías clásicas para los osciladores (Rayleigh-Jeans) en oposición a un conjunto *discreto* de energías cuánticas (Planck). Primero se aborda la deducción de Lord Rayleigh porque se trata de un cálculo clásico más directo.

Mientras Planck se concentraba en el equilibrio térmico de la radiación en la cavidad con las cargas eléctricas oscilando en las paredes de ésta, Rayleigh se enfocaba directamente en las ondas electromagnéticas en el interior de la cavidad. Rayleigh y Jeans cloncluyeron que, en la cavidad, las ondas electromagnéticas estacionarias podían tener una temperatura T, ya que intercambiaban energía de manera constante con las paredes, provocando que el interior de la cavidad alcanzara la misma temperatura que las paredes. Además, consideraron que una onda electromagnética estacionaria polarizada era equivalente a un oscilador unidimensional (figura 3.11). Usando la misma idea general que Planck, expresaron la densidad de energía como un producto del número de ondas estacionarias (osciladores) y la energía promedio por oscilador. Encontraron que la energía promedio por oscilador $\overline{E}$ era independiente de la frecuencia e igual a $k_B T$ a partir de la ley de distribución de Maxwell-Boltzmann (vea el capítulo 10). Según esta ley de distribución, la probabilidad P de encontrar un sistema individual (como una molécula o un oscilador atómico) con energía E superior a alguna energía mínima, E_0, en un gran grupo de sistemas a temperatura T está dada por

$$P(E) = P_0 e^{-(E-E_0)/k_B T} \tag{3.15}$$

donde P_0 es la probabilidad de que un sistema tenga la energía mínima. En el caso de un conjunto *discreto* de energías permitidas, la energía promedio, $\overline{E}$, está dada por

$$\overline{E} = \frac{\Sigma E \cdot P(E)}{\Sigma P(E)} \tag{3.16}$$

donde la división entre la sumatoria en el denominador sirve para normalizar la probabilidad total a 1. *En el caso clásico considerado por Rayleigh,* un oscilador podía poseer

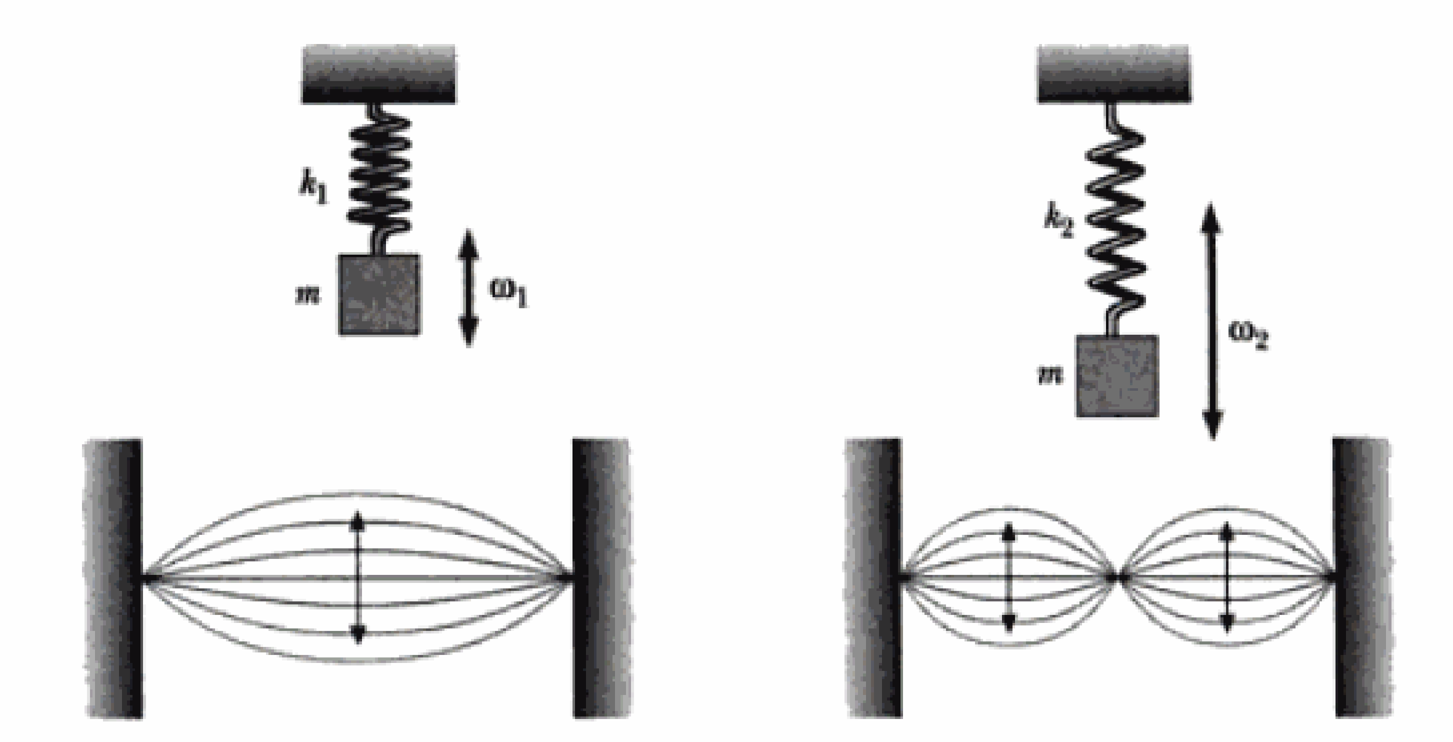


Figura 3.11 Un oscilador armónico unidimensional es equivalente a una onda estacionaria electromagnética plana polarizada.

cualquier energía E en un intervalo continuo desde 0 hasta ∞. Así, las sumatorias en la ecuación 3.16 deben sustituirse por integrales, y la expresión para $\overline{E}$ se convierte en

$$\overline{E} = \frac{\int_0^\infty E e^{-E/k_\mathrm{B}T} dE}{\int_0^\infty e^{-E/k_\mathrm{B}T}\, dE} = k_\mathrm{B}T$$

El cálculo de $N(f)$ es algo más complicado, pero es importante aquí, así como en el modelo de electrones libres en los metales. En el apéndice 1 de nuestro sitio en la red se proporciona la deducción de la densidad de modos, $N(f)\,df$. Se encuentra

$$N(f)\,df = \frac{8\pi f^2}{c^3}\,df \tag{3.45}$$

o bien, en términos de la longitud de onda,

$$N(\lambda)\,d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}\,d\lambda \tag{3.46}$$

La densidad de energía espectral es simplemente la densidad de modos multiplicada por $k_\mathrm{B}T$, o bien,

Densidad de ondas paradas en una cavidad

$$u(f, T)\,df = \frac{8\pi f^2}{c^3}\,k_\mathrm{B}T\,df \tag{3.17}$$

En términos de la longitud de onda,

Ley de cuerpo negro de Rayleigh–Jeans

$$u(\lambda, T)\,d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}\,k_\mathrm{B}T\,d\lambda \tag{3.18}$$

Sin embargo, como puede observarse en la figura 3.12, esta expresión clásica, conocida como ley de Rayleigh-Jeans, no coincide con los resultados experimentales en la región de longitudes de onda cortas. La ecuación 3.18 diverge cuando $\lambda \to 0$, lo que pronostica una emisión infinita de energía en la región ultravioleta, a lo que se denominó "catástrofe ultravioleta". Es obligatorio concluir que la teoría clásica fracasa notablemente al tratar de explicar la radiación de cuerpo negro.

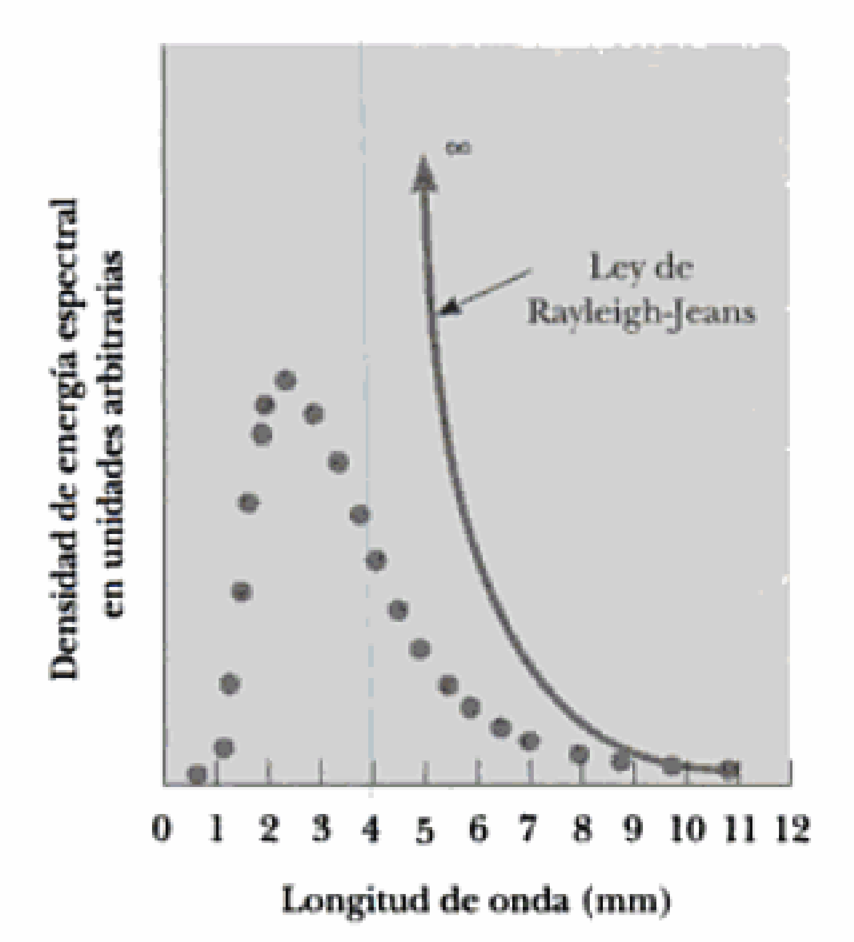


Figura 3.12 El fracaso de la ley clásica de Rayleigh-Jeans (ecuación 3.18) para ajustar el espectro observado de un cuerpo negro calentado a 1 000 K.

Ley de Planck

Como ya se mencionó, Planck se concentró en los estados energéticos de los resonadores en las paredes de la cavidad y usó la condición de que éstos y la radiación de la cavidad estaban en equilibrio para determinar la distribución espectral de la radiación. Con un razonamiento termodinámico (y aparentemente sin estar al tanto de la deducción de Rayleigh), llegó a la misma expresión para $N(f)$ que él. No obstante, Planck encontró una forma distinta para $\overline{E}$ al permitir sólo valores discretos de energía para sus resonadores. Usando la ley de distribución de Maxwell-Boltzmann, dedujo

$$\overline{E} = \frac{hf}{e^{hf/k_B T} - 1} \tag{3.19}$$

(Para la deducción de $\overline{E}$ de Planck, vea la página en la red del libro en http://info.-brookscole.com/mp3e.)

Al multiplicar $\overline{E}$ por $N(f)$, se obtiene la fórmula de la distribución de Planck:

$$u(f, T)\,df = \frac{8\pi f^2}{c^3}\left(\frac{hf}{e^{hf/k_B T} - 1}\right) df \tag{3.9}$$

Ley de cuerpo negro de Planck

o bien, en términos de la longitud de onda, λ,

$$u(\lambda, T)\,d\lambda = \frac{8\pi hc\,d\lambda}{\lambda^5(e^{hc/\lambda k_B T} - 1)} \tag{3.20}$$

La ecuación 3.9 muestra que se ha evitado la catástrofe ultravioleta ya que el término $\overline{E}$ domina al término f^2 a frecuencias altas. Puede entenderse cualitativamente por qué $\overline{E}$ tiende a cero para frecuencias altas si se observa que el primer nivel permitido del oscilador (hf) es muy grande para f grande en comparación con la energía térmica promedio disponible ($k_B T$), por lo que la ley de Boltzmann pronostica una probabilidad casi igual a cero de que el primer estado excitado se encuentre ocupado.

En resumen, Planck llegó a su fórmula de cuerpo negro, estableciendo dos hipótesis sorprendentes: 1) la energía de un oscilador cargado de frecuencia f está

limitada a valores discretos nhf y 2) durante la emisión o absorción de luz, el cambio en energía de un oscilador es hf. Pero Planck era el "revolucionario reacio". A partir de casi toda la correspondencia inicial de Planck se obtiene la impresión de que su concepto de cuantización de la energía era en realidad un recurso desesperado de cálculo y, además, válido sólo en el caso de la radiación de cuerpo negro. Quedó para el gran Albert Einstein, el popular icono de la física del siglo XX, elevar la cuantización al nivel de un fenómeno universal al demostrar que la luz en sí misma estaba cuantizada.

EJEMPLO 3.3 Deducción de la ley de Stefan a partir de la distribución de Planck

En este ejemplo se demuestra que la fórmula de la distribución espectral de Planck conduce a la ley de Stefan, observada experimentalmente para la radiación total emitida por un cuerpo negro a todas las longitudes de onda,

$$e_{\text{total}} = 5.67 \times 10^{-8}\ T^4\ \text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$$

Solución Debido a que la ley de Stefan es una expresión para la potencia total por unidad de área radiada a todas las longitudes de onda, es necesario integrar sobre λ la expresión para $u(\lambda, T)\,d\lambda$, dada por la ecuación 3.20, y usar la ecuación 3.7 para la conexión entre la densidad de energía en el interior de la cavidad del cuerpo negro y la potencia emitida por unidad de área de superficie de éste. Se encuentra

$$e_{\text{total}} = \frac{c}{4}\int_0^\infty u(\lambda, T)\,d\lambda = \int_0^\infty \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5(e^{hc/\lambda k_BT}-1)}\,d\lambda$$

Si se hace el cambio de variable $x = hc/\lambda k_BT$, la integral toma una forma que suele encontrarse en tablas:

$$e_{\text{total}} = \frac{2\pi k_B^4T^4}{c^2h^3}\int_0^\infty \frac{x^3}{(e^x-1)}\,dx$$

Al usar

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{(e^x-1)}\,dx = \frac{\pi^4}{15}$$

Se encuentra

$$e_{\text{total}} = \frac{2\pi^5k_B^4}{15c^2h^3}\,T^4 = \sigma T^4$$

Por último, al sustituir k_B, c y h, se tiene

$$\sigma = \frac{(2)(3.141)^5(1.381\times10^{-23}\,\text{J/K})^4}{(15)\,(2.998\times10^8\,\text{m/s})^2\,(6.626\times10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})^3}$$
$$= 5.67\times10^{-8}\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$$

Ejercicio 4 Demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5(e^{hc/\lambda k_BT}-1)}\,d\lambda = \frac{2\pi k_B^4T^4}{h^3c^2}\int_{x=0}^\infty \frac{x^3}{(e^x-1)}\,dx$$

3.4 CUANTIZACIÓN DE LA LUZ Y EFECTO FOTOELÉCTRICO

En 1905 ocurrió el siguiente desarrollo más importante en la física cuántica. Ese año fue increíble para el "voluntarioso revolucionario" Albert Einstein (figura 3.13), ya que escribió tres artículos inmortales sobre tres temas distintos, cada uno innovador y merecedor del premio Nobel. Los tres artículos contenían nuevos resultados equilibrados, simétricos y unificadores logrados a partir de procedimientos matemáticos sencillos, sobrios, depurados y lógicos. En el primer artículo, titulado "A Heuristic[7] Point of View About the Generation

[7]Un razonamiento heurístico es aquél que sea plausible y esclarecedor, aunque no esté rigurosamente justificado.

and Transformation of Light", planteó la teoría de los cuantos de luz y explicó el efecto fotoeléctrico.[8] El segundo artículo se tituló "On the Motion of Particles Suspended in Liquids as Required by the Molecular-Kinetic Theory of Heat". Ahí explicaba el movimiento browniano y proporcionaba pruebas sólidas de la existencia de los átomos.[9] El tercer artículo, quizá el más famoso, contenía la invención de la teoría especial de la relatividad[10] y se titulaba "On the Electrodynamics of Moving Bodies". Resulta interesante observar que, cuando Einstein fue galardonado con el premio Nobel en 1922, la Academia Sueca consideró como su mayor contribución a la física la teoría del efecto fotoeléctrico. ¡No mencionó para nada su teoría de la relatividad!



Figura 3.13 Imagen de Albert Einstein divirtiéndose en su bicicleta. La fotografía fue tomada en 1933 en Santa Barbara. (*California Institute of Technology Archives.*)

Ahora centraremos nuestra atención en el artículo concerniente a los cuantos de luz, donde Einstein desafió los éxitos de la teoría clásica ondulatoria de la luz de Maxwell. Aquí, identificó una inconsistencia entre la cuantización de los osciladores en las paredes del cuerpo negro de Planck y la insistencia de éste en que la radiación de la cavidad constaba de ondas electromagnéticas clásicas. Al demostrar que el cambio en la entropía de la radiación del cuerpo negro era como el cambio en la entropía de un gas ideal integrado por partículas independientes, Einstein llegó a la conclusión de que la luz misma estaba constituida por "granos", cantidades finitas irreducibles, o cuantos de energía.[11] Además, afirmó que la luz que interactúa con la materia también consta de cuantos, y precisó las implicaciones para los procesos fotoeléctrico y fotoquímico. Su explicación del efecto fotoeléctrico demuestra de manera convincente que la luz consta de paquetes de energía, que describiremos más adelante con mayor detalle. Primero, no obstante, es necesario considerar las principales características experimentales del efecto fotoeléctrico y el fracaso de la teoría clásica para explicarlo.

Como ya se observó, Hertz fue el primero en establecer que las superficies metálicas limpias emiten cargas cuando se exponen a la luz ultravioleta. En 1888, Halwachs descubrió que las cargas emitidas eran negativas, y en 1899 J. J. Thomson demostró que las cargas emitidas eran electrones, que hoy en día denominamos fotoelectrones. Esto lo logró al medir la razón entre carga y masa de las partículas producidas por luz ultravioleta y aún pudo medir e por separado mediante la técnica de la cámara de niebla (vea el capítulo 4).

El último descubrimiento crucial antes de la explicación de Einstein lo realizó en 1902 Philip Lenard, quien estaba estudiando el efecto fotoeléctrico con fuentes de luz intensas de arco de carbono. Descubrió que se emiten electrones del metal con un intervalo de velocidades y que la energía cinética máxima de los fotoelectrones, $K_{máx}$, *no depende* de la *intensidad* de la luz incidente. Aunque no pudo establecer la relación exacta, Lenard también indicó que $K_{máx}$ aumenta con la *frecuencia* de la luz. En la figura 3.14 se muestra un aparato típico utili-

[8] A. Einstein, *Ann. Physik*, 17:132, 1905 (marzo).

[9] A. Einstein, *Ann. Physik*, 17:549, 1905 (mayo).

[10] A. Einstein, *Ann. Physik*, 17:891, 1905 (junio).

[11] Einstein, como Planck antes que él, se replegó en la incuestionable solidez de la termodinámica y de la mecánica estadística para obtener sus resultados revolucionarios. En la época era bien conocido que la probabilidad, W, de que n átomos gaseosos independientes estén en un volumen parcial V de un volumen más grande V_0 es $(V/V_0)^n$. Einstein demostró que luz con una frecuencia f y una energía total E encerrada en una cavidad cumple una ley idéntica, donde en este caso W es la probabilidad de que toda la radiación esté en el volumen parcial y $n = E/hf$.

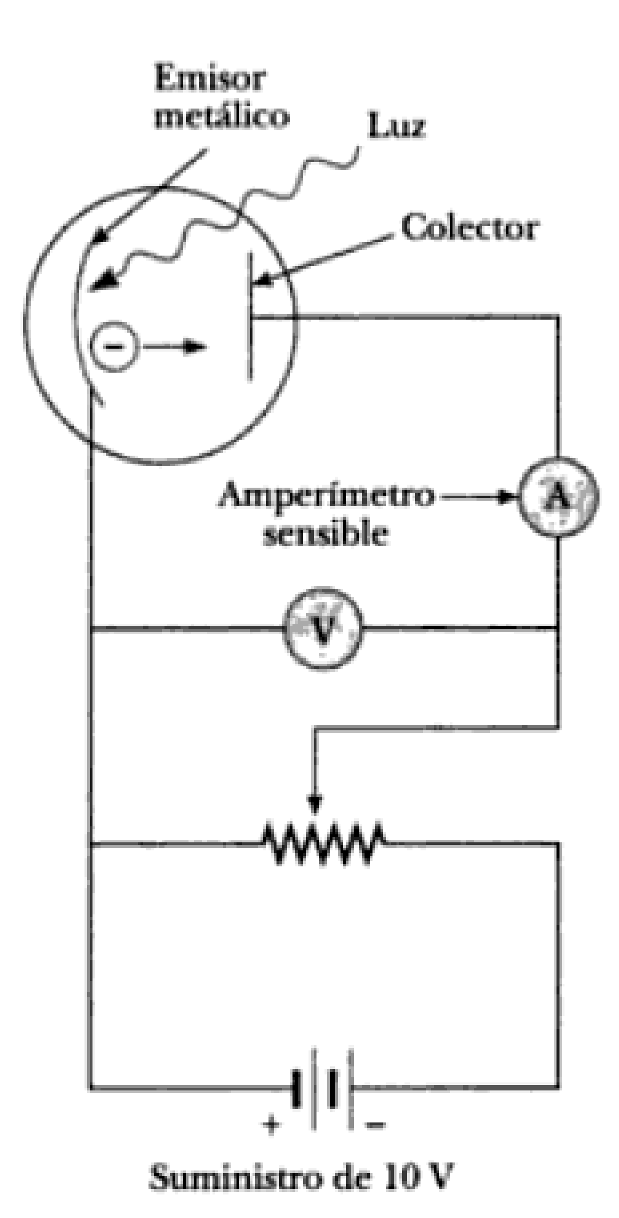


Figura 3.14 Aparato para medir el efecto fotoeléctrico.

zado para medir la energía cinética máxima de los fotoelectrones. $K_{máx}$ se mide con facilidad aplicando un voltaje de retardo y aumentándolo gradualmente hasta que los electrones más energéticos se detienen y la fotocorriente se anula. En ese punto,

$$K_{máx} = \frac{1}{2}m_e v_{máx}^2 = eV_s \tag{3.21}$$

donde m_e es la masa del electrón, $v_{máx}$ es su velocidad máxima, e es la carga eléctrica y V_s el voltaje de frenado. En la figura 3.15a se presenta una gráfica como las que encontró Lenard; en ella se ilustra que $K_{máx}$ o V_s es independiente de la intensidad de la luz, I. Desde el punto de vista clásico era de esperarse el aumento en la corriente (o número de electrones por segundo) con el incremento en la intensidad de la luz que se muestra en la figura 3.15a , lo cual podía explicarse. No obstante, el que $K_{máx}$ *no dependa de la intensidad* era completamente inesperado.

También, otros dos resultados experimentales eran completamente inesperados desde el punto de vista clásico. Uno era *la dependencia lineal de* $K_{máx}$ *con respecto a la frecuencia de la luz*, que se muestra en la figura 3.15b. Observe que la figura 3.15b también muestra la existencia de una frecuencia de corte, f_0, debajo de la cual no se emiten fotoelectrones. (En realidad, desde el punto de vista clásico se espera que exista una energía mínima denominada *función trabajo*, ϕ, que está asociada con la energía de enlace de un electrón en un metal. La existencia de una barrera de energía que retiene los electrones en un sólido resulta evidente a partir del hecho de que los electrones no son emitidos de manera espontánea desde un metal en el vacío, sino que se requieren altas temperaturas o luz incidente para suministrar una energía igual a ϕ y provocar la emisión.) El otro resultado interesante, imposible de explicar desde el punto de vista clásico, es que *no hay retraso temporal entre el instante en que se procede a iluminar la placa metálica de la iluminación y el instante en que se establece la fotocorriente.* Se ha demostrado que si existe un retraso temporal, éste es menor que 10^{-9} s. En resumen, como se muestra en detalle en el siguiente ejemplo, la teoría electromagnética clásica presenta dificultades fundamentales para explicar la independencia de $K_{máx}$ y la intensidad de la luz, la dependencia lineal de $K_{máx}$ con respecto a la frecuencia de la luz, y la respuesta instantánea de la fotocorriente.

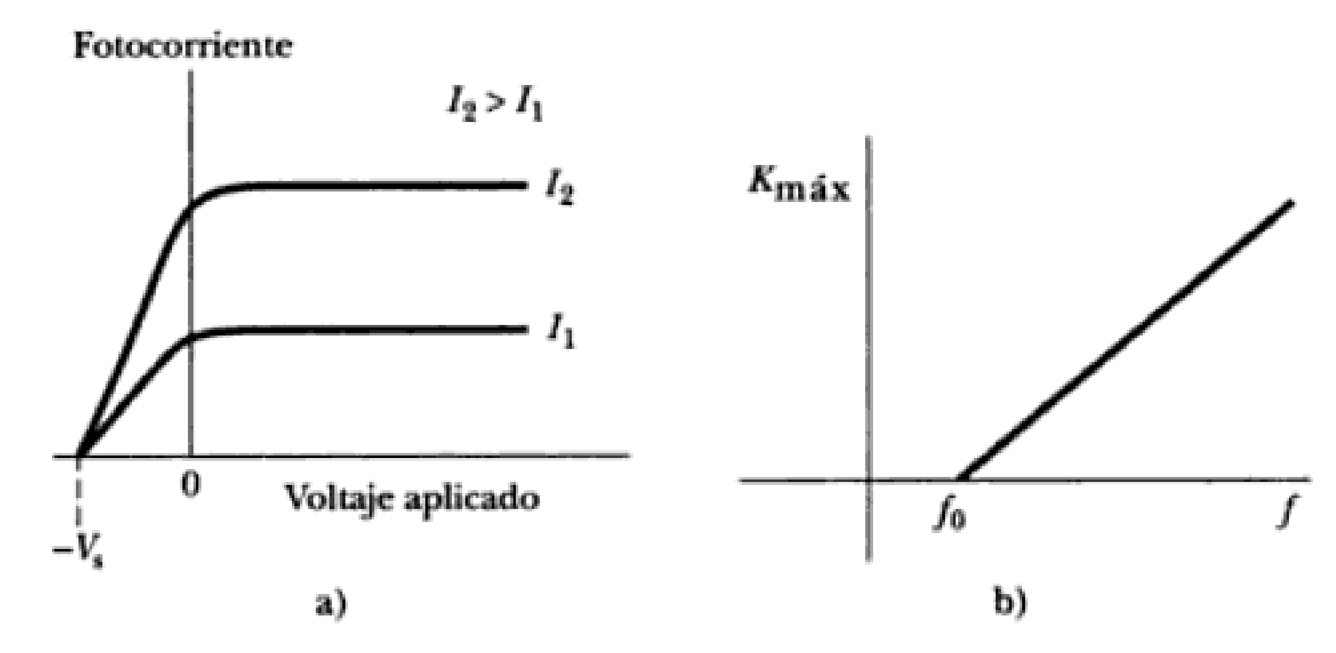


Figura 3.15 a) Gráfica de la fotocorriente contra el voltaje aplicado que muestra que $K_{máx}$ es independiente de la intensidad de la luz I para luz de frecuencia fija. b) Gráfica que muestra la dependencia de $K_{máx}$ con la frecuencia de la luz.

EJEMPLO 3.4 Maxwell recibe una buena lección

Para un caso típico de fotoemisión del sodio, demuestre que *la teoría clásica* predice que a) $K_{máx}$ depende de la intensidad de la luz incidente, I, b) $K_{máx}$ no depende de la frecuencia de la luz incidente, y c) hay un gran retraso temporal entre que se inicia a iluminar y el inicio de la fotocorriente. La función trabajo para el sodio es $\phi = 2.28$ eV y una potencia absorbida por unidad de área de 1×10^{-7} mW/cm^2 produce una fotocorriente men-surable en el sodio.

Solución a) *Según la teoría clásica, en una onda de luz la energía se distribuye de manera uniforme y continua sobre el frente de onda.* Suponiendo que toda la absorción de la luz ocurre en la capa atómica superior del metal, que cada átomo absorbe una cantidad igual de energía proporcional al área de su sección transversal, A, y que cada átomo de alguna manera canaliza esta energía a uno de sus electrones, se encuentra que en el tiempo t cada electrón absorbe una energía K dada por

$$K = CIAt$$

donde C es una fracción que indica si tiene menos del 100% de absorción de la luz. Debido a que los electrones más energéticos son retenidos en el metal por una barrera superficial de energía o función trabajo ϕ, estos electrones serán emitidos con $K_{máx}$ una vez que hayan absorbido suficiente energía para superar la barrera ϕ. Lo anterior puede expresarse como

$$K_{máx} = CIAt - \phi \tag{3.22}$$

Así, la teoría clásica predice que, para un periodo fijo de absorción, t, a bajas intensidades de luz cuando $CIAt < \phi$, no debe emitirse ningún electrón. A intensidades más altas, cuando $CIAt > \phi$, los electrones deben emitirse con energías cinéticas mayores, mientras más alta sea la intensidad de la luz. En consecuencia, las predicciones de la teoría clásica contradicen los resultados experimentales tanto a intensidades muy altas como a intensidades muy bajas.

b) Según la teoría clásica, *la intensidad de una onda de luz es proporcional al cuadrado de la amplitud del campo eléctrico,* E_0^2, y es esta amplitud del campo eléctrico la que aumenta con el incremento de la intensidad e imparte aceleración y energía cinética crecientes a un electrón. Al sustituir I con una cantidad proporcional a E_0^2 en la ecuación 3.22 se demuestra que $K_{máx}$ no debe depender en absoluto de la frecuencia de la onda de luz clásica, lo que contradice otra vez los resultados experimentales.

c) Para estimar el retraso temporal entre el inicio de la iluminación y la emisión de electrones, se supone que un electrón debe acumular justamente la cantidad suficiente de energía luminosa para superar la función trabajo. Al hacer $K_{máx} = 0$ en la ecuación 3.22 se obtiene

$$0 = CIAt - \phi$$

o bien

$$t = \frac{\phi}{CIA} = \frac{\phi}{IA}$$

en el supuesto de que I es la intensidad absorbida. Como se proporcionan ϕ e I, para calcular el tiempo se requiere A, el área de la sección transversal de un átomo. Como un estimado de A simplemente se usa $A = \pi r^2$, donde r es un radio atómico típico. Al tomar $r = 1 \times 10^{-8}$ cm, se encuentra $A = \pi \times 10^{-16}$ cm^2. Finalmente, al sustituir este valor en la expresión para t, se obtiene

$$t = \frac{2.28 \text{ eV} \times 1.60 \times 10^{-16} \text{ mJ/eV}}{(10^{-7} \text{ mJ/s}\cdot\text{cm}^2)(\pi \times 10^{-16} \text{ cm}^2)}$$
$$= 1.2 \times 10^7 \text{ s} \approx 130 \text{ días}$$

Así, se observa que el cálculo clásico del retraso temporal para la fotoemisión no coincide con el resultado experimental, ¡por un factor de 10^{16}!

Ejercicio 5 ¿Por qué las curvas *I-V* de la figura 3.15a aumentan gradualmente entre $-V_s$ y 0?; es decir, ¿por qué no ascienden abruptamente en $-V_s$? ¿Qué información estadística acerca de los electrones de conducción en el interior del metal está presente en la pendiente de la curva *I-V*?

La explicación de Einstein al desconcertante efecto fotoeléctrico fue brillante tanto por el tema en que se enfocó como por lo que omitió. Por ejemplo, Einstein subrayó que la teoría clásica de Maxwell había sido enormemente exitosa al describir la propagación de la luz por el espacio *durante largos intervalos de tiempo*, pero que se necesitaría una teoría diferente para describir las *interacciones momentáneas* de la luz y la materia, como en el caso de la emisión de luz por osciladores o la transformación de la energía luminosa en energía cinética del electrón en el efecto fotoeléctrico. También se centró solamente en el aspecto energético de la luz y evitó proponer modelos o mecanismos relacionados con la conversión del cuanto de energía luminosa en energía cinética del

Tabla 3.1 Funciones trabajo de metales selectos

Metal	Función trabajo, ϕ, (en eV)
Na	2.28
Al	4.08
Cu	4.70
Zn	4.31
Ag	4.73
Pt	6.35
Pb	4.14
Fe	4.50

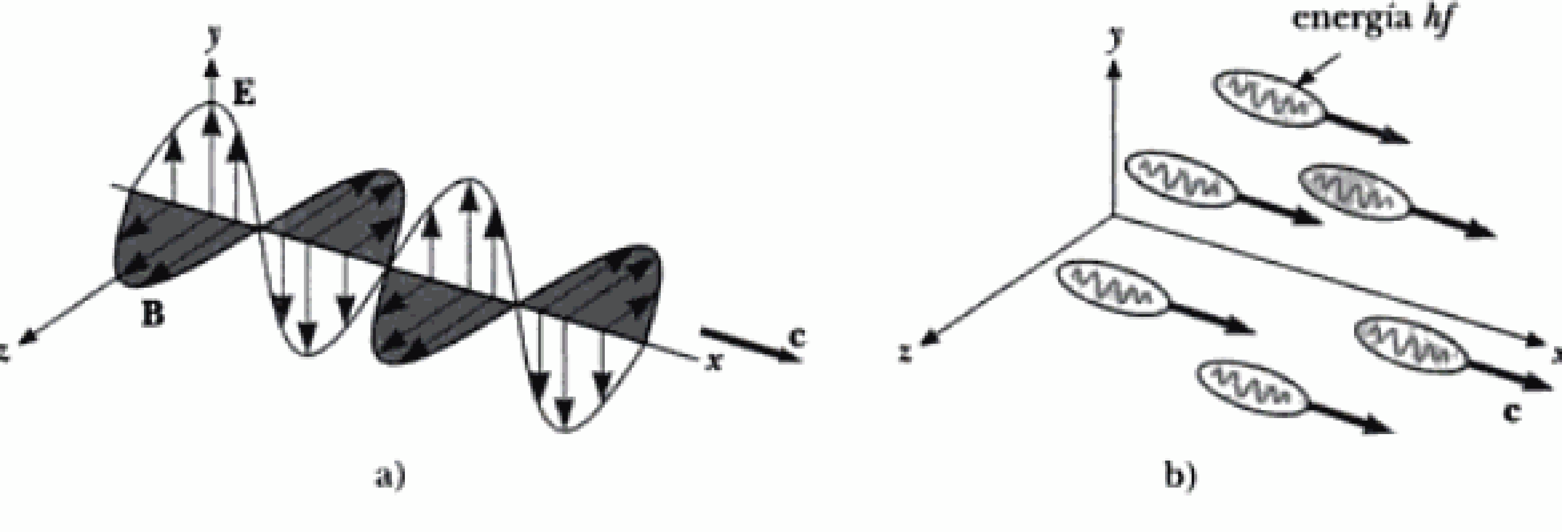


Figura 3.16 a) Vista clásica de una onda de luz viajera. b) Representación corpuscular gráfica de Einstein de una "onda de luz viajera".

Teoría de Einstein del efecto fotoeléctrico

electrón. Brevemente, introdujo sólo las ideas necesarias para explicar el efecto fotoeléctrico. **Sostuvo que la energía de la luz no se distribuye de manera uniforme sobre el frente de onda clásico, sino que se concentra en regiones discretas (o "atados"), denominados cuantos, cada uno de los cuales contiene una energía, hf.** Una imagen sugerente, que no debe tomarse en forma demasiado literal, se muestra en la figura 3.61b. La idea de Einstein era que un cuanto de luz estaba tan localizado que proporcionaba toda su energía, hf, directamente a un sólo electrón en el metal. En consecuencia, según Einstein, la energía cinética máxima para electrones emitidos es

$$K_{\text{máx}} = hf - \phi \tag{3.23}$$

donde ϕ es la función trabajo del metal, que corresponde a la energía mínima con la que un electrón se enlaza en el metal. En la tabla 3.1 se enumeran los valores de la función trabajo medidas para diferentes metales.

La ecuación 3.23 explicaba elegantemente la desconcertante independencia de $K_{\text{máx}}$ y la intensidad descubierta por Lenard. Para una frecuencia de luz fija f, un aumento en la intensidad de la luz significa más fotones y más fotoelectrones por segundo, aunque $K_{\text{máx}}$ permanece sin cambio, según la ecuación 3.23. Además, la ecuación 3.23 explicaba el fenómeno de la frecuencia de corte. Luz con la frecuencia de corte f_0, que tiene justo la energía suficiente para expulsar un electrón de la superficie del metal, hace que el electrón sea liberado con energía cinética cero. Al hacer $K_{\text{máx}} = 0$ en la ecuación 3.23 se obtiene

$$f_0 = \frac{\phi}{h} \tag{3.24}$$



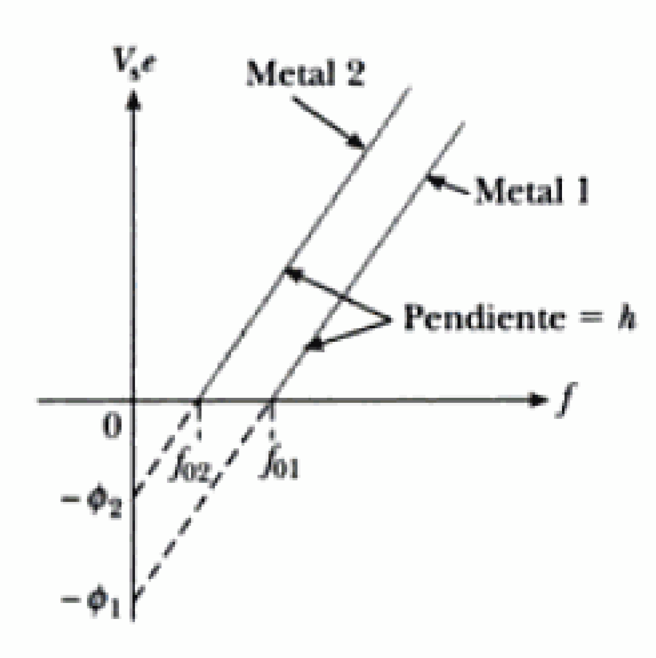


Figura 3.17 Características universales de todos los metales que experimentan el efecto fotoeléctrico.

Así, el cambio en la frecuencia de corte para metales diferentes se debe al cambio en la función trabajo. Observe que luz con $f < f_0$ no posee energía suficiente para liberar un electrón. En consecuencia, para $f < f_0$, la fotocorriente es igual a cero.

En cualquier teoría no sólo se buscan explicaciones de resultados previamente observados, sino también nuevas predicciones. En efecto, este era el caso aquí, ya que la ecuación 3.23 predecía el resultado (nuevo en 1905) de que $K_{\text{máx}}$ debía cambiar linealmente con f para cualquier material y que la pendiente de la gráfica de $K_{\text{máx}}$ contra f debía conducir a la constante universal h (vea la figura 3.17). En 1916, el físico estadounidense Robert Millikan (1868–1953)

reportó datos de mediciones fotoeléctricas que le permitieron probar la relación lineal entre $K_{máx}$ y f y determinar h con una precisión aproximada de 0.5%.[12]

EJEMPLO 3.5 Efecto fotoeléctrico en el zinc

Philip Lenard determinó que los fotoelectrones liberados del zinc por rayos ultravioleta podían ser detenidos utilizando un voltaje de 4.3 V. Encuentre $K_{máx}$ y $v_{máx}$ para estos electrones.

Solución

$$K_{máx} = eV_s = (1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})(4.3\ \text{V}) = 6.9 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

Para encontrar $v_{máx}$, el trabajo realizado por el campo eléctrico se hace igual al cambio en la energía cinética del electrón para obtener

$$\tfrac{1}{2}m_e v_{máx}^2 = eV_s$$

o bien

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{2eV_s}{m_e}} = \sqrt{\frac{2(6.9 \times 10^{-19}\ \text{J})}{9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg}}} = 1.2 \times 10^6\ \text{m/s}$$

En consecuencia, un electrón de 4.3 V es bastante energético y se mueve a una velocidad aproximada de un millón de metros por segundo. Observe, sin embargo, que esta cifra sigue siendo apenas alrededor de 0.4% la velocidad de la luz, por lo que en este caso los efectos relativistas son despreciables.

EJEMPLO 3.6 Efecto fotoeléctrico para el hierro

Suponga que luz con una intensidad total de $1\mu\text{W/cm}^2$ incide sobre una muestra limpia de hierro con un área de 1 cm^2. Suponga que la muestra de hierro refleja el 96% de la luz y que sólo el 3% de la energía absorbida está en la región violeta del espectro por arriba de la frecuencia de corte.

a) ¿Qué intensidad está realmente disponible para el efecto fotoeléctrico?

Debido a que sólo 4% de la energía incidente es absorbida y sólo 3% es capaz de producir fotoelectrones, la intensidad disponible es

$$I = (0.030)(0.040)I_0 = (0.030)(0.040)(1\ \mu\text{W/cm}^2) = 1.2\text{nW/cm}^2$$

b) Suponiendo que todos los fotones en la región violeta poseen una longitud de onda efectiva igual a 250 nm, ¿cuántos electrones serán emitidos por segundo?

Para una eficiencia del 100%, un fotón de energía hf, producirá un electrón, de modo que

Número de electrones/s

$$= \frac{1.2 \times 10^{-9}\ \text{W}}{hf} = \frac{\lambda(1.2 \times 10^{-9})}{hc} = \frac{(250 \times 10^{-9}\ \text{m})(1.2 \times 10^{-9}\ \text{J/s})}{(6.6 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(3 \times 10^8\ \text{m/s})} = 1.5 \times 10^9$$

c) Calcule la corriente en el fototubo en Amperes.

$$i = (1.6 \times 10^{-19}\ \text{C})(1.5 \times 10^9\ \text{electrones/s}) = 2.4 \times 10^{-10}\ \text{A}$$

Para detectar esta pequeña corriente se requiere un electrómetro sensible.

d) Si la frecuencia de corte es $f_0 = 1.1 \times 10^{15}$ Hz, encuentre la función trabajo, ϕ, para el hierro.

A partir de la ecuación 3.24 se tiene

$$\phi = hf_0 = (4.14 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(1.1 \times 10^{15}\ \text{s}^{-1}) = 4.5\ \text{eV}$$

e) Encuentre el voltaje de frenado para el hierro si luz con $\lambda = 250$ nm produce fotoelectrones.

A partir de la ecuación fotoeléctrica,

$$eV_s = hf - \phi = \frac{hc}{\lambda} - \phi = \frac{(4.14 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(3 \times 10^8\ \text{m/s})}{250 \times 10^{-9}\ \text{m}} - 4.5\ \text{eV} = 0.46\ \text{eV}$$

Así, el voltaje de frenado es 0.46 V.

[12] R. A. Millikan, *Phys. Rev.*, 7:355, 1916. Algunas de las dificultades experimentales en el efecto fotoeléctrico fueron la falta de fuentes monocromáticas de luz ultravioleta intensas, fotocorrientes pequeñas y grandes efectos de superficies metálicas ásperas e impuras sobre f_0 y $K_{máx}$. Millikan evitó inteligentemente estas dificultades utilizando cátodos de metal alcalinos, que son sensibles en el intervalo visible hasta aproximadamente 600 nm (lo que hizo posible utilizar las intensas líneas visibles del arco de mercurio), y maquilando nuevas superficies alcalinas en tanto la muestra metálica se mantenía al alto vacío. También, cuando el emisor y el colector del fototubo son de metales diferentes, la función trabajo ϕ determinada a partir de gráficas de V_s contra f es realmente la del colector. Consulte el trabajo de J. Rudnick y D. S. Tannhauser, AJP 44, 796, 1976.

3.5 EFECTO COMPTON Y RAYOS X

Aunque Einstein introdujo desde 1905 el concepto de que la luz está constituida de cuantos puntuales de *energía*, no abordó directamente la *cantidad de movimiento* que transporta la luz sino hasta 1906. Ese año, en un artículo que trataba sobre un gas molecular en equilibrio térmico con radiación electromagnética (¡otra vez la mecánica estadística!), Einstein concluyó que un cuanto de luz de energía E viaja en una sola dirección (a diferencia de una onda esférica) y transporta una cantidad de movimiento, dirigida a lo largo de su línea de movimiento, de E/c, o hf/c. En sus propias palabras, "si un haz de radiación provoca que una molécula emita o absorba un paquete de energía hf, entonces se transfiere a la molécula un momentum igual a hf/c, dirigido a lo largo de la línea de movimiento del haz, en la absorción y que se opone a la línea de movimiento del haz en la emisión".

Después de desarrollar la primera justificación teórica de la cantidad de movimiento, o mementum, del fotón, y tratar el efecto fotoeléctrico mucho antes, es curioso que Einstein no continuara más con el tratamiento del momentum del fotón. El tratamiento teórico de las colisiones fotón-partícula debió esperar la perspicacia de Peter Debye (1884-1966, fisicoquímico holandés) y Arthur Holly Compton (1892-1962, físico estadounidense). En 1923, ambos se dieron cuenta de manera independiente que la dispersión de fotones de rayos X a partir de electrones podía explicarse al considerar a los fotones como partículas puntuales con energía hf y cantidad de movimiento hf/c, y al conservar la energía y la cantidad de movimiento relativistas del par fotón-electrón en una colisión.[13, 14] Este extraordinario desarrollo completó la representación corpuscular de la luz al demostrar que los fotones, además de transportar energía, hf, transportan cantidad de movimiento, hf/c, y se dispersan como partículas. Antes de abordar esto con mayor detalle, presentamos una breve introducción al importante tema de los rayos X.

Rayos X

Estos rayos fueron descubiertos en 1895 por el físico alemán Wilhelm Roentgen, quien encontró que un haz de electrones a alta velocidad incidiendo en un metal producía un nuevo tipo de radiación extremadamente penetrante (figura 3.18). Unos cuantos meses después del descubrimiento de Roentgen se tomaron las primeras fotografías médicas con rayos X, y algunos años después resultó evidente que se trataban de ondas electromagnéticas semejantes a la luz, pero con longitudes de onda extremadamente cortas y con un gran poder de penetración (vea la figura 3.19). Las primeras estimaciones obtenidas a partir de la difracción de rayos X a través de una estrecha ranura mostraron que las longitudes de onda de los rayos X medían aproximadamente 10^{-10} m, lo cual es del mismo orden de magnitud que la separación atómica en los cristales. Debido a que las mejores retículas graduadas en forma artificial de la época tenían separaciones de 10^{-7} m, Max von Laue en Alemania y William Henry Bragg y William Lawrence Bragg (un equipo de padre e hijo) en Inglaterra sugirieron el empleo de cristales simples, como la calcita, como retículas naturales tridimensionales, donde la retícula graduada sería la disposición atómica periódica en los cristales.

Un método particularmente sencillo para analizar la dispersión de rayos X a partir de planos paralelos de cristal fue propuesto por W. L. Bragg en 1912.

[13]P. Debye, *Phys. Zeitschr.*, 24:161, 1923. En este artículo, Debye agradece el trabajo pionero de Einstein sobre la naturaleza cuántica de la luz.

[14]A. H. Compton, *Phys. Rev.*, 21:484, 1923.

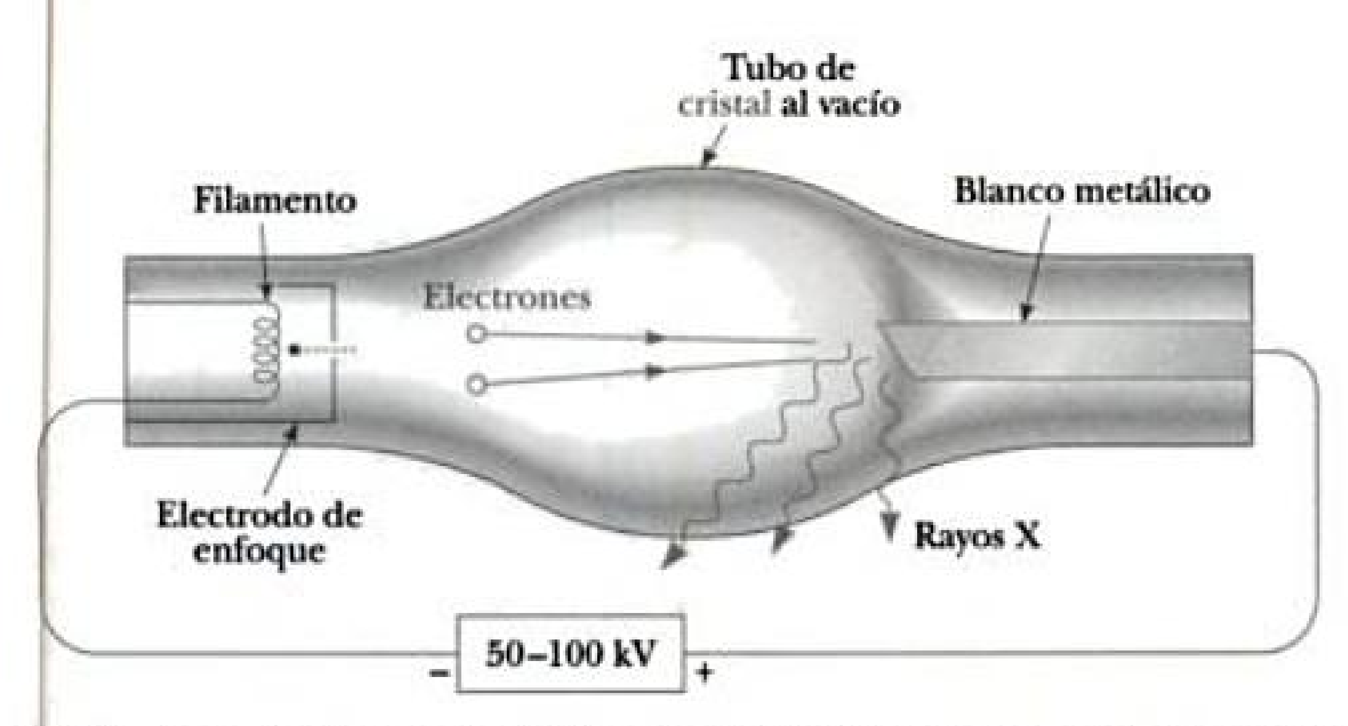
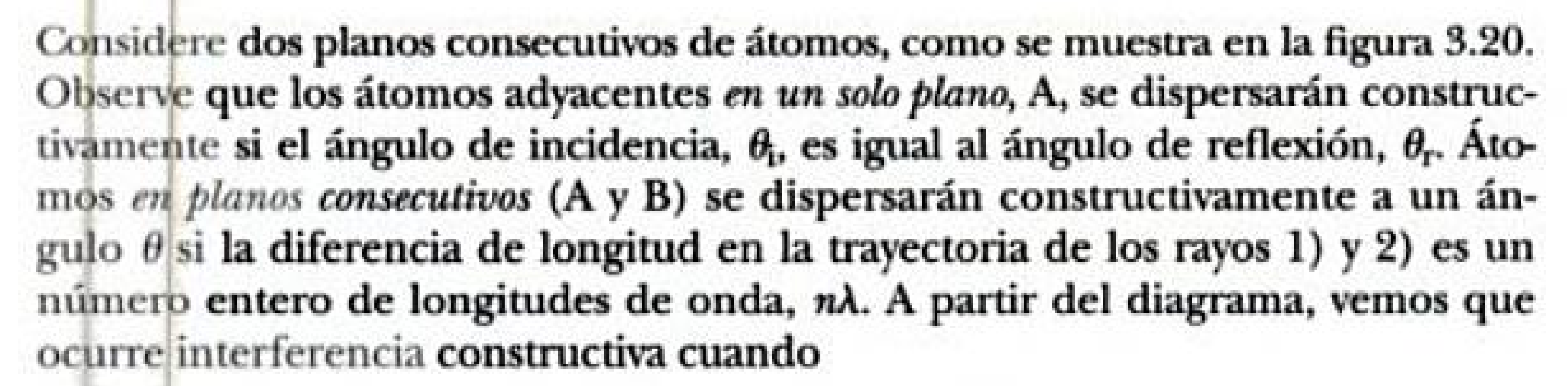


Figura 3.18 Los rayos X son producidos por el bombardeo de un blanco metálico (comúnmente cobre, tungsteno y molibdeno) con electrones energéticos cuyas energías van de 50 hasta 100 keV.



Figura 3.19 Una de las primeras imágenes logradas por Roentgen usando rayos X (22 de diciembre de 1895).



Considere dos planos consecutivos de átomos, como se muestra en la figura 3.20. Observe que los átomos adyacentes *en un solo plano*, A, se dispersarán constructivamente si el ángulo de incidencia, θ_i, es igual al ángulo de reflexión, θ_r. Átomos *en planos consecutivos* (A y B) se dispersarán constructivamente a un ángulo θ si la diferencia de longitud en la trayectoria de los rayos 1) y 2) es un número entero de longitudes de onda, $n\lambda$. A partir del diagrama, vemos que ocurre interferencia constructiva cuando

$$AB + BC = n\lambda \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

y como $AB = BC = d \operatorname{sen} \theta$, se concluye que

$$n\lambda = 2d \operatorname{sen} \theta \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.25a}$$

Ecuación de Bragg

donde n es el orden del máximo de intensidad, λ es la longitud de onda del rayo X, d es la distancia entre planos y θ es el ángulo del máximo de intensidad medido desde el plano A. Observe que hay varios máximos a ángulos diferentes para d y λ fijos, correspondientes a $n = 1, 2, 3, \ldots$ La ecuación 3.25a se conoce como ecuación de Bragg, y fue utilizada con gran éxito por los Bragg para determinar las posiciones atómicas en los cristales. En la figura 3.21a se muestra un diagrama de un espectrómetro de rayos X de Bragg. El

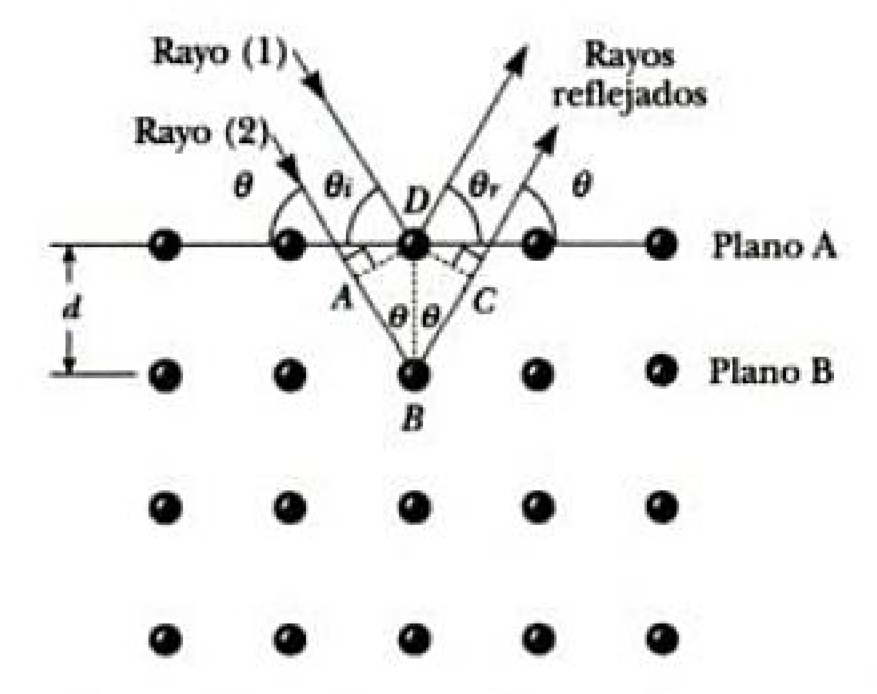
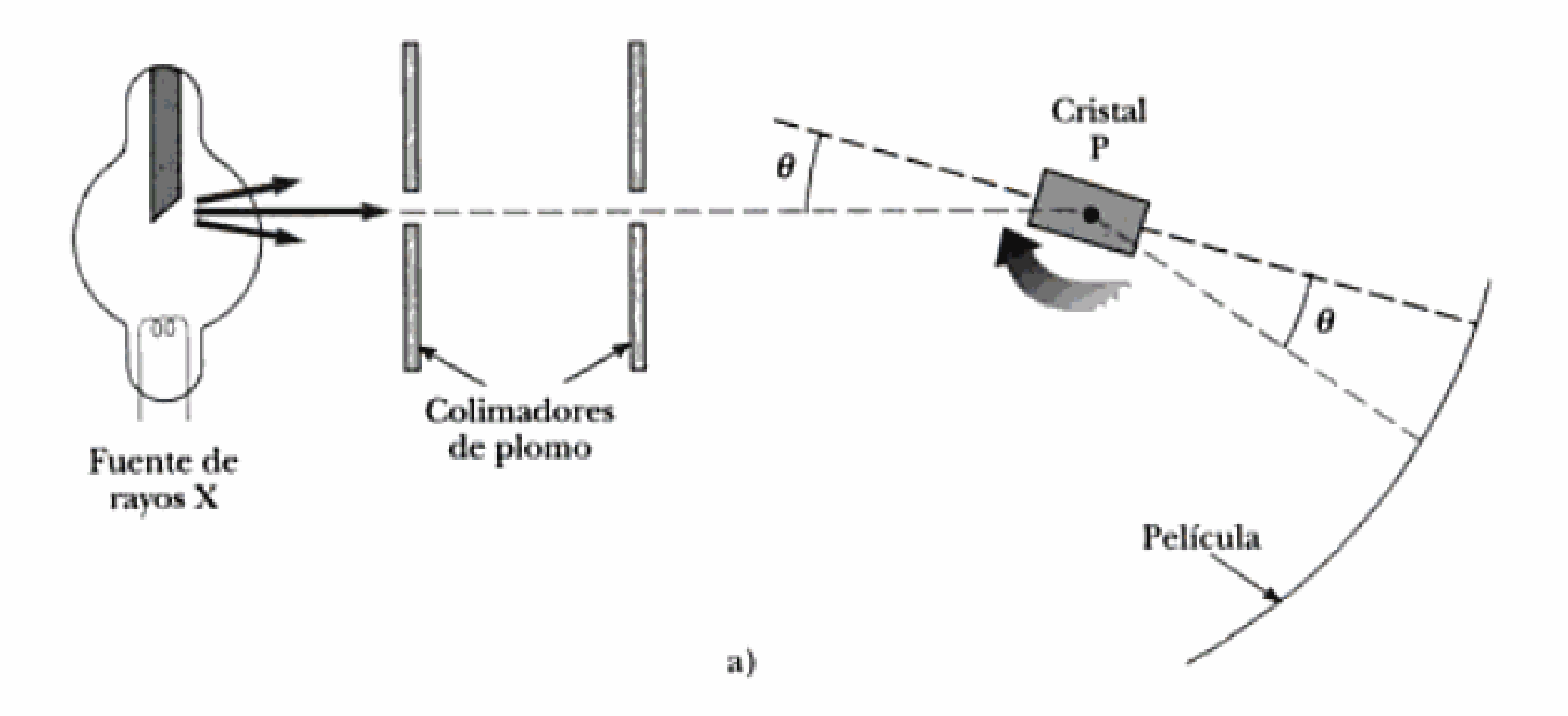


Figura 3.20 Dispersión de Bragg de rayos X por planos consecutivos de átomos. Ocurre interferencia constructiva cuando *ABC* es igual a un número entero de longitudes de onda.



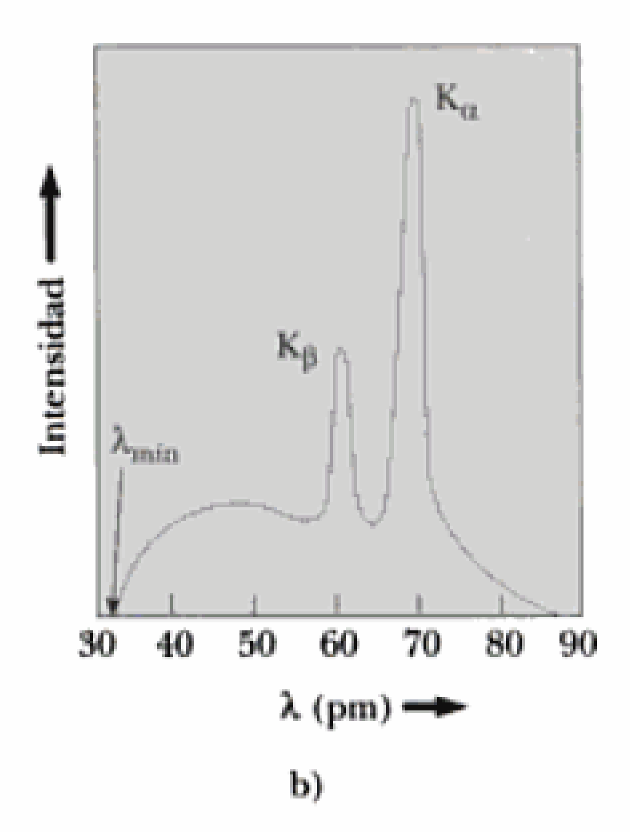


Figura 3.21 a) Espectrómetro de cristal de rayos X de Bragg. El cristal se hace girar alrededor de un eje que pasa por *P*. b) El espectro de rayos X de un blanco metálico consta de un amplio espectro continuo más un número de líneas definidas, que se deben a los rayos X característicos. Las que se muestran fueron obtenidas al bombardear un blanco de molibdeno con electrones de 35 keV. Observe que 1 pm = 10^{-12} m = 10^{-3} nm.

cristal se hace girar lentamente hasta que se observa una reflexión intensa, lo cual significa que la ecuación 3.25a es válida. Si se conoce λ, es posible calcular d y, a partir de la serie de valores d encontrados, es posible determinar la estructura del cristal. (Vea el problema 38.) Si las mediciones se realizan con un cristal con d conocida, entonces es posible determinar la intensidad en función de la longitud de onda de los rayos X y puede analizarse el espectro de emisión de rayos X.

El espectro de emisión de rayos X producido por un metal objetivo bombardeado por electrones es interesante de por sí y se muestra en la figura 3.21b. Aunque la teoría electromagnética clásica explica bien el amplio espectro continuo, una característica de la figura 3.21b, $\lambda_{mín}$, constituye una prueba de la teoría corpuscular. El amplio espectro continuo de rayos X que se muestra en la figura 3.21b resulta de la dispersión indirecta de los electrones con los átomos de metal. En tales colisiones sólo una parte de la energía de los electrones se transforma en radiación electromagnética. Esta radiación se denomina *bremsstrahlung* (palabra alemana que significa radiación de frenado), y

se refiere a la radiación emitida por cualquier partícula cargada cuando se frena. Se encuentra que la mínima longitud de onda de los rayos X, $\lambda_{\text{mín}}$, es independiente de la composición del blanco y que sólo depende del voltaje del tubo, V. Esto puede explicarse si se le atribuye al caso de una colisión frontal electrón-átomo, en donde toda la energía cinética del electrón incidente se convierte en energía electromagnética en forma de un sólo fotón de rayos X. Para este caso se tiene

$$eV = hf = \frac{hc}{\lambda_{\text{mín}}}$$

o bien,

$$\lambda_{\text{mín}} = \frac{hc}{eV} \tag{3.26}$$

donde V es el voltaje del tubo de rayos X.

En el espectro continuo, se observan líneas definidas de rayos X identificadas por K_α y K_β, que son como líneas definidas emitidas en el espectro visible de luz. Estas líneas dependen de la composición del blanco y son evidencia de los niveles discretos de energía atómica separados por miles de electrón-volts, como se explica en el capítulo 9.

Efecto Compton

Ahora volveremos al año 1922 y a la confirmación experimental realizada por Arthur Holly Compton de que los fotones de rayos X se comportan como partículas con una cantidad de movimiento hf/c. Durante algún tiempo antes de 1922, Compton y sus colaboradores habían acumulado evidencias para mostrar que la teoría ondulatoria clásica no explicaba con éxito la dispersión de rayos X por electrones libres. En particular, la teoría clásica pronosticaba que cualquier radiación incidente de frecuencia f_0 debía acelerar a un electrón en la dirección de propagación de dicha radiación, lo cual produciría oscilaciones forzadas del electrón y una nueva radiación con frecuencia f', donde $f' \leq f_0$ (vea la figura 3.22a).[15] También, según la teoría clásica, la frecuencia o la longitud de onda de la radiación dispersada debía depender del lapso en que el electrón permanece expuesto a la radiación incidente, así como de la intensidad de ésta.

Imagine la sorpresa cuando Compton demostró experimentalmente que el desplazamiento de la longitud de onda de los rayos X dispersados a un ángulo dado es absolutamente independiente de la intensidad de la radiación y del tiempo de exposición, y que sólo depende del ángulo de dispersión. En la figura 3.22b se muestra el modelo cuántico de la transferencia de cantidad de movimiento y energía entre un fotón individual de rayos X y un electrón. Observe que el modelo cuántico explica con facilidad la frecuencia dispersada f' menor, ya que el fotón incidente proporciona algo de su energía original hf al electrón en retroceso.

En la figura 3.23a se muestra un esquema del aparato usado por Compton. En el experimento original, Compton midió la dependencia de la intensidad de los rayos X dispersados con respecto a la longitud de onda a tres ángulos

[15]Esta disminución en la frecuencia de la onda radiada de nuevo es provocada por un doble corrimiento Doppler; en primer lugar porque el electrón se aleja de la radiación incidente, y en segundo porque el electrón es un radiador móvil, según se observa desde el sistema de referencia fijo en el laboratorio. Consulte D. Bohm, *Quantum Theory*, Upper Saddle River, NJ, Prentice-Hall, 1961, p. 35.

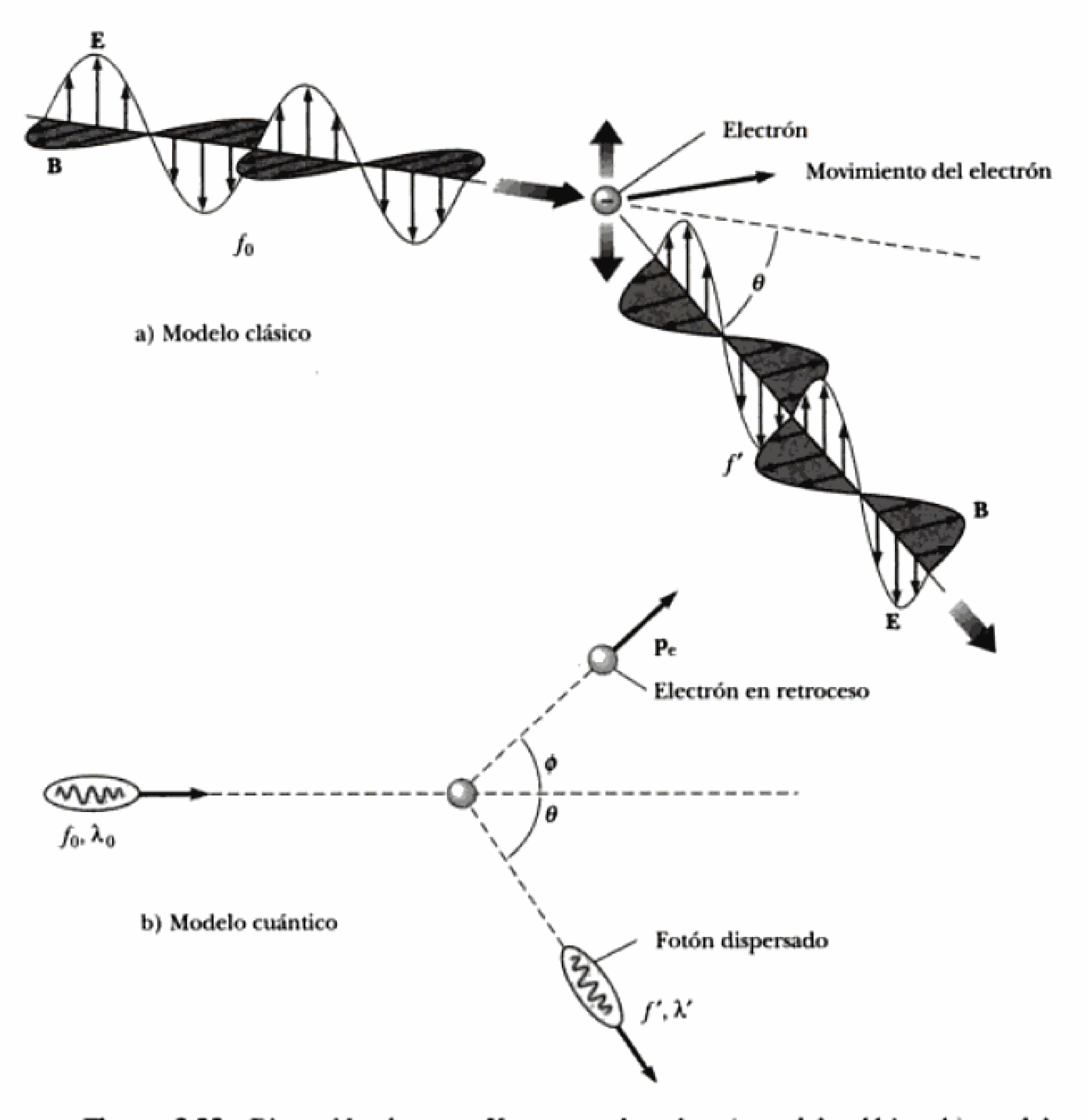
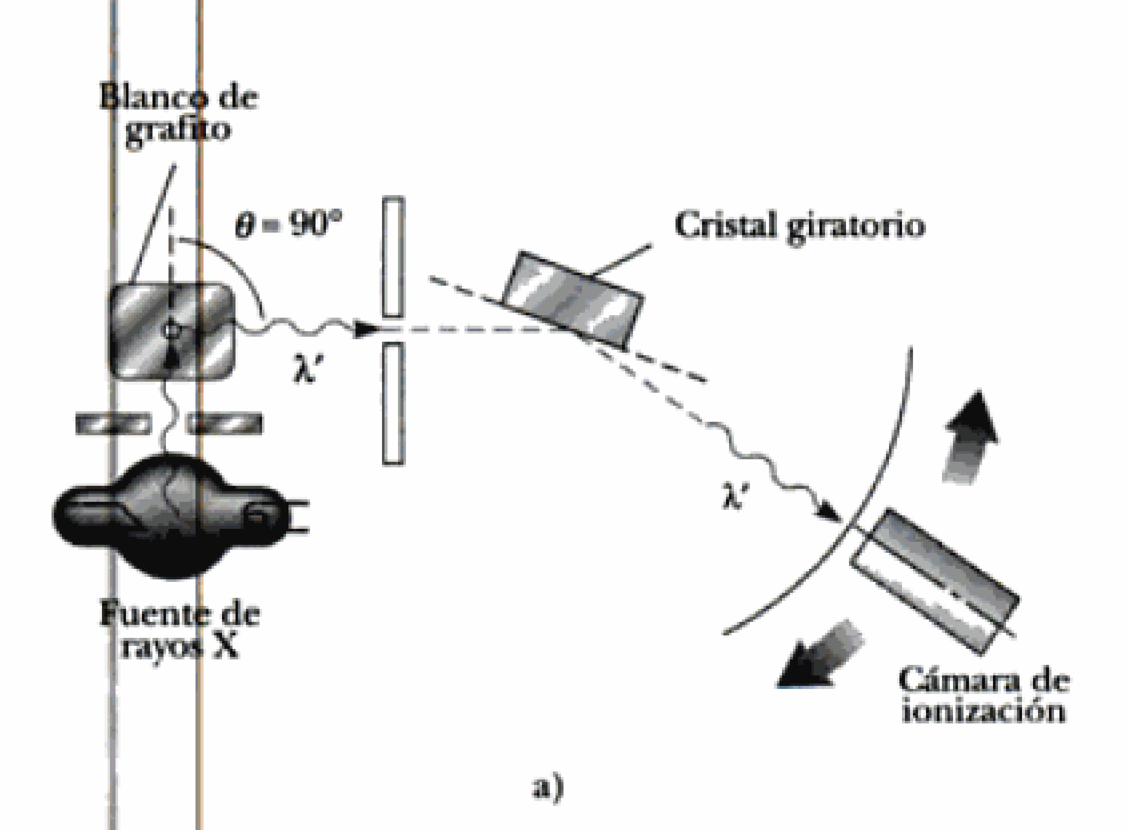


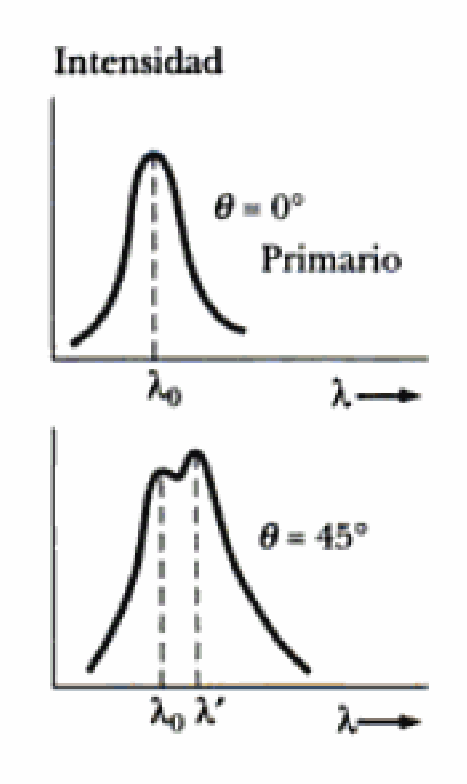
Figura 3.22 Dispersión de rayos X por un electrón: a) modelo clásico, b) modelo cuántico.

de dispersión: 45°, 90° y 135°. La longitud de onda fue medida con un espectrómetro giratorio de cristal, y se determinó la intensidad con una cámara de ionización que generaba una corriente proporcional a la intensidad de los rayos X. El haz incidente estaba constituido por rayos X monocromáticos de longitud de onda $\lambda_0 = 0.71$ Å. Se utilizó un blanco de carbono con número atómico pequeño, $Z = 12$, porque los átomos con Z bajo poseen un mayor porcentaje de electrones débilmente ligados. En la figura 3.23b se muestran las gráficas experimentales de intensidad contra la longitud de onda observadas por Compton para los ángulos de dispersión de 0°, 45°, 90° y 135°. Las gráficas muestran dos picos, uno en λ_0 y otro desplazado a una longitud de onda más larga λ'. El pico desplazado en λ' es causado por la dispersión de los rayos X por electrones casi libres. Suponiendo que los rayos X se comportan como partículas, Compton predijo que λ' depende del ángulo de dispersión según

Efecto Compton

$$\lambda' - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta) \tag{3.27}$$





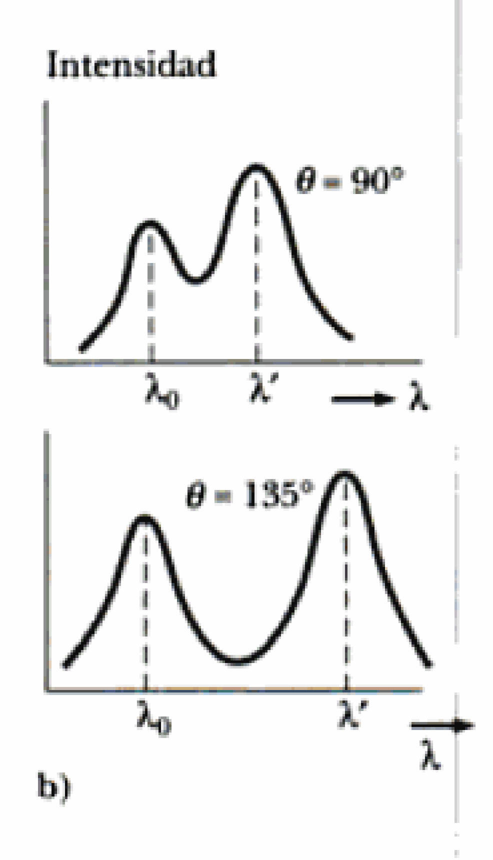


Figura 3.23 a) Diagrama del aparato de Compton. La longitud de onda se midió con un espectrómetro de cristal giratorio usando grafito (carbono) como blanco. La intensidad se determinó por medio de una cámara de ionización móvil que generaba una corriente proporcional a la intensidad del rayo X. b) Intensidad del rayo X dispersado contra la longitud de onda de la dispersión Compton a $\theta = 0°, 45°, 90°$ y $135°$.

donde m_e = masa del electrón; la combinación de las constantes h/m_ec se denomina longitud de onda de Compton del electrón y su valor aceptado en la actualidad es

$$\frac{h}{m_ec} = 0.0243 \text{ Å} = 0.00243 \text{ nm}$$

Las cuidadosas mediciones de Compton confirmaron por completo la dependencia de λ' en ángulo de dispersión θ y determinaron que la longitud de onda de Compton del electrón es igual a 0.0242 Å, lo cual coincide muy bien con su valor aceptado hoy en día. ¡Es justo mencionar que estos resultados fueron los primeros en convencer realmente a la mayoría de los físicos estadounidenses sobre la validez fundamental de la teoría cuántica!

El pico no desplazado en λ_0 en la figura 3.23 se debe a los rayos X dispersados por los electrones fuertemente ligados en los átomos de carbono. Este pico no desplazado puede obtenerse de la ecuación 3.27 si la masa del electrón se sustituye por la masa de un átomo de carbono, que es aproximadamente igual a 23 000 veces la masa de un electrón.

Ahora volveremos a la deducción de la ecuación 3.27 suponiendo que el fotón presenta un comportamiento corpuscular y que choca elásticamente como una bola de billar con un electrón libre que está inicialmente en reposo. En la figura 3.24 se muestra la colisión fotón-electrón para la cual se conservan la energía y la cantidad de movimiento. Debido a que típicamente el electrón retrocede a alta velocidad, la colisión se considera desde el punto de vista relativista. La expresión para la conservación de la energía proporciona

$$E + m_ec^2 = E' + E_e \tag{3.28}$$

Conservación de energía

donde E es la energía del fotón incidente, E' es la energía del fotón dispersado, m_ec^2 es la energía en reposo del electrón y E_e es la energía relativista total del electrón después de la colisión. De manera semejante, a partir de la conservación de la cantidad de movimiento se tiene

$$p = p' \cos\theta + p_e \cos\phi \tag{3.29}$$

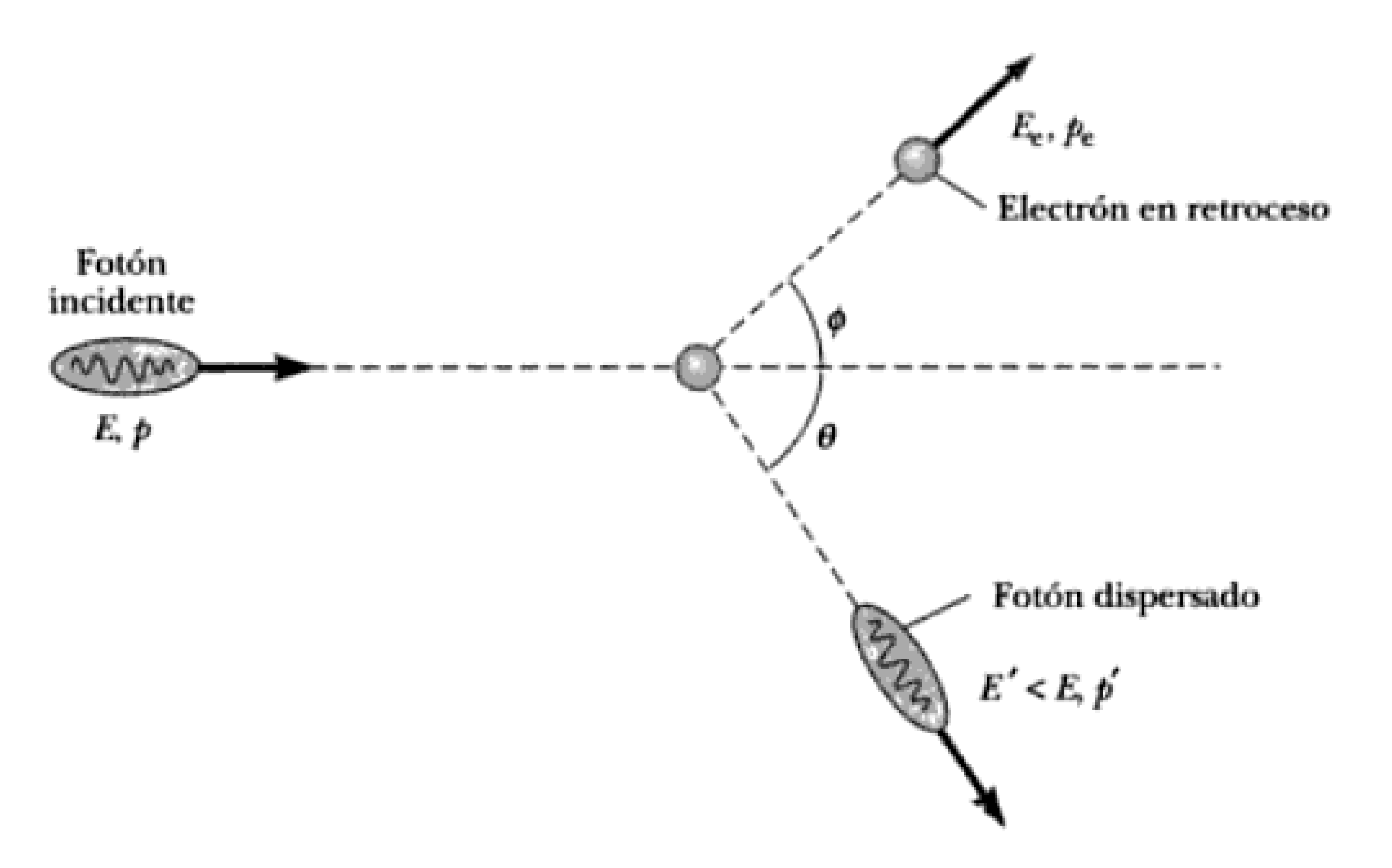


Figura 3.24 Diagrama que representa la dispersión Compton de un fotón por la acción de un electrón. El fotón dispersado posee menor energía (o longitud de onda más larga) que el fotón incidente.

$$p' \operatorname{sen} \theta = p_e \operatorname{sen} \phi \tag{3.30}$$

donde p es la cantidad de movimiento del fotón incidente, p' es la cantidad de movimiento del fotón dispersado y p_e es la cantidad de movimiento de retroceso del electrón. Las ecuaciones 3.29 y 3.30 pueden resolverse en forma simultánea para eliminar ϕ, el ángulo de dispersión del electrón, y obtener la siguiente expresión p_e^2:

$$p_e^2 = (p')^2 + p^2 - 2pp' \cos \theta \tag{3.31}$$

En este momento es necesario, paradójicamente, usar la naturaleza ondulatoria de la luz para explicar el comportamiento corpuscular de los fotones. Ya se ha visto que la energía de un fotón y la frecuencia de la onda de luz asociada estaban relacionadas por $E = hf$. Si se supone que un fotón satisface la expresión relativista $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ y que su masa es igual a cero, se tiene

$$p_{\text{fotón}} = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda} \tag{3.32}$$

Aquí se tiene de nuevo una situación paradójica: una propiedad corpuscular, esto es, la cantidad de movimiento del fotón, está dada en términos de una propiedad ondulatoria, λ, de una onda de luz asociada. Si las relaciones $E = hf$ y $p = hf/c$ se sustituyen en las ecuaciones 3.28 y 3.31, éstas se convierten respectivamente en

$$E_e = hf - hf' + m_e c^2 \tag{3.33}$$

y

$$p_e^2 = \left(\frac{hf'}{c}\right)^2 + \left(\frac{hf}{c}\right)^2 - \frac{2h^2ff'}{c^2} \cos \theta \tag{3.34}$$

Debido a que las mediciones de Compton no conciernen a la energía y cantidad de movimiento totales del electrón, E_e y p_e se eliminan al sustituir las ecuaciones 3.33 y 3.34 en la expresión para la energía relativista del electrón,

$$E_e^2 = p_e^2c^2 + m_e^2c^4$$

Luego de algunos pasos algebraicos (vea el problema 33) se obtiene el resultado de Compton para el incremento en la longitud de onda de un fotón cuando es dispersado a un ángulo θ:

$$\lambda' - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta) \qquad (3.27)$$

EJEMPLO 3.7 Desplazamiento Compton para el carbono

Rayos X de longitud de onda $\lambda = 0.200$ nm se hacen incidir sobre un bloque de carbono. Los rayos X dispersados se observan a un ángulo de 45° con respecto al haz incidente. Calcule la longitud de onda λ' de los rayos X dispersados a este ángulo.

Solución El desplazamiento en la longitud de onda de los rayos X dispersados está dado por la ecuación 3.27. Al tomar $\theta = 45°$, se encuentra

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

$$= \frac{6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(3 \times 10^8\ \text{m/s})}(1 - \cos 45°)$$

$$= 7.11 \times 10^{-13}\ \text{m} = 0.00071\ \text{nm}$$

Por tanto, la longitud de onda de los rayos X dispersados a este ángulo es

$$\lambda = \Delta\lambda + \lambda_0 = 0.200711\ \text{nm}$$

Ejercicio 6 Encuentre la fracción de energía perdida por el fotón en esta colisión.
Respuesta Fracción = $\Delta E/E = 0.00355$.

EJEMPLO 3.8 Fotones de rayos X contra fotones visibles

a) ¿Por qué en el experimento de Compton se usan fotones de rayos X, en vez de fotones de luz visible? Para contestar esta pregunta, primero se calculará el desplazamiento Compton para dispersión a 90° desde grafito para los siguientes casos: 1) rayos γ de muy alta energía emitidos por cobalto, $\lambda = 0.0106$ Å; 2) rayos X de molibdeno, $\lambda = 0.712$ Å y 3) luz verde de una lámpara de mercurio, $\lambda = 5461$ Å.

Solución En todos los casos, la fórmula del desplazamiento Compton proporciona $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda_0 = (0.0243\ \text{Å})(1 - \cos 90°) = 0.0243\ \text{Å} = 0.00243$ nm. Es decir que, sin importar la longitud de onda incidente, se observa el mismo desplazamiento pequeño. No obstante, el cambio fraccionario en la longitud de onda, $\Delta\lambda/\lambda_0$, es bastante distinto en cada caso:

Rayos γ del cobalto:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{0.0243\ \text{Å}}{0.0106\ \text{Å}} = 2.29$$

Rayos X del molibdeno:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{0.0243\ \text{Å}}{0.712\ \text{Å}} = 0.0341$$

Luz visible del mercurio:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{0.0243\ \text{Å}}{5461\ \text{Å}} = 4.45 \times 10^{-6}$$

Debido a que tanto la longitud de onda incidente como la longitud de onda dispersada están presentes de manera simultánea en el haz, pueden resolverse fácilmente sólo si $\Delta\lambda/\lambda_0$ es un porcentaje pequeño o si $\lambda_0 \leq 1$ Å.

b) Los denominados electrones libres en el carbono son en realidad electrones cuya energía de enlace es aproximadamente igual a 4 eV. ¿Por qué es posible ignorar esta energía de enlace para rayos X con $\lambda_0 = 0.712$ Å?

Solución La energía de un fotón con esta longitud de onda es

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{12\,400\ \text{eV}\cdot\text{Å}}{0.712\ \text{Å}} = 17\,400\ \text{eV}$$

En consecuencia, la energía de enlace de 4 eV del electrón es muy pequeña en comparación con la energía de los rayos X incidentes.

3.6 COMPLEMENTARIEDAD CORPÚSCULO-ONDA

Como ya se ha visto, el efecto Compton ofrece evidencias sólidas de que cuando la luz interactúa con la materia se comporta como si estuviera constituida por partículas con energía hf y cantidad de movimiento h/λ. Sin embargo, el gran éxito de la teoría de Compton plantea muchas preguntas. Si el fotón es una partícula, ¿cuál puede ser el significado de la "frecuencia" y la "longitud de onda" de la partícula, que determinan su energía y cantidad de movimiento? ¿La luz es en cierto sentido simultáneamente una onda y una partícula? Aunque la masa de los fotones es igual a cero, ¿existe alguna expresión simple para una masa gravitacional efectiva del fotón que determine una atracción gravitacional de éste? ¿Cuál es la extensión espacial de un fotón, y cómo es absorbido o dispersado por un electrón?

Aunque es posible contestar algunas de estas preguntas, es bueno saber que algunas exigen un enfoque demasiado gráfico y literal de los procesos atómicos. Muchas de estas preguntas surgen desde el punto de vista de la mecánica clásica, donde toda la materia y la energía se consideran como si fueran bolas de billar en colisión u ondas de agua rompiendo en una playa. La teoría cuántica otorga a la luz una naturaleza más flexible al implicar que condiciones experimentales distintas permiten observar ya sea propiedades ondulatorias o las propiedades corpusculares de la luz. De hecho, *ambos puntos de vista son necesarios y complementarios.* Ninguno de estos modelos puede usarse de manera exclusiva para describir en forma idónea a la radiación electromagnética. Un entendimiento completo se obtiene sólo si ambos modelos se combinan de forma complementaria.

El físico Max Born, importante contribuyente a los cimientos de la teoría cuántica, dijo lo siguiente acerca del dilema partícula-onda:

> El origen último de la dificultad reside en el hecho (o principio filosófico) de que estamos obligados a utilizar las palabras del lenguaje común cuando deseamos describir un fenómeno, no por análisis lógico o matemático, sino por una imagen que apela a la imaginación. El lenguaje común ha crecido gracias a las experiencias cotidianas y nunca ha sido capaz de rebasar estos límites. La física clásica se ha restringido a sí misma al uso de conceptos de esta clase; mediante el análisis de movimientos visibles ha desarrollado dos formas para representarlos con procesos elementales: partículas y ondas en movimiento. No existe ninguna otra forma para proporcionar una representación gráfica de los movimientos: debemos aplicarla incluso en la región de los procesos atómicos, donde la física clásica fracasa.
>
> Todo proceso puede interpretarse en términos de corpúsculos o en términos de ondas; pero, por otra parte, está fuera de nuestro alcance demostrar que estamos tratando en realidad con corpúsculos u ondas, ya que no podemos determinar en forma simultánea todas las demás propiedades distintivas de un corpúsculo o de una onda, según sea el caso. En consecuencia, podemos afirmar que las descripciones ondulatoria y corpuscular sólo deben considerarse como formas complementarias para considerar el mismo y único proceso objetivo, el cual, sólo en casos límite definidos, admite una interpretación gráfica completa.[16]

Por tanto, nos quedamos con un compromiso nada fácil entre conceptos ondulatorios y corpusculares y debemos aceptar, en este momento, que ambos son necesarios para explicar el comportamiento de la luz. En los capítulos 4 y 5 se discuten consideraciones adicionales acerca de la naturaleza dual de la luz y, en efecto, de toda la materia.

[16] M. Born, *Atomic Physics*, cuarta edición, Nueva York, Hafner Publishing Co., 1946, p. 92.

3.7 ¿LA GRAVEDAD AFECTA A LA LUZ?

OPCIONAL

Es interesante especular sobre cuán lejos es posible llevar el modelo corpuscular de la luz. Animados por la exitosa explicación corpuscular de los efectos fotoeléctrico y de Compton, podría plantearse la pregunta de si el fotón posee una masa gravitacional efectiva y si los fotones son atraídos gravitacionalmente por grandes masas, como las del Sol o la Tierra, y experimentar un cambio observable en su energía.

Para investigar esto, recuerde que la masa del fotón es igual a cero, aunque es posible considerar razonablemente que su masa inercial, m_i, es el equivalente de masa de la energía del fotón, E, o bien,

$$m_i = \frac{E}{c^2} = \frac{hf}{c^2} \tag{3.35}$$

Se obtiene el mismo resultado si se divide la cantidad de movimiento del fotón entre su velocidad:

$$m_i = \frac{p}{c} = \frac{hf}{c^2}$$

Recuerde que la *masa inercial efectiva* determina la forma en que responde el fotón a una fuerza aplicada como la que se ejerce sobre éste durante la colisión con un electrón. La *masa gravitacional* de un objeto determina la fuerza de atracción gravitacional de ese objeto hacia otro, como la Tierra. Aunque se trata de un hecho extraordinario no explicado en la mecánica newtoniana que la masa inercial de todos los cuerpos es igual a la masa gravitacional en una parte en 10^{12}, el principio de equivalencia de Einstein de la relatividad general requiere este resultado, como ya se mencionó en el capítulo 2.

Suponga que el fotón, como otros objetos, también posee una masa gravitacional igual a su masa inercial. En este caso un fotón que cae desde una altura H debe incrementar su energía por mgH y, entonces, aumentar su frecuencia, aunque su velocidad no puede aumentar y permanece en c. De hecho, se han realizado experimentos que muestran este incremento en la frecuencia y confirman que, en efecto, el fotón posee una masa gravitacional efectiva de hf/c^2. En la figura 3.25 se muestra una representación esquemática del experimento. Al aplicar la conservación de la energía al fotón en los puntos A y B es posible obtener una expresión para f' en términos de f.

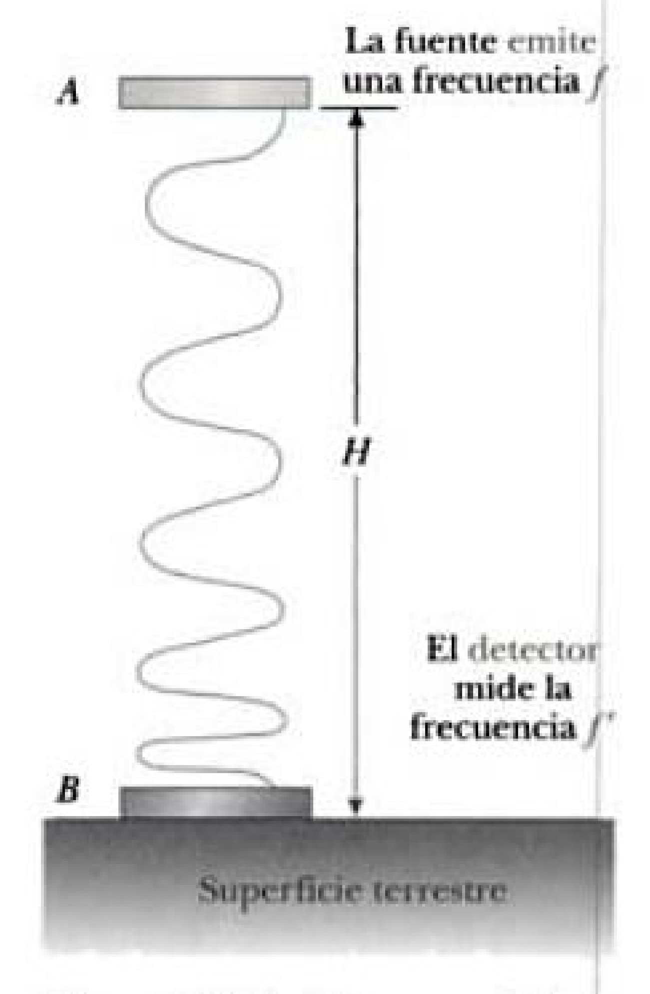


Figura 3.25 Diagrama del experimento del fotón que cae.

$$KE_B + PE_B = KE_A + PE_A$$

Debido a que la energía cinética del fotón es $E = pc = hf$ y a que su energía potencial es mgH, donde $m = hf/c^2$, se tiene

$$hf' + 0 = hf + \left(\frac{hf}{c^2}\right) gH$$

o bien

$$f' = f\left(1 + \frac{gH}{c^2}\right) \tag{3.36}$$

El cambio fraccionario en la frecuencia, $\Delta f/f$, está dado por

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{f' - f}{f} = \frac{gH}{c^2} \tag{3.37}$$

Para $H = 50$ m, se encuentra

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{(9.8 \text{ m/s}^2)(50 \text{ m})}{(3 \times 10^8 \text{ m/s})^2} = 5.4 \times 10^{-15}$$

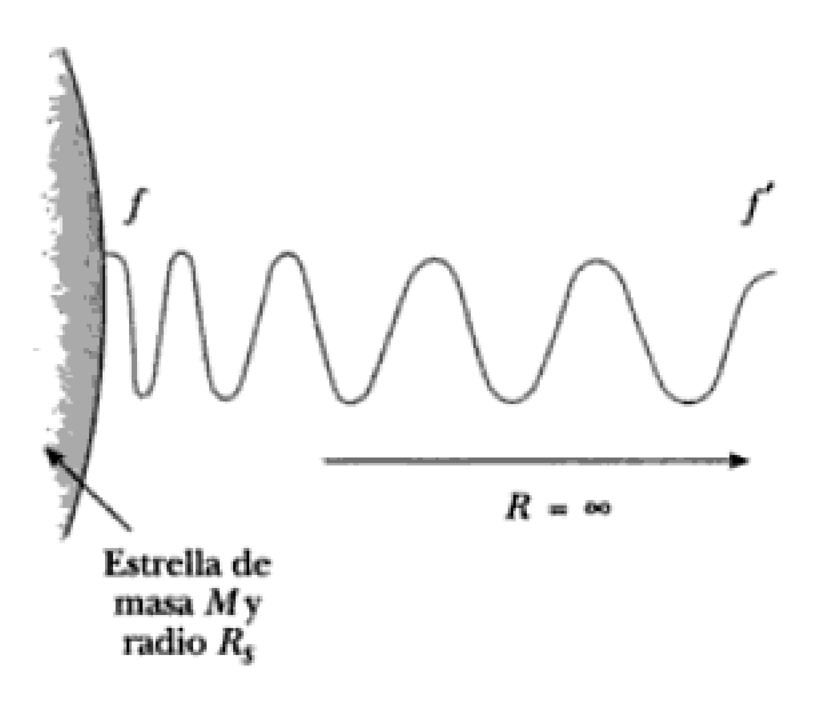


Figura 3.26 Desplazamiento gravitacional en una estrella de alta densidad.

Este incremento tan pequeño en la frecuencia en realidad ya ha sido medido (¡con dificultad!).[17] El desplazamiento es de sólo aproximadamente 1/250 del ancho de la línea de los fotones monocromáticos de rayos γ usados en el experimento del fotón que cae.

El incremento en la frecuencia para un fotón que cae hacia adentro sugiere un decremento en la frecuencia para un fotón que escapa hacia afuera hacia el infinito en contra de la atracción gravitacional de una estrella (vea la figura 3.26). Este efecto, conocido como "corrimiento gravitacional hacia el rojo" provoca que un fotón emitido se desplace en frecuencia hacia el extremo rojo del espectro. Nuevamente es posible obtener una expresión para el corrimiento hacia el rojo conservando la energía del fotón:

$$[KE + PE]_{R=\infty} = [KE + PE]_{R=R_s}$$

Al usar hf para la energía cinética del fotón y $-GMm/R$ para su energía potencial, con m igual a hf/c^2 y R_s igual al radio de la estrella, se llega a

$$hf' - 0 = hf - \frac{GM}{R_s}\left(\frac{hf}{c^2}\right) \tag{3.38}$$

o bien

$$f' = f\left(1 - \frac{GM}{R_s c^2}\right) \tag{3.39}$$

EJEMPLO 3.9 Corrimiento gravitacional hacia el rojo para una enana blanca

Las enanas blancas son estrellas extremadamente masivas y compactas que poseen una masa del orden de la masa del Sol, concentrada en un volumen semejante al de la Tierra. Calcule el corrimiento gravitacional hacia el rojo para luz de 300 nm emitida por una enana blanca.

Solución La ecuación 3.39 puede escribirse en forma alternativa como

$$\frac{f' - f}{f} = \frac{\Delta f}{f} = \frac{GM}{R_s c^2}$$

Al usar los valores

$$M = \text{masa del Sol} = 1.99 \times 10^{30}\ \text{kg}$$

[17] R. V. Pound y G. A. Rebka, Jr., *Phys. Rev. Lett.*, 4:337, 1960.

$$R_s = \text{radio de la Tierra} = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$$
$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$$

se encuentra

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(1.99 \times 10^{30} \text{ kg})}{(6.37 \times 10^6 \text{ m})(3 \times 10^8 \text{ m/s})^2}$$
$$= 2.31 \times 10^{-4}$$

Debido a que $\Delta f/f \approx df/f$, y $df = -(c/\lambda^2)\, d\lambda$ (por $f = c/\lambda$), se encuentra $|df/f| = d\lambda/\lambda$. En consecuencia, el desplazamiento en la longitud de onda es

$$\Delta\lambda = (300 \text{ nm})(2.31 \times 10^{-4}) = 0.0695 \text{ nm} \approx 0.7 \text{ Å}$$

Observe que aquí el corrimiento es hacia el rojo, por lo que la longitud de onda observada debe ser 300.07 nm.

Es irresistible hacer una observación más acerca de la ecuación 3.39. En el caso de una estrella muy masiva, ¿será posible que en su ciclo de vida se vuelva tan densa que el término GM/R_sc^2 adquiera un valor mayor que 1? En ese caso, la ecuación 3.38 sugiere que el fotón no puede escapar de la estrella, porque para hacerlo se requiere más energía de la que inicialmente posee el fotón. Una estrella en estas condiciones se denomina *hoyo negro* porque no emite luz y actúa como una aspiradora celeste de toda la materia y radiación próximas. Aun cuando el hoyo negro en sí no es luminoso, es posible observarlo indirectamente de dos formas. Una es a través de la atracción gravitacional que ejercería sobre una estrella luminosa normal si ambos cuerpos constituyesen un sistema de estrella binaria. En este caso la estrella normal orbitaría alrededor del centro de masa del par hoyo negro/estrella normal, y este movimiento sería detectable. Una segunda técnica indirecta para "ver" un hoyo negro sería buscar los rayos X que se producen por ráfagas de materia atraídas hacia él. Aunque el hoyo negro en sí no emitiría rayos X, sería observable una región emisora de este tipo de rayos X con diámetro aproximadamente estelar, como se muestra en la figura 3.27. Los rayos X son producidos por el calentamiento de la materia

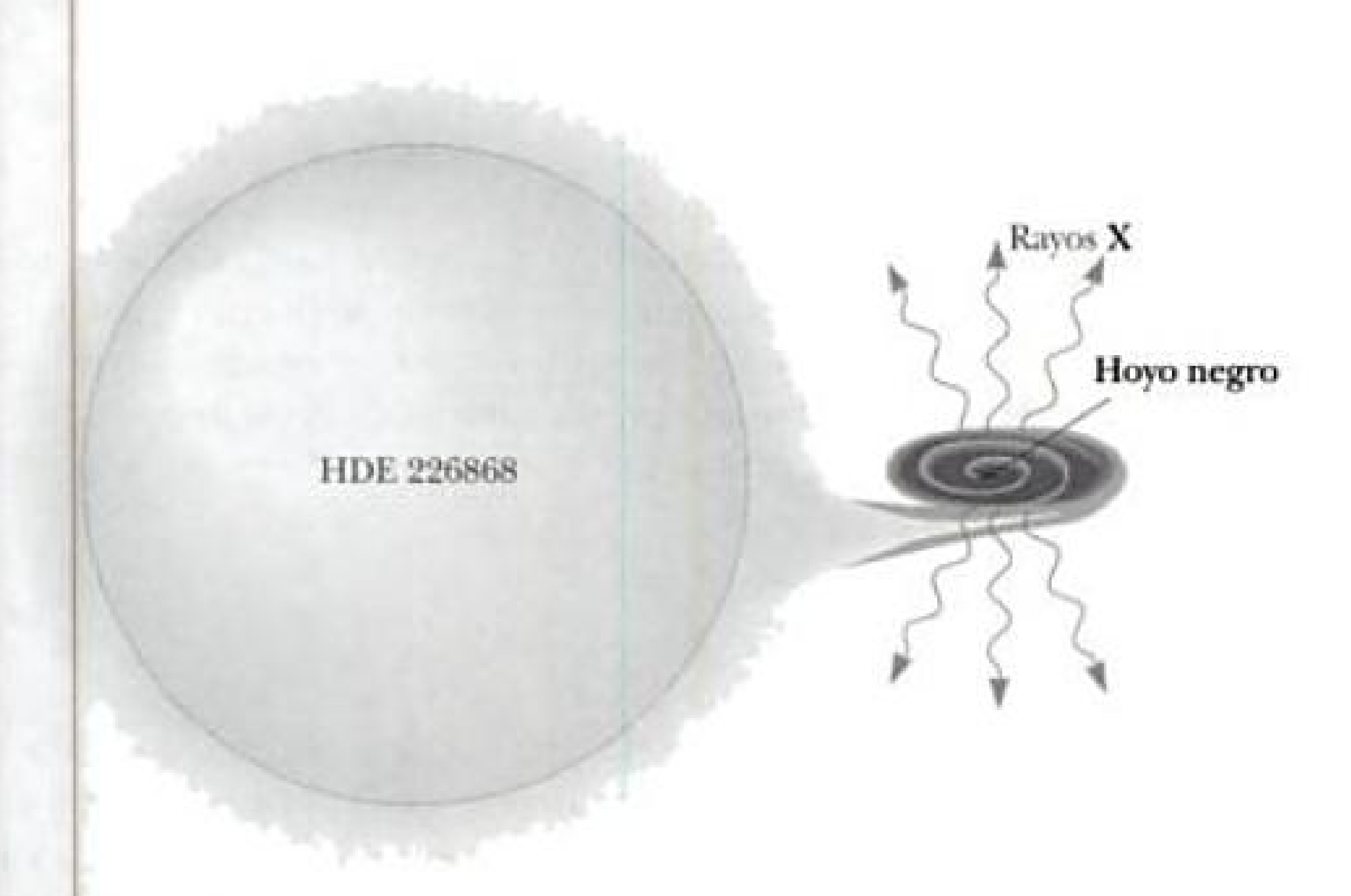


Figura 3.27 El hoyo negro Cygnus X-1. El viento estelar proveniente de HDE 226868 derrama materia sobre un gran disco alrededor del hoyo negro que lo acompaña. Los gases que ingresan se calientan a temperaturas tan enormes, a medida que giran en espiral hacia el hoyo negro, que emiten grandes cantidades de rayos X.

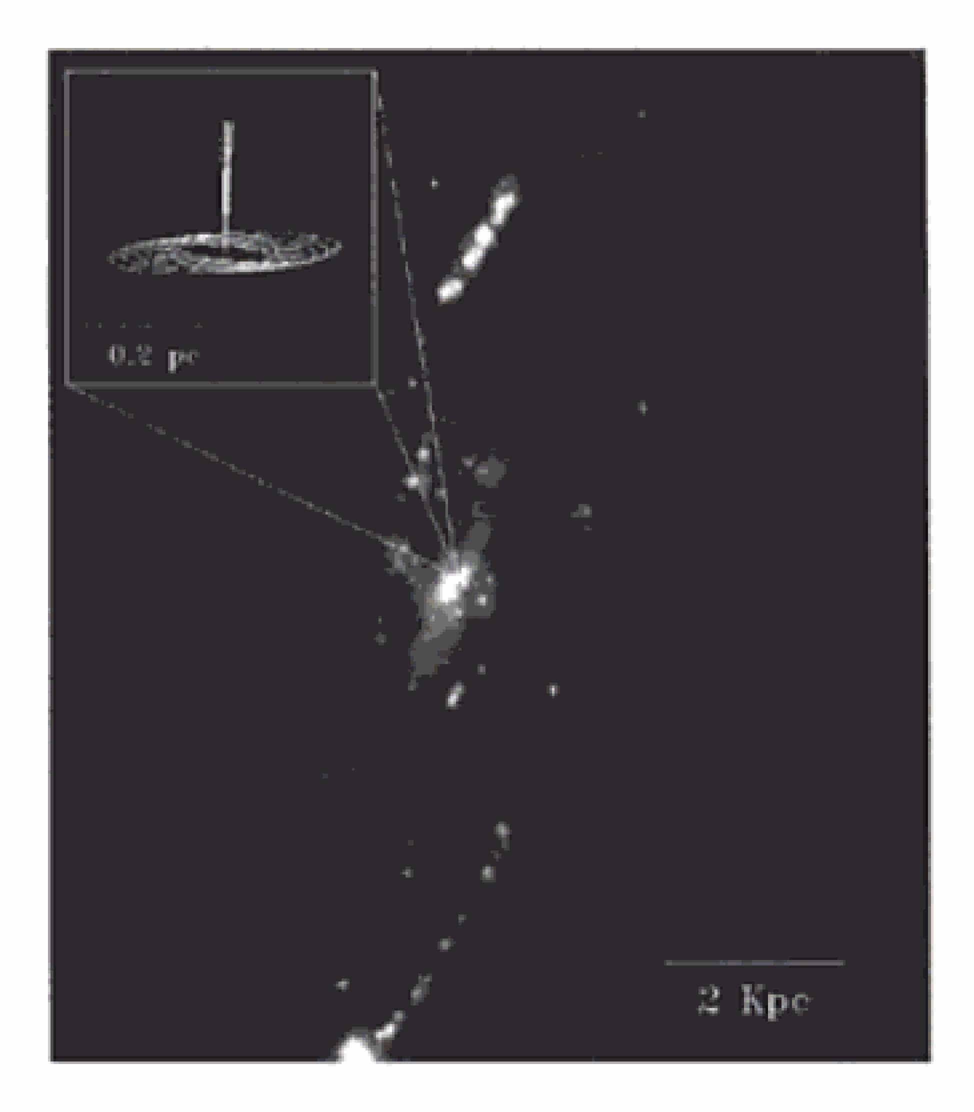


Figura 3.28 Imagen del entorno de la galaxia NGC 4258 tomada con un radiotelescopio y una imagen en recuadro generada por un modelo de computadora del disco de acumulación alrededor del hoyo negro en el centro de la galaxia. Un parsec (pc) es una distancia aproximada de 3.3 años luz. (*Gerald Cecil (UNG) y Holland Ford (JHU), imagen compuesta cortesía de Lincoln Greenhill y James Herrnstein.*)

que circula, se comprime y termina por caer en el hoyo negro. Esta fuente puntual no luminosa tan intensa de rayos X ha sido detectada en la constelación del Cisne. Casi todos los astrónomos creen que esta fuente, designada como Cygnus X-1, es un hoyo negro; posee luminosidad, o potencia de salida igual a 10^{30} W en el intervalo de rayos X de 2 a 10 keV.

Recientemente, se han obtenido evidencias aún más convincentes de que existen los hoyos negros a partir de mediciones de radiotelescopio de un torus de polvo que gira rápidamente alrededor de una gran masa central en el centro de la galaxia NGC 4258 (vea la figura 3.28). Estas observaciones indican que hay una masa equivalente a 39 millones de masas solares dentro de un radio de 4×10^{15} m, una densidad 10 000 veces más grande que cualquier acumulación conocida de estrellas y lo suficientemente alta como para producir un hoyo negro. La masa gravitacional central de 39 millones de masas solares fue calculada a partir de la velocidad de rotación observada del torus de polvo, que es aproximadamente igual a 1 millón de m/s. Y no es necesario ir tan lejos. Cada vez hay más evidencias de que tenemos un hoyo negro en el centro de nuestra propia galaxia; un hoyo negro de alrededor de 3 millones de masas solares, ocultas por polvo, localizado en la constelación de Sagitario.[18]

RESUMEN

El trabajo de Maxwell y Hertz a fines del siglo XIX demostró de manera irrefutable que la luz, la radiación térmica y las ondas de radio eran ondas electromagnéticas que sólo diferían en frecuencia y longitud de onda. Así, lo anterior llevó a los atónitos científicos a descubrir que la distribución espectral de ra-

[18]Consulte el interesante libro *The Black Hole at the Center of Our Galaxy*, de Fulvio Melia, Princeton University Press, 2003.

diación proveniente de una cavidad caliente no podía explicarse en términos de la teoría ondulatoria clásica. Planck se vio obligado a introducir el concepto de cuanto de energía para poder deducir la fórmula correcta de cuerpo negro. Según Planck, los osciladores atómicos responsables de la radiación de cuerpo negro sólo pueden poseer *energías discretas* o cuantizadas dadas por

$$E = nhf \tag{3.10}$$

donde n es un entero, h es la constante de Planck y f es la frecuencia natural del oscilador. Utilizando razonamientos termodinámicos generales, Planck pudo demostrar que $u(f, T)$, la energía de la radiación de cuerpo negro por unidad de volumen con una frecuencia entre f y $f + df$, podía expresarse como el producto del número de osciladores por unidad de volumen en este intervalo de frecuencias, $N(f)\,df$, y la energía promedio emitida por oscilador, $\overline{E}$. Es decir,

$$u(f, T)\,df = \overline{E}\,N(f)\,df \tag{3.12}$$

Si $\overline{E}$ se calcula permitiendo una distribución *continua* de energías de los osciladores, se obtiene la ley incorrecta de Rayleigh-Jeans. Si $\overline{E}$ se calcula a partir de un conjunto *discreto* de energías de los osciladores (siguiendo las ideas de Planck), se obtiene la fórmula correcta para la radiación de cuerpo negro:

$$u(f, T)\,df = \frac{8\pi f^2}{c^3}\left(\frac{hf}{e^{hf/k_BT} - 1}\right)df \tag{3.9}$$

Planck cuantizó la energía de los osciladores atómicos, pero Einstein extendió el concepto de cuantización a la luz. Desde el punto de vista de Einstein, luz de frecuencia f está constituida por una corriente de partículas, denominadas *fotones*, cada una de las cuales posee una energía $E = hf$. El efecto fotoeléctrico, un proceso en que los electrones son expulsados de una superficie metálica cuando incide luz de frecuencia suficientemente alta sobre la superficie en cuestión, puede explicarse simplemente con la teoría de los fotones. Según esta teoría, la energía cinética máxima de los fotoelectrones expulsados, $K_{\text{máx}}$, está dada por

$$K_{\text{máx}} = hf - \phi \tag{3.23}$$

donde ϕ es la función trabajo del metal.

Aunque la idea de que la luz está constituida por fotones con energía hf data de 1905, la idea de que estos fotones también transportan cantidad de movimiento no fue comprobada en forma experimental sino hasta 1923. Ese año se descubrió que los rayos X dispersados por electrones libres experimentan un desplazamiento en la longitud de onda con un ángulo de dispersión, conocido como desplazamiento Compton. Cuando un rayo X de frecuencia f es considerado como una *partícula* con *energía hf* y *cantidad de movimiento hf/c*, la dispersión rayos X-electrones puede analizarse para llegar a la fórmula del desplazamiento Compton:

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_ec}(1 - \cos\theta) \tag{3.27}$$

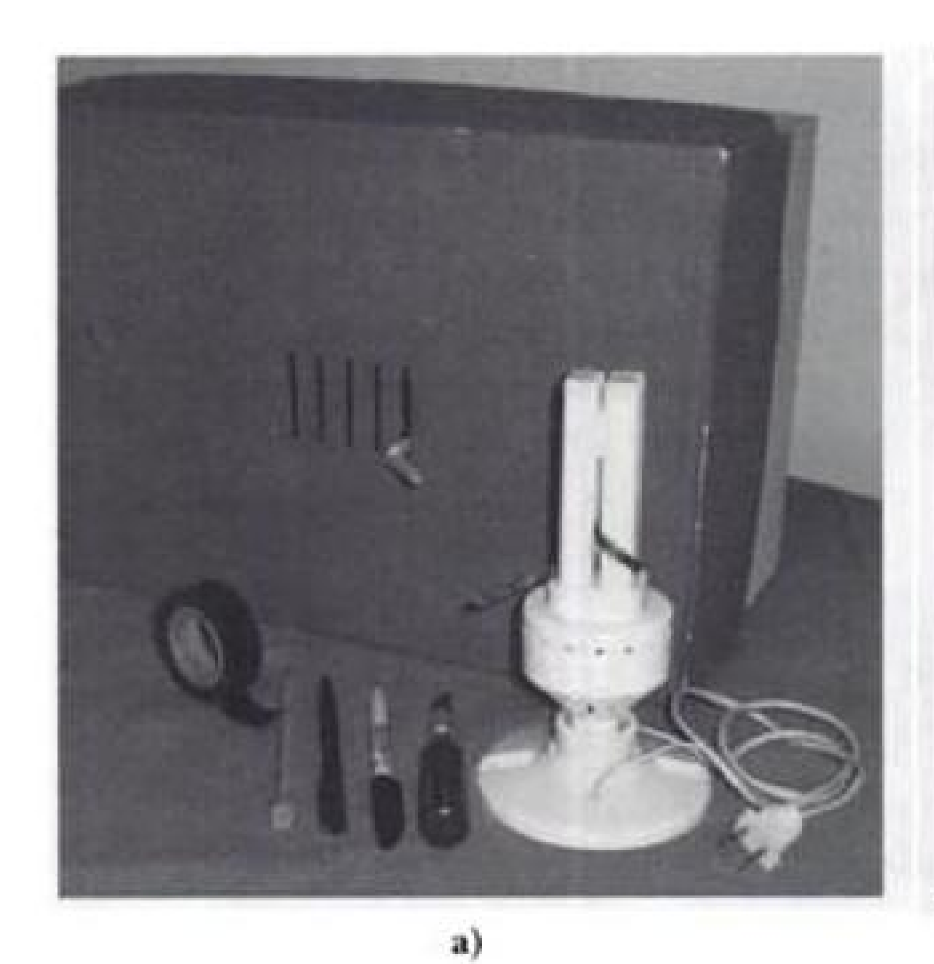
Aquí, m_e es la masa del electrón y θ es el ángulo de dispersión de los rayos X.

El gran éxito de la teoría de los fotones para explicar interacciones entre la luz y los electrones contrasta bastante con el éxito de la teoría ondulatoria clásica en explicar la polarización, la reflexión y la interferencia de la luz. Lo anterior nos deja con el dilema de si la luz es una onda o una partícula. La

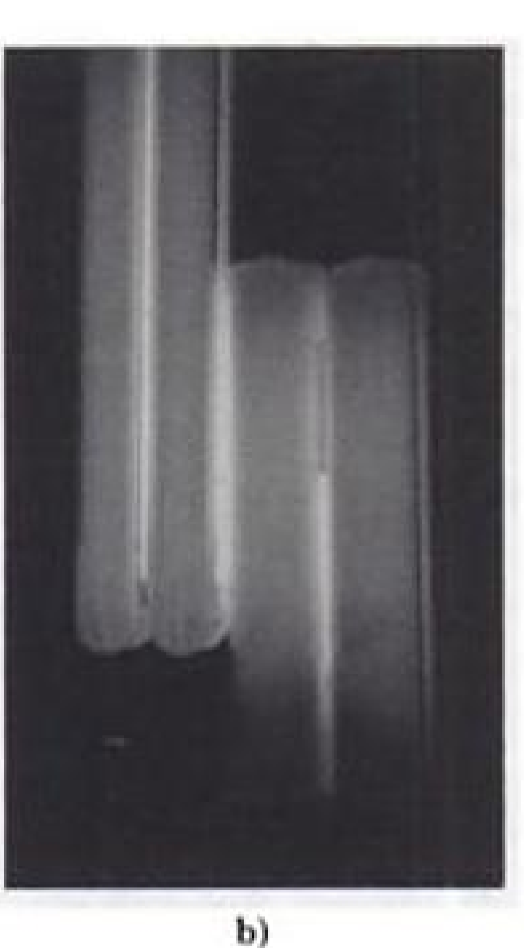
opinión aceptada hoy en día sugiere que la luz posee características tanto ondulatorias como corpusculares, y que tales características constituyen juntas un enfoque complementario de la luz.

PREGUNTAS

1. ¿Qué suposiciones hizo Planck al tratar el problema de la radiación de cuerpo negro? Analice las consecuencias de tales suposiciones.
2. Si el efecto fotoeléctrico se observa en un metal, ¿es posible concluir que el efecto también se observará en otro metal bajo las mismas condiciones? Explique su respuesta.
3. Suponga que el efecto fotoeléctrico ocurre en un blanco gaseoso, y no en uno sólido. ¿Se producirán fotoelectrones para *todas* las frecuencias del fotón incidente? Explique su respuesta.
4. ¿Cómo difiere el efecto Compton del efecto fotoeléctrico?
5. ¿Qué suposiciones hizo Compton al analizar la dispersión de un fotón por un electrón?
6. Un fotón de rayos X es dispersado por un electrón. ¿Qué le ocurre a la frecuencia del fotón dispersado en relación con la del fotón incidente?
7. ¿Por qué si existe una frecuencia de corte en el efecto fotoeléctrico la teoría corpuscular de la luz se ve favorecida, en vez de la teoría ondulatoria?
8. Todos los objetos radían energía. ¿Por qué, entonces, no es posible ver todos los objetos en una habitación oscura?
9. ¿Qué posee más energía, un fotón de radiación ultravioleta o un fotón de luz amarilla?
10. ¿Qué efecto, en caso de haber alguno, esperaría usted que tuviese la temperatura de un material sobre la facilidad con la que es posible expulsar electrones desde el material en el efecto fotoeléctrico?
11. Algunas estrellas se observan de color rojizo, y otras, azul. ¿Cuáles poseen mayor temperatura superficial? Explique su respuesta.
12. Cuando se apila madera en una rejilla elevada especial (disponible comercialmente) en una chimenea, debajo de la rejilla se forma una bolsa de madera ardiendo, cuya temperatura es superior a la de la madera encendida que está en la parte superior de la pila. Explique cómo este dispositivo proporciona más calor del que suministra un fuego convencional, incrementando así la eficiencia de la chimenea.
13. ¿Qué proceso físico descrito en este capítulo podría denominarse razonablemente "efecto fotoeléctrico inverso"? ¿Este proceso puede explicarse clásicamente o debe hacerse considerando la luz como un conjunto de muchas partículas pequeñas, cada una con energía *hf*? Explique su respuesta.



a)



b)

Figura P3.15

14. En el efecto fotoeléctrico, si la intensidad de la luz incidente es muy baja, entonces el número de fotones por segundo que inciden en la superficie metálica es pequeño y la probabilidad por segundo de que se emitan electrones *por átomo superficial* también es pequeña. Explique la emisión instantánea de fotoelectrones observada en estas condiciones.
15. *Más negro que el negro, más brillante que el blanco.* a) Considere una caja de cartón grande, cerrada y vacía. En uno de sus lados, corte una pequeña ranura de unos cuantos milímetros de ancho. Use plumas, marcadores negros y carbón para trazar algunas rayas cerca de la ranura, como se muestra en la figura P3.15a. Analícelas con cuidado y elija la más oscura: en la figura no hay un contraste suficiente que nos permita tomar esta decisión. Explique por qué es la más oscura. b) Instale un arreglo intrincadamente compacto de una luz fluorescente, como en la figura P3.15b. Encienda y observe su arreglo con lentes oscuros y describa dónde parece más brillante. Explique por qué es más brillante ahí. *Sugerencia:* Gustav Kirchhoff, profesor en Heidelberg y maestro de lo evidente, respondió al inciso a) como probablemente usted lo haría. Su respuesta al inciso b) debería empezar así: Cuando cae sobre la superficie de un objeto radiación electromagnética, éste refleja una fracción r de la energía y absorbe el resto. Si la fracción absorbida es 0.8 o 0.001, la fracción reflejada es $a = 1 - r$. Suponga que el objeto y su entorno están a la misma temperatura. La energía que absorbe el objeto se une a su fondo de energía interna, aunque la segunda ley de la termodinámica implica que la energía absorbida no puede aumentar la temperatura del objeto. No se produce un incremento de temperatura porque el presupuesto de la energía del objeto cuenta con un término más: energía radiada . . . Usted todavía tiene que hacer las observaciones y contestar las preguntas de los incisos a) y b), aunque si así lo desea puede incorporar algunas de las ideas de Kirchhoff a su respuesta. (*Alexandra Héder.*)

PROBLEMAS

3.1 La luz como una onda electromagnética

1. *¡Efecto Zeeman clásico o el triunfo de las ecuaciones de Maxwell!* Como se indicó en la sección 3.1, las ecuaciones de Maxwell pueden usarse para predecir el cambio en la frecuencia de emisión cuando se colocan los átomos de un gas en un campo magnético. Considere la situación que se muestra en la figura P3.1. Observe que al aplicar un campo magnético perpendicular al plano orbital del electrón se induce un campo eléctrico, que cambia la dirección del vector velocidad. a) Use

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

para demostrar que la magnitud del campo eléctrico está dada por

$$E = \frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$$

b) Use $F\,dt = m\,dv$ para calcular el cambio en la velocidad, Δv, del electrón. Demuestre que si r permanece constante,

$$\Delta v = \frac{erB}{2m_e}$$

c) Encuentre el cambio en la frecuencia angular, $\Delta\omega$, del electrón y calcule el valor numérico de $\Delta\omega$ para B igual a 1 T. Observe que este también es el cambio en frecuencia de la luz emitida según las ecuaciones de Maxwell. Encuentre el cambio fraccionario en frecuencia, $\Delta\omega/\omega$, para una línea de emisión normal de 500 nm. d) En realidad, la línea de emisión original en ω_0 se divide en tres componentes, en $\omega_0 - \Delta\omega$, ω_0 y $\omega_0 + \Delta\omega$. La línea en $\omega_0 + \Delta\omega$ es producida por átomos cuyos electrones giran como se muestra en la figura P3.1, mientras la línea en $\omega_0 - \Delta\omega$ es producida por átomos cuyos electrones giran en sentidos opuestos. La línea en ω_0 es producida por átomos cuyos planos de rotación electrónica están orientados en forma paralela a **B**.

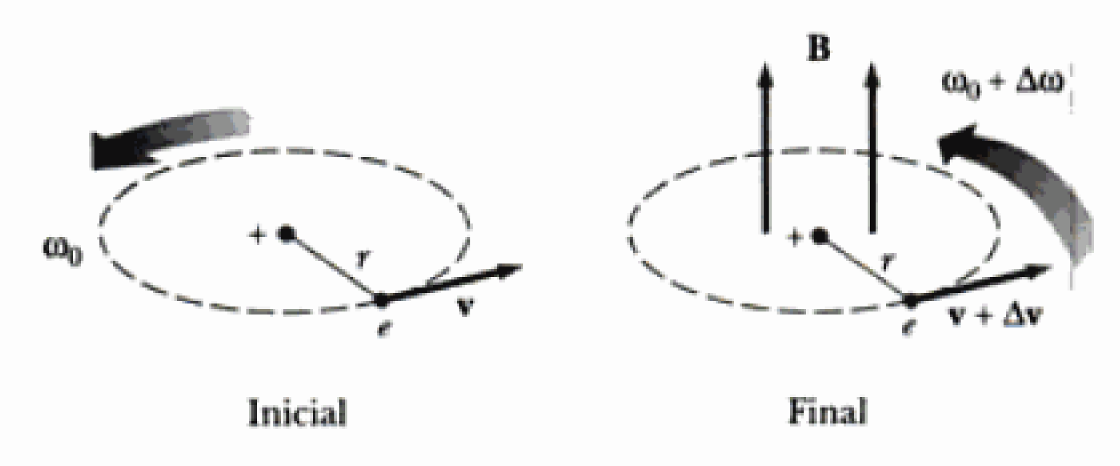


Figura P3.1

3.2 Radiación de cuerpo negro

2. La temperatura de su piel es aproximadamente igual a 35°C. ¿Cuál es la longitud de onda a la que se presenta el pico en la radiación emitida por su piel?
3. Una masa de 2 kg está sujeta a un resorte sin masa de constante $k = 25$ N/m. El resorte se estira 0.40 m desde su posición de equilibrio y luego se suelta. a) Encuentre la energía total y la frecuencia de oscilación según los cálculos clásicos. b) Suponga que la energía está cuantizada y encuentre el número cuántico, n, para el sistema. c) ¿Cuánta energía se perdería con un cambio de 1 cuanto?

4. a) Use la ley de Stefan para calcular la potencia total radiada por unidad de área por un filamento de tungsteno a una temperatura de 3 000 K. (Suponga que el filamento es un radiador ideal.) b) Si el filamento de tungsteno de una lámpara es de 75 W, ¿cuál es el área superficial del filamento? (Suponga que la principal pérdida de energía se debe a la radiación.)
5. Considere el problema de la distribución de la radiación de cuerpo negro descrito en la figura 3.3. Observe que, a medida que *T aumenta*, la longitud de onda $\lambda_{\text{máx}}$ a la cual $u(\lambda, T)$ alcanza un máximo se desplaza hacia longitudes de onda más cortas. a) Demuestre que existe una relación general entre la temperatura y $\lambda_{\text{máx}}$ que establece que $T\lambda_{\text{máx}}$ = constante (ley del desplazamiento de Wien). b) Obtenga un valor numérico para esta constante. (*Sugerencia:* Empiece con la ley de radiación de Planck y observe que la pendiente de $u(\lambda, T)$ es cero cuando $\lambda = \lambda_{\text{máx}}$.)
6. *La constante fundamental de Planck, h.* Al final Planck se dio cuenta de la gran importancia de h, que, mucho más que un parámetro de ajuste de curvas, es en realidad la medida de todos los fenómenos cuánticos. De hecho, Planck sugirió utilizar las constantes universales h, c (la velocidad de la luz) y G (constante gravitacional de Newton) para construir unidades "naturales" o universales de longitud, tiempo y masa. Planck razonó que las unidades actuales de estas medidas estaban basadas en el tamaño, movimiento y masa accidentales de nuestro planeta particular, pero que las unidades verdaderamente universales debían basarse en la teoría cuántica, la velocidad de la luz en el vacío y la ley de la gravitación —las cuales se cumplen en todo el universo y en cualquier tiempo. Demuestre que las expresiones $\left(\frac{hG}{c^3}\right)^{1/2}$, $\left(\frac{hG}{c^5}\right)^{1/2}$ y $\left(\frac{hc}{G}\right)^{1/2}$ poseen dimensiones de longitud, tiempo y masa, y encuentre sus valores numéricos. Estas cantidades se denominan, respectivamente, longitud de Planck, tiempo de Planck y masa de Planck. ¿Podría especular acerca del significado físico de estas cantidades?

3.3 Deducción de la ley de Rayleigh-Jeans y ley de Planck (opcional)

7. *Densidad de modos.* Lo esencial para calcular el número de modos de vibración de ondas confinadas en una cavidad puede comprenderse si consideramos un ejemplo unidimensional. a) Calcule el número de modos (ondas estacionarias de longitudes de onda diferentes) con longitudes de onda entre 2 cm y 2.1 cm que puede haber en un resorte de 2 m de longitud con extremos fijos. (*Sugerencia:* Use $n(\lambda/2) = L$, donde $n = 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$ Observe que un valor específico de n define un modo específico u onda estacionaria con longitud de onda diferente.) b) Calcule, en analogía con nuestro cálculo tridimensional, el número de modos por unidad de longitud de onda por unidad de longitud, $\frac{\Delta n}{L\,\Delta\lambda}$. c) Demuestre que, en general, el número de modos por unidad de longitud de onda por unidad de longitud para un resorte de longitud L está dado por

$$\frac{1}{L}\left|\frac{dn}{d\lambda}\right| = \frac{2}{\lambda^2}$$

¿Esta expresión lleva la misma respuesta numérica que se encontró en el inciso a)? d) ¿En qué condiciones se justifica sustituir $\left|\left(\frac{\Delta n}{L\,\Delta\lambda}\right)\right|$ con $\left|\left(\frac{dn}{L\,d\lambda}\right)\right|$? ¿La expresión $n = 2L/\lambda$ es una función continua?

3.4 Cuantización de la luz y efecto fotoeléctrico

8. Calcule la energía de un fotón cuya frecuencia es a) 5×10^{14} Hz, b) 10 GHz, c) 30 MHz. Exprese sus respuestas en electrón volts.
9. Determine las longitudes de onda correspondientes a los fotones descritos en el problema 8.
10. Un radiotransmisor de FM posee una potencia de salida de 10 kW y opera a una frecuencia de 94 MHz. ¿Cuántos fotones emite por segundo?
11. La potencia media generada por el Sol tiene un valor de 3.74×10^{26} W. Suponiendo que la longitud de onda media de la radiación del Sol es 500 nm, encuentre el número de fotones que emite en 1 s.
12. La potencia de salida de una lámpara de vapor de sodio es 10 W. Use 589.3 nm como la longitud de onda media de la fuente y calcule el número de fotones emitidos por segundo.
13. La corriente de una fotocelda es cortada por un potencial de frenado de 2.92 V para una radiación cuya longitud de onda es 250 nm. Encuentre la función trabajo para el material.
14. La función trabajo para el potasio es 2.24 eV. Si se ilumina potasio metálico con luz de longitud de onda igual a 350 nm, encuentre a) la energía cinética máxima de los fotoelectrones y b) la longitud de onda de corte.
15. La función trabajo para el molibdeno es 4.2 eV. a) Encuentre la longitud de onda de corte y la frecuencia de corte para el efecto fotoeléctrico. c) Calcule el potencial de frenado si la luz incidente tiene una longitud de onda de 200 nm.
16. Cuando se ilumina cesio metálico con luz de longitud de onda igual a 300 nm, los fotoelectrones emitidos tienen una energía cinética máxima de 2.23 eV. Encuentre a) la función trabajo para el cesio y b) el potencial de frenado si la luz incidente tiene una longitud de onda igual a 400 nm.
17. Considere los metales litio, berilio y mercurio, cuyas funciones trabajo son 2.3 eV, 3.9 eV y 4.5 eV, respectivamente. Si en cada uno de estos metales incide luz con una longitud de onda igual a 300 nm, determine a)

cuál de ellos presenta efecto fotoeléctrico y b) la energía cinética máxima del fotoelectrón en cada caso.

18. Sobre una superficie metálica incide luz con una longitud de onda igual a 500 nm. Si el potencial de frenado para el efecto fotoeléctrico es 0.45 V, encuentre a) la energía máxima de los electrones emitidos, b) la función trabajo y c) la longitud de onda de corte.

19. La función trabajo del material activo en una fotocelda es igual a 2 eV. En condiciones de inversión de polaridad (donde se invierte la polaridad de la batería que se muestra en la figura 3.14), se encuentra que la longitud de onda de corte es de 350 nm. ¿Cuál es el valor del voltaje?

20. Una fuente de luz, con longitud de onda λ, ilumina un metal y expulsa fotoelectrones con una energía cinética máxima de 1 eV. Una segunda fuente luminosa, con la mitad de la longitud de onda de la primera fuente, expulsa fotoelectrones con una energía cinética máxima de 4 eV. ¿Cuál es la función trabajo del metal?

21. En la figura P3.21 se grafica el potencial de frenado contra la frecuencia del fotón incidente para el efecto fotoeléctrico en el sodio. Use estos datos para encontrar a) la función trabajo, b) la razón h/e y c) la longitud de onda de corte. d) Encuentre la diferencia porcentual entre su respuesta al inciso b) y el valor aceptado. (Datos tomados de R. A. Millikan, *Phys. Rev.*, 7:362, 1916.)

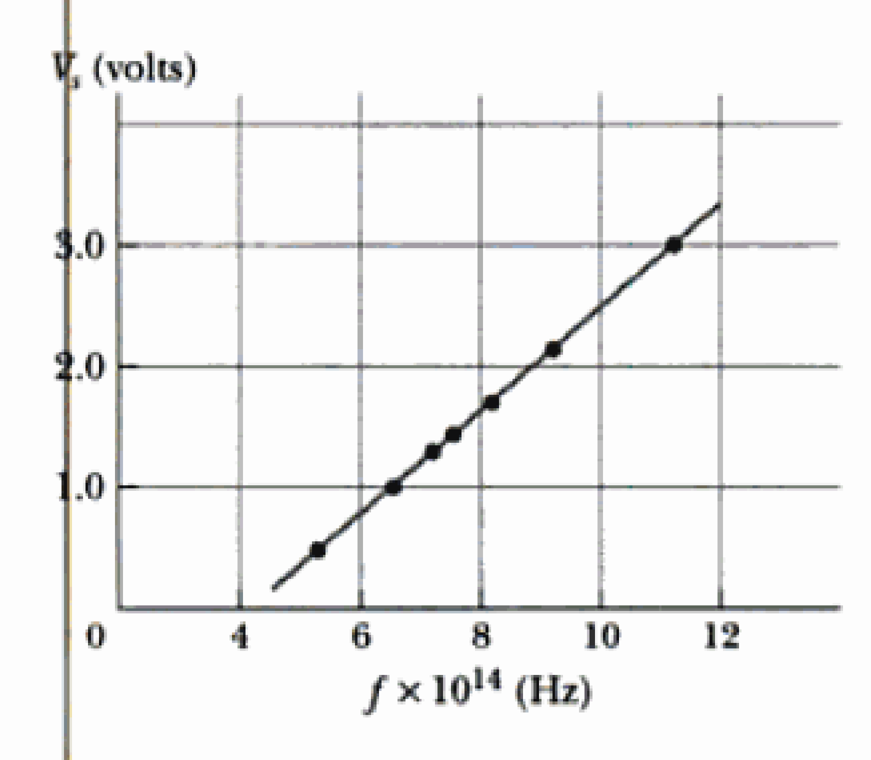


Figura P3.21 Algunos de los datos originales de Millikan para el sodio.

22. Sobre un metal inciden fotones con una longitud de onda igual a 450 nm. Los electrones más energéticos que son expulsados del metal se desvían por la acción de un campo magnético con una intensidad igual a 2×10^{-5} T, que los hace describir un arco circular de 20 cm de radio. ¿Cuál es la función trabajo para el metal?

3.5 Efecto Compton y rayos X

23. Calcule la energía y la cantidad de movimiento de un fotón con una longitud de onda de 500 nm.

24. Desde un bloque de carbono se expulsan rayos X con longitud de onda de 0.200 nm. Si la radiación dispersada se detecta a 90° con respecto al haz incidente, encuentre a) el desplazamiento Compton, $\Delta\lambda$, y b) la energía cinética impartida al electrón en retroceso.

25. Rayos X con una energía de 300 keV experimentan dispersión Compton por un blanco. Si los rayos dispersados se detectan a 30° con respecto a los rayos incidentes, encuentre a) el desplazamiento Compton a este ángulo, b) la energía de los rayos X dispersados y c) la energía del electrón en retroceso.

26. Rayos X con una longitud de onda de 0.040 nm experimentan dispersión Compton. a) Encuentre la longitud de onda de los fotones dispersados a ángulos de 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180° y 210°. b) Encuentre la energía de los electrones dispersados correspondiente a estos rayos X dispersados. c) ¿Cuál de los ángulos de dispersión dados proporciona al electrón la mayor energía?

27. Demuestre que un fotón no puede transferir toda su energía a un electrón libre. (*Sugerencia:* Considere que es necesario que se conserven la energía y la cantidad de movimiento.)

28. En el evento de dispersión Compton que se ilustra en la figura 3.24, el fotón dispersado tiene una energía de 120 keV y el electrón en retroceso, de 40 keV. Encuentre a) la longitud de onda del fotón incidente, b) el ángulo θ al que se dispersa el fotón y c) el ángulo de retroceso ϕ del electrón.

29. Rayos gamma (fotones de alta energía), con una energía igual a 1.02 MeV, son dispersados por electrones inicialmente en reposo. Si la dispersión es simétrica, es decir, si $\theta = \phi$ en la figura 3.24, encuentre a) el ángulo de dispersión θ y b) la energía de los fotones dispersados.

30. Si la energía máxima impartida a un electrón durante un evento de dispersión Compton es de 30 keV, ¿cuál es la longitud de onda del fotón incidente? (*Sugerencia:* ¿Cuál es el ángulo de dispersión para una transferencia máxima de energía?

31. Un fotón con energía inicial de 0.1 MeV experimenta dispersión Compton a un ángulo de 60°. Encuentre a) la energía del fotón dispersado, b) la energía cinética de retroceso del electrón y c) el ángulo de retroceso del electrón.

32. Un núcleo excitado de fierro (Fe) (con masa de 57 u) regresa a su estado de mínima energía a través de la emisión de un fotón. La energía disponible a partir de esta transición es de 14.4 keV. a) ¿Cuánto se reduce la energía del fotón a partir de la cantidad inicial de 14.4 keV por tener que compartir energía con el átomo en retroceso? b) ¿Cuál es la longitud de onda del fotón emitido?

33. Demuestre que la fórmula de Compton

$$\lambda' - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

se obtiene cuando las expresiones para la energía y la cantidad de movimiento del electrón, (ecuación 3.33) y (ecuación 3.34), respectivamente, se sustituyen en la expresión de energía relativista

$$E_e^2 = p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4$$

34. Encuentre la energía de un fotón de rayos X que puede impartir una energía máxima de 50 keV a un electrón por colisión de Compton.
35. Compton utilizó fotones con longitud de onda igual a 0.0711 nm. a) ¿Cuál es la energía de estos fotones? b) ¿Cuál es la longitud de onda de los fotones dispersados a un ángulo de 180° (caso de dispersión hacia atrás) c) ¿Cuál es la energía de los electrones que se dispersan hacia atrás? d) ¿Cuál es le energía de retroceso de los electrones en este caso?
36. Un fotón posee una energía de 80 keV después de experimentar dispersión Compton, y el electrón retrocede con una energía de 25 keV. a) Encuentre la longitud de onda del fotón incidente. b) Encuentre el ángulo al que se dispersa el fotón. c) Encuentre el ángulo al que retrocede el electrón.
37. Radiación de rayos X originada en un blanco de molibdeno (0.616 Å) incide sobre un cristal cuyos planos atómicos adyacentes están separados por una distancia igual a 4×10^{-10} m. Encuentre los tres ángulos más pequeños a los que se presentan los máximos de intensidad en el haz difractado.
38. A medida que un cristal simple se hace girar en un espectrómetro de rayos X (figura 3.22a), muchos planos paralelos de átomos junto a AA y BB producen haces fuertemente difractados. En la figura P3.8 se muestran dos de tales planos. a) Determine geométricamente las separaciones interplanares d_1 y d_2 en términos de d_0. b) Encuentre los ángulos (con respecto al plano superficial AA) de los máximos de intensidad $n = 1, 2$ y 3 desde planos con separación d_1. Sea $\lambda = 0.616$ Å y $d_0 = 4$ Å. Observe que una estructura cristalina dada (por ejemplo, cúbica) posee separaciones interplanares, con razones características, que producen patrones de difracción característicos. De esta forma, para inferir la estructura cristalina puede usar la medición de la posición angular de los rayos X difractados.

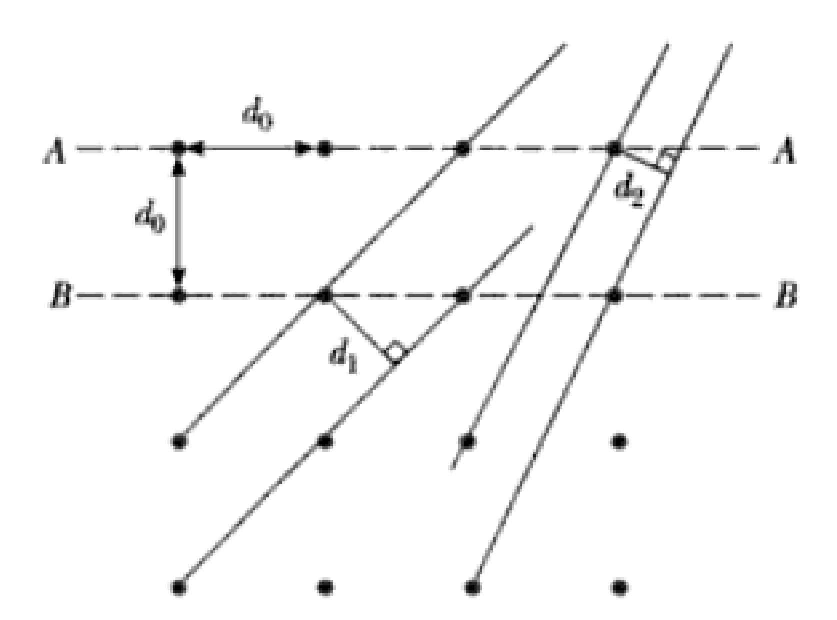


Figura P3.38 Planos atómicos en una partícula cúbica.

39. *Determinación del número de Avogadro con rayos X.* Rayos X provenientes de un blanco de molibdeno inciden contra un cristal de NaCl cuya disposición atómica se muestra en la figura P3.39. Si la densidad del NaCl es de 2.17 g/cm³ y se encuentra que el máximo de difracción $n = 1$ desde planos separados por d se presenta a $\theta = 6.41°$, calcule el número de Avogadro. (*Sugerencia*: Primero determine d. Use la figura P3.39 para determinar el número de moléculas de NaCl por celda primaria e iguale la masa por unidad de volumen de la celda primaria con la densidad.)

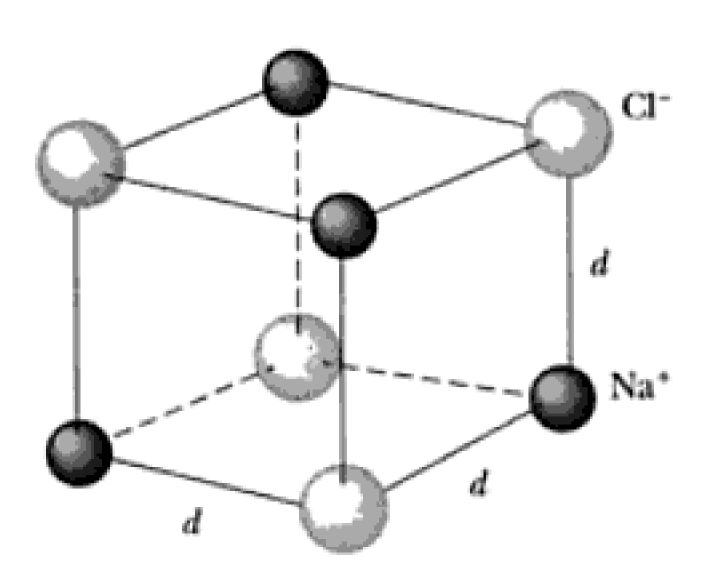


Figura P3.39 Celda primaria de NaCl.

3.7 ¿La gravedad afecta a la luz? (opcional)

40. Al deducir expresiones para el cambio en la frecuencia de un fotón que cae o sube en un campo gravitacional, se han supuesto un cambio pequeño en frecuencia y una masa constante del fotón, igual a hf/c^2. Suponga que una estrella es tan densa que Δf no es pequeña. a) Demuestre que f', la frecuencia del fotón en ∞, está relacionada con f, la frecuencia del fotón en la superficie de la estrella, por

$$f' = fe^{-GM_s/R_sc^2}$$

b) Demuestre que esta expresión se reduce a la ecuación 3.39 para M_s/R_s pequeña. (*Sugerencia*: La disminución de energía del fotón, $h\,df$, a medida que éste se aleja de la estrella una distancia dr, es igual al trabajo realizado en contra de la gravedad, $F_G\,dr$.)
41. Si el Sol se contrajese y se convirtiera en un hoyo negro, a) ¿cuál sería su radio aproximado y b) por qué factor aumentaría su densidad?

PROBLEMAS ADICIONALES

42. Dos fuentes luminosas se utilizan en un experimento fotoeléctrico para determinar la función trabajo para una superficie metálica particular. Cuando se usa luz verde de una lámpara de mercurio ($\lambda = 546.1$ nm), un potencial de frenado de 1.70 V reduce la fotocorriente a cero. a) Con base en esta medición, ¿cuál es la función trabajo para este metal? b) ¿Qué potencial de frenado deberá observarse cuando se use luz amarilla de un tubo de descarga de helio ($\lambda = 587.5$ nm)?
43. En una colisión Compton con un electrón, un fotón de luz violeta ($\lambda = 4\,000$ Å) es dispersado hacia atrás en un ángulo de 180°. a) ¿Cuánta energía (eV) se transfiere al electrón en esta colisión? b) Compare su resultado con la energía que adquiriría este electrón en un proce-

so fotoeléctrico con el mismo fotón. c) ¿Podría la luz violeta expulsar electrones desde un metal por colisión Compton? Explique su respuesta.

44. Luz ultravioleta incide normalmente sobre la superficie de cierta sustancia. La función trabajo de los electrones en esta sustancia es 3.44 eV. La luz incidente tiene una intensidad de 0.055 W/m^2. Los electrones son emitidos fotoeléctricamente con una velocidad máxima de 4.2×10^5 m/s. ¿Cuál es el número máximo de electrones emitidos por segundo desde un centímetro cuadrado de la superficie? Suponga que ninguno de los electrones se refleja desde o calienta la superficie.

45. Los datos siguientes fueron encontrados a partir de la fotoemisión desde calcio:

λ (nm)	253.6	313.2	365.0	404.7
V_s (V)	1.95	0.98	0.50	0.14

Grafique V_s contra f, y, a partir de la gráfica, obtenga la constante de Planck, la frecuencia crítica y la función trabajo para el calcio.

46. Un fotón de rayos X de 0.500 nm es desviado un ángulo de 134° en un experimento de dispersión Compton. ¿A qué ángulo (con respecto al haz incidente) se encuentra el electrón en retroceso?

47. Un electrón inicialmente en reposo retrocede a partir de una colisión frontal con un fotón. Demuestre que la energía cinética adquirida por el electrón es $2hf\alpha/(1 + 2\alpha)$, donde α es la razón de la energía inicial del fotón a la energía en reposo del electrón.

48. En un experimento de dispersión Compton, un fotón de rayos X se dispersa en un ángulo de 17.4° con respecto a un electrón libre inicialmente en reposo. El electrón retrocede a una velocidad de 2 180 km/s. Calcule a) la longitud de onda del fotón incidente y b) el ángulo al que se dispersa el electrón.

4

Naturaleza corpuscular de la luz

Contenido del capítulo

En el capítulo 3 se revisó la evidencia sobre la naturaleza ondulatoria de la radiación electromagnética y se mencionaron varios misterios experimentales del primer cuarto del siglo XX que, para su solución, requerían un comportamiento corpuscular de la radiación. En particular, se analizó la idea revolucionaria de Planck de la cuantización de la energía de los osciladores en las paredes de un radiador perfecto, la generalización que hizo Einstein de la cuantización de la energía a la luz en el efecto fotoeléctrico y la confirmación de Compton de la existencia del fotón como una partícula que transporta cantidad de movimiento en experimentos de dispersión de rayos X.

En este capítulo se analizará la evidencia de la naturaleza corpuscular de la materia. Sólo se mencionarán brevemente a los primeros expertos en átomos y la atención se centrará en los desarrollos a partir de 1800 sobre la composición de los átomos. En particular, se revisarán los ingeniosos y fascinantes experimentos que llevaron al descubrimiento del electrón, del protón, del núcleo y del importante modelo planetario del átomo de Rutherford-Bohr.

4.1 NATURALEZA ATÓMICA DE LA MATERIA

Afirmar que el mundo está compuesto de átomos es, hoy día, común. Debido a que la representación atómica de la realidad suele aceptarse sin cuestionamientos, uno podría perderse la rica y fascinante historia de cómo se demostró la existencia de los átomos. El descubrimiento y la demostración del carácter granular del mundo parece especialmente fascinante por dos razones. Primera,

debido al tamaño de los átomos individuales, las mediciones de propiedades atómicas suelen ser indirectas e implican necesariamente manipulaciones inteligentes de mediciones a gran escala para inferir propiedades de partículas microscópicas. Segunda, la evolución histórica de las ideas acerca de la atomicidad muestra claramente el camino verdadero en que avanza la ciencia. Este avance a menudo es no lineal e implica una interdependencia de la física, la química y la matemática, y la convergencia de muchas líneas de investigación diferentes.

También hay una idea romántica de rendir homenaje a los grandes atomistas que fueron capaces de elegir principios de organización a partir de las confusas ideas de mercado de su época: Demócrito y Leucipo quienes especularon que el sustrato inmutable del mundo estaba constituido por átomos en movimiento; el gallardo químico francés Lavoisier y su esposa (vea la figura 4.1) quienes establecieron la conservación de la materia en muchos experimentos químicos cuidadosos; Dalton quien percibió la atomicidad de la naturaleza en la ley de proporciones múltiples de los compuestos; Avogadro quien en un artículo bastante oscuro y poco apreciado, postuló que todos los gases puros a la misma temperatura y presión tienen el mismo número de moléculas por unidad de volumen; y Maxwell,[1] quien con su teoría cinético-molecular de los gases, demostró cómo las cantidades macroscópicas, como la presión y la temperatura, pueden deducirse a partir de promedios sobre distribuciones de propiedades moleculares. La lista podría ser más larga. Se abrevia mencionando a Jaques



Figura 4.1 Antoine Lavoisier (químico francés, 1743-1794) y Madame Lavoisier establecieron el principio de conservación de la masa en las reacciones químicas. En este cuadro parecen tener en mente algo más que sólo la química. (© *Bettman/CORBIS.*)

[1]Maxwell fue doblemente genio. Ya sea por su teoría de la electricidad y el magnetismo como por su teoría cinética de los gases.

Perrin y al ubicuo Albert Einstein,[2] quienes llevaron a cabo un importante trabajo teórico y experimental concerniente al movimiento browniano, el movimiento en zig-zag de pequeñas partículas suspendidas debido a impactos moleculares. El trabajo de estas personas produjo la confirmación adicional de la hipótesis atómico-molecular y dio por resultado una mejor medida del número de Avogadro después de mucho tiempo, hasta principios del siglo XX.

4.2 COMPOSICIÓN DE LOS ÁTOMOS

Ahora la atención estará enfocada en contestar la siguiente pregunta, más bien peligrosa: "Si la materia está constituida principalmente por átomos, ¿de qué están hechos éstos?" De nuevo, pueden mencionarse algunos descubrimientos fundamentales que demostraron que los átomos están compuestos de partículas ligeras con carga negativa que orbitan alrededor de un núcleo pesado con carga positiva. Tales descubrimientos fueron:

- *El descubrimiento de la ley de electrólisis en 1833 por Michael Faraday.* Mediante un trabajo experimental cuidadoso sobre electrólisis, Faraday demostró que la masa de un elemento liberado en un electrodo es directamente proporcional a la carga transferida y al peso atómico del material liberado, pero inversamente proporcional a la valencia del material liberado.
- *La identificación de los rayos catódicos como electrones y la medición de la razón carga —masa* (e/m_e) *de estas partículas por Joseph John (J.J.) Thomson en 1897.* Thomson midió las propiedades de las partículas negativas emitidas por diferentes metales y encontró que el valor de e/m_e siempre era el mismo. Así, llegó a la conclusión de que ¡el electrón es un elemento constitutivo de toda la materia!
- *La medición exacta de la carga del electrón* (e) *por Robert Millikan en 1909.* Al combinar su resultado para (e) con el valor e/m_e de Thomson, Millikan demostró de manera irrefutable la existencia de partículas que son aproximadamente 1 000 veces menos masivas que el átomo de hidrógeno.
- *El establecimiento del modelo nuclear del átomo por Ernest Rutherford y sus colaboradores Hans Geiger y Ernest Marsden en 1913.* Al dispersar partículas α (núcleos cargados de átomos de helio emitidos espontáneamente en procesos de desintegración radiactiva) muy energéticas utilizando como blanco hojas metálicas, Rutherford estableció que los átomos están constituidos por un núcleo compacto con carga positiva (diámetro $\approx 10^{-14}$ m) rodeado de una nube de electrones en órbita (diámetro de la nube de electrones $\approx 10^{-10}$ m).

A continuación se describirán con mayor detalle estos estudios. Se empezará con un breve ejemplo de los experimentos de Faraday, en particular la electrólisis de una solución sal común (NaCl). Faraday descubrió que si 96 500 C de carga (1 faraday) se hacen pasar a través de tal solución, 23 g de Na se depositan en el cátodo y 35.5 g de cloro gaseoso burbujean en el ánodo (figura 4.2). En este caso se libera exactamente 1 gramo de peso atómico o 1 mol de cada elemento porque ambos son monovalentes. Para elementos bivalentes o trivalentes, se liberan exactamente $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ de mol, respectivamente. Como era de

[2]Gran parte de los primeros trabajos de Einstein estaba relacionado con el análisis molecular de soluciones y con la determinación de radios moleculares y el número de Avogadro. Vea A. Pais, *"Subtle is the Lord..." The Science and the Life of Albert Einstein*, Nueva York, Oxford University Press, 1982, capítulo 5.

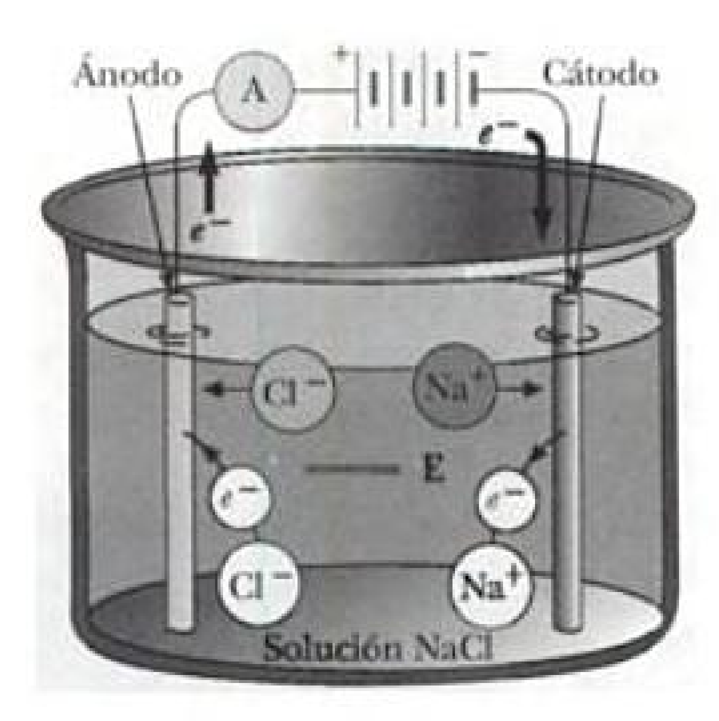


Figura 4.2 Electrólisis de una solución de NaCl.

esperar, al duplicar la cantidad de carga se duplica la masa del elemento neutro liberado. Los resultados de Faraday pueden plantearse en forma de ecuación como

$$m = \frac{(q)\,(\text{masa molar})}{(96\,500\ \text{C})\,(\text{valencia})} \tag{4.1}$$

Ley de Faraday de la electrólisis

donde m es la masa de la sustancia liberada en gramos, q es la carga total que pasa en coulombs, la masa molar está en gramos y la valencia es adimensional.

EJEMPLO 4.1 La electrólisis de $BaCl_2$

¿Cuántos gramos de bario y cloro se obtienen si se hace pasar una corriente de 10 A a través de una solución de $BaCl_2$ durante 1 h? El bario tiene un peso molar de 137 g y una valencia de 2. El cloro tiene un peso molar de 35.5 g y una valencia de 1.

Solución Usando la ecuación 4.1 y $q = It$, donde I es la corriente y t es el tiempo, se tiene

$$m_{Ba} = \frac{(q)\,(\text{masa molar})}{(96\,500\ \text{C})\,(\text{valencia})}$$

$$= \frac{(10\ \text{C/s})\,(3\,600\ \text{s})\,(137\ \text{g})}{(96\,500\ \text{C})\,(2)} = 25.6\ \text{g}$$

$$m_{Cl} = \frac{(10\ \text{C/s})\,(3\,600\ \text{s})\,(35.5\ \text{g})}{(96\,500\ \text{C})\,(1)} = 13.2\ \text{g}$$

La ley de Faraday de la electrólisis se puede explicar en términos de la representación atómica que se muestra en la figura 4.2. A través de la solución pasa carga en forma de iones, que poseen un exceso o un defecto de uno o más electrones. Bajo la influencia del campo eléctrico producido por la batería, estos iones se mueven hacia el ánodo o hacia el cátodo, donde respectivamente pierden o ganan electrones y son liberados como átomos neutros.

Aunque en 1833 estaba lejos de ser evidente, la ley de Faraday de la electrólisis confirmó tres importantes partes de la representación atómica. Primero, ofreció pruebas de que la materia consta de moléculas y que las moléculas constan de átomos. Segundo, demostró que la carga está cuantizada, porque a los electrodos sólo se transfieren números enteros de carga. Tercero, demostró que las partes subatómicas de los átomos son cargas positivas y negativas, aunque la masa y el tamaño de la carga de estas partículas subatómicas permanecían desconocidas.



Figura 4.3 J. J. Thomson. (*AIP Emilio Segrè Visual Archives/W. F. Meggers Collection.*)

El siguiente paso fundamental en la explicación de la composición de los átomos fue dado por Joseph John (J. J.) Thomson (vea la figura 4.3). Su descubrimiento en 1897[3] de que los "rayos" observados en descargas en gases a baja presión eran provocados realmente por partículas negativas (electrones) terminó un debate que ya tenía casi 30 años: si los rayos catódicos eran partículas u ondas. Contraria a nuestra más bien gastada aceptación del electrón, muchos de los distinguidos contemporáneos de Thomson respondieron con pronunciamientos de incredulidad a la idea de que los electrones eran un elemento constitutivo de toda la materia. Gran parte de la oposición al descubrimiento de Thomson surgió del hecho de que era necesario abandonar el concepto recientemente establecido del átomo como una entidad indivisible. El descubrimiento de Thomson del electrón perturbó este nuevo orden establecido en la teoría atómica y provocó nuevos desarrollos sorprendentes: el modelo nuclear de Rutherford y la primera teoría satisfactoria de la emisión de luz por sistemas atómicos: el modelo del átomo de Bohr.

En la figura 4.4 se muestra el tubo original al vacío utilizado por Thomson en sus experimentos para medir e/m_e. En la figura 4.5 se muestran las diversas partes del aparato de Thomson para facilitar su referencia. Se aceleran electrones del cátodo hacia el ánodo, se coliman utilizando ranuras en los ánodos, y luego se les permite desplazarse hacia una región en la que hay campos eléctrico y magnético cruzados (perpendiculares). Los campos **E** y **B** aplicados de manera simultánea se ajustan primero para producir un haz no desviado. Si a continuación se apaga el campo **B**, el campo **E** por sí sólo produce una desviación mensurable del haz sobre la pantalla fosforescente. A partir del tamaño de la desviación y los valores medidos de **E** y **B** es posible determinar la razón entre carga y masa, e/m_e. La característica verdaderamente ingeniosa de este experimento es la forma en que Thomson midió v_x, la componente horizontal de la velocidad del haz. Lo hizo equilibrando las fuerzas magnética y eléctrica. En efecto, creó un selector de velocidad, que podía seleccionar del haz aquellas partículas cuya velocidad estuviera en un estrecho intervalo de valores. Este dispositivo fue bastante utilizado en el primer cuarto del siglo XX

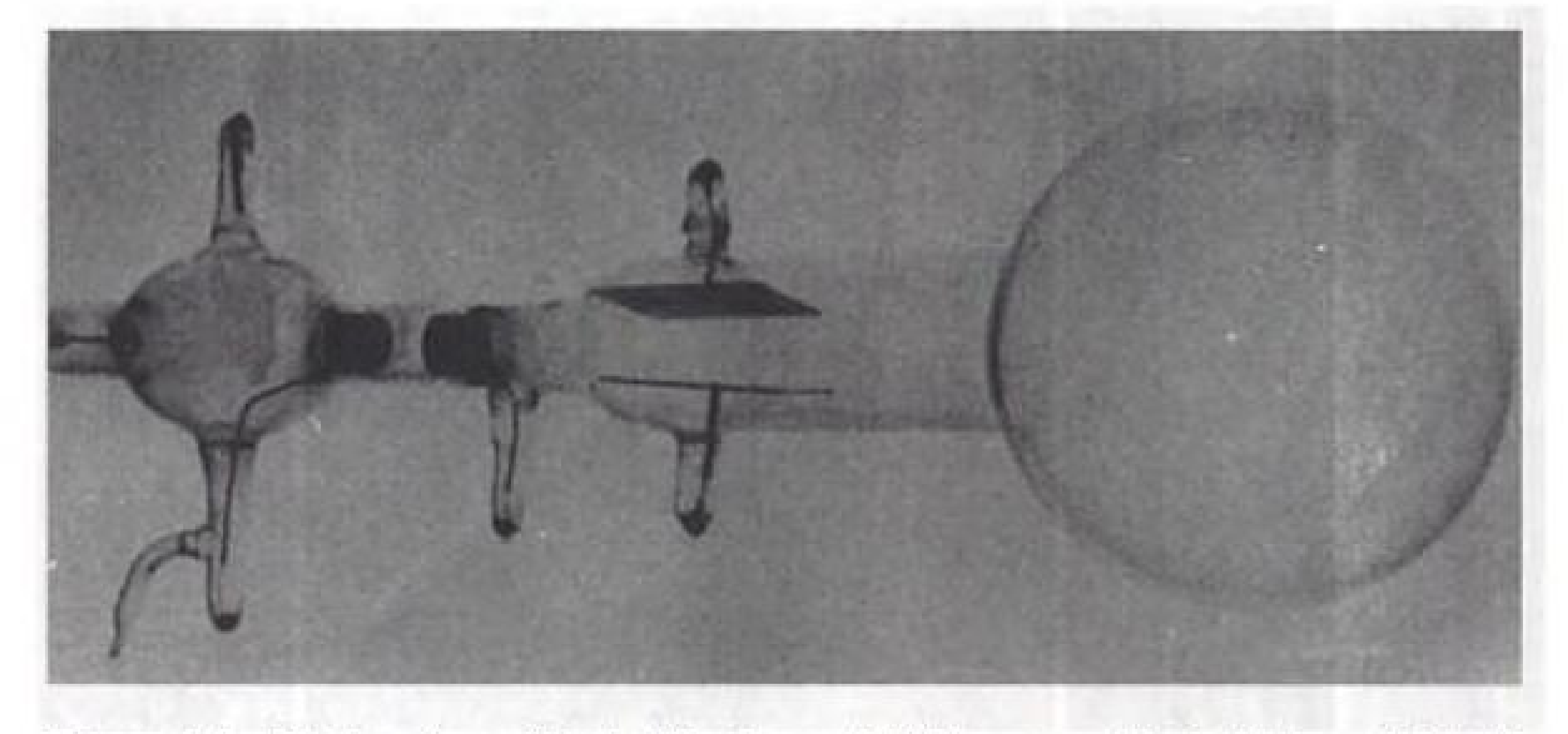


Figura 4.4 El tubo e/m_e original utilizado por J. J. Thomson. (*Según la figura 1.3, p. 7, R. L. Sproull y W. A. Phillips,* Modern Physics, *3a. Ed., Nueva York, John Wiley & Sons, 1980.*)

[3] J. J. Thomson, *Phil. Mag.* 44:269, 1897.

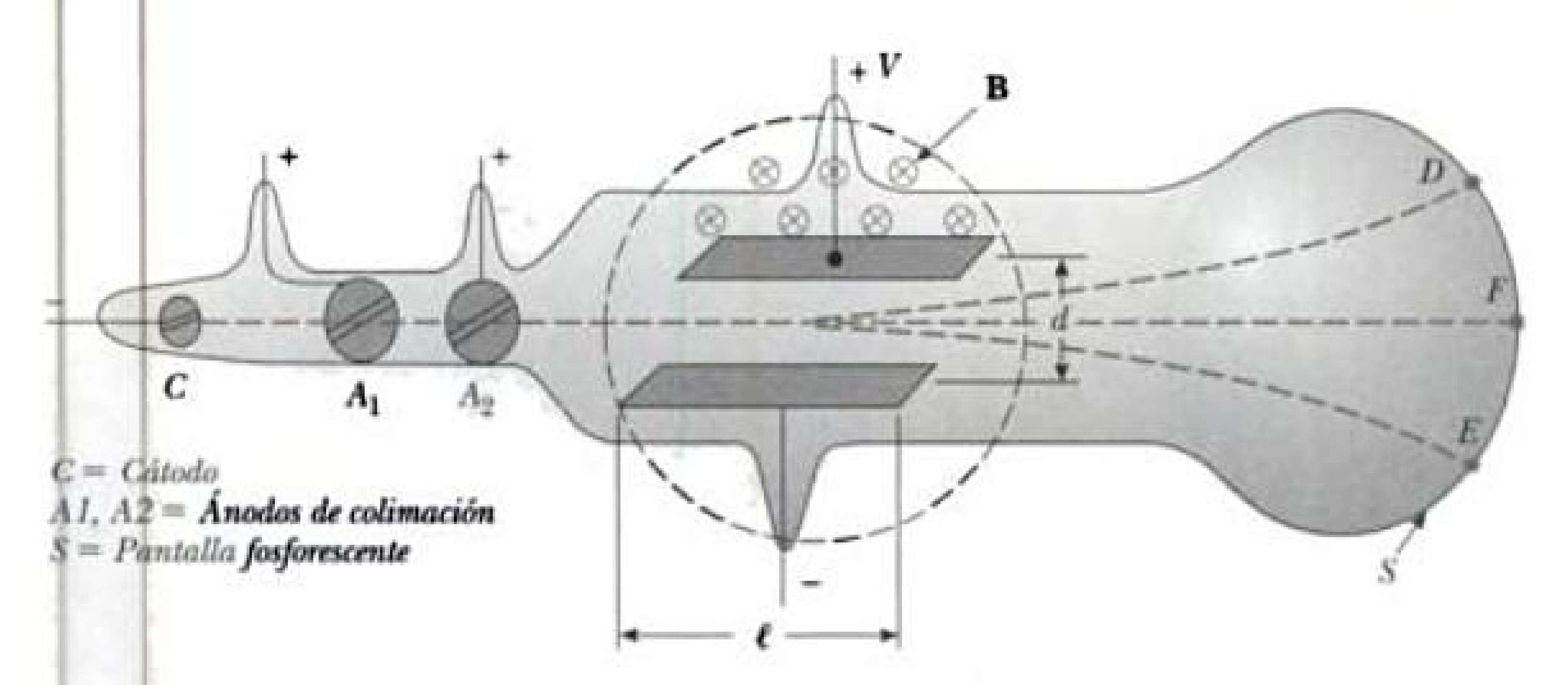


Figura 4.5 Diagrama del tubo e/m_e de Thomson. (Estampado según J. J. Thomson. *Philosophical Magazine* (5)44:293, 1897.) Los electrones sometidos a sólo un campo eléctrico llegan a *D*, mientras que los electrones sometidos sólo a un campo magnético llegan a *E*. Cuando los campos eléctrico y magnético están presentes y ajustados idóneamente, los electrones no experimentan desviación neta y llegan a *F*.

para medir la razón entre carga y masa (q/m) de muchas partículas y en los primeros espectrómetros de masa.

Para tener una idea más clara del experimento de Thomson, se analizará el movimiento de los electrones en su aparato. En la figura 4.6 se muestra la trayectoria de un haz de partículas negativas que entra en la región de los campos **E** y **B** con una velocidad horizontal v_x. Primero considere sólo el campo **E** entre las placas. Para este caso, v_x permanece constante durante todo el movimiento porque no hay ninguna fuerza que actúe en la dirección *x*. La componente *y* de la velocidad, v_y, es constante en todas partes, excepto entre las placas, donde el electrón experimenta una aceleración constante hacia arriba, debido a la fuerza eléctrica, y sigue una trayectoria parabólica. Para encontrar el ángulo de deflexión, θ, es necesario encontrar los valores v_x y v_y. Debido a

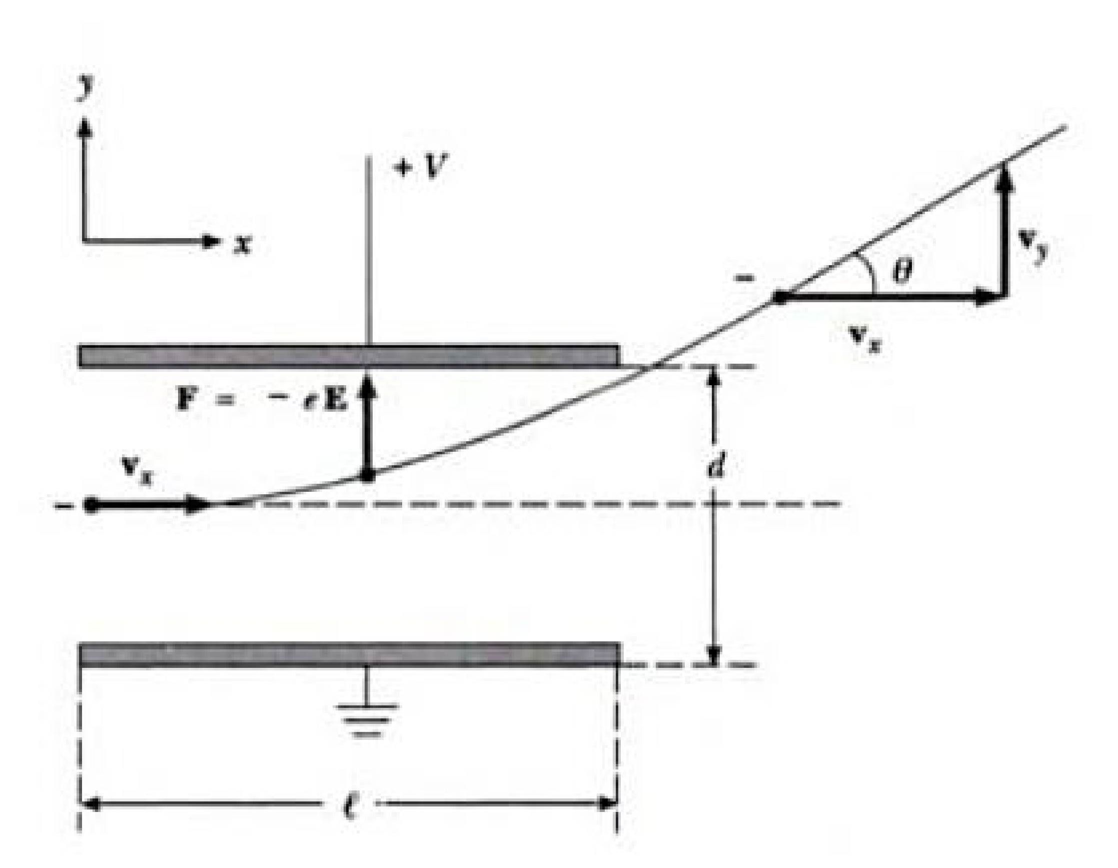


Figura 4.6 Desviación de partículas negativas por un campo eléctrico.

que inicialmente v_y es cero, el electrón abandona las placas con una componente y de la velocidad dada por

$$v_y = a_y t \tag{4.2}$$

Debido a que $a_y = F/m_e = Ee/m_e = Ve/m_e d$, y $t = \ell/v_x$, donde t y ℓ son las dimensiones de la región entre las placas y V es el potencial aplicado, se obtiene

$$v_y = \frac{V\ell e}{m_e v_x d} \tag{4.3}$$

A partir de la figura 4.6, $\tan\theta = v_y/v_x$, de modo que al usar la ecuación 4.3 se obtiene

$$\tan\theta = \frac{V\ell}{v_x^2 d}\left(\frac{e}{m_e}\right) \tag{4.4}$$

Suponiendo desviaciones pequeñas, $\tan\theta \approx \theta$, por lo que se tiene

$$\theta \approx \frac{V\ell}{v_x^2 d}\left(\frac{e}{m_e}\right) \tag{4.5}$$

Observe que θ, la desviación del haz, V, el voltaje aplicado a las placas deflectoras horizontales y d y ℓ, la separación y longitud, respectivamente, de las placas deflectoras horizontales, pueden medirse. Así, basta medir v_x para determinar e/m_e. Thomson determinó v_x al aplicar un campo **B** y ajustar su magnitud para equilibrar justamente la desviación del campo **E**, aún presente. Al igualar las magnitudes de las fuerzas eléctrica y magnética se obtiene

$$qE = qv_x B$$

o bien

$$v_x = \frac{E}{B} = \frac{V}{Bd} \tag{4.6}$$

Al sustituir la ecuación 4.6 en la ecuación 4.5, de inmediato se obtiene una fórmula para e/m_e expresada por completo en términos de cantidades mensurables:

$$\frac{e}{m_e} = \frac{V\theta}{B^2\ell d} \tag{4.7}$$

El valor actualmente aceptado de e/m_e es 1.758803×10^{11} C/kg. Aunque el valor original de Thomson era aproximadamente de sólo 1.1×10^{11} C/kg, experimentos previos sobre la electrólisis de iones de hidrógeno ya habían proporcionado valores de q/m para el hidrógeno de aproximadamente 10^8 C/kg. Fue evidente que Thomson había descubierto ¡una partícula cuya masa era casi 1 000 veces menor que el átomo más pequeño! En sus observaciones, Thomson notó que la razón e/m_e es independiente del gas utilizado y del metal del cátodo. Además, encontró que las partículas emitidas cuando las descargas eléctricas se hacían pasar por gases diferentes eran iguales que las observadas en el efecto fotoeléctrico. Con base en estas observaciones, Thomson concluyó que estas partículas debían ser un elemento constitutivo de toda la materia. ¡La humanidad había logrado su primer atisbo hacia el mundo subatómico!

EJEMPLO 4.2 Desviación de un haz de electrones por campos E y B

Use el valor aceptado de e/m_e para calcular el campo magnético necesario para producir una desviación de 0.20 rads en el experimento de Thomson, suponiendo los valores $V = 200$ V, $\ell = 5$ cm y $d = 1.5$ cm (los valores aproximados usados por Thomson). Compare este valor de B con el campo magnético de la Tierra.

Solución Debido a que $e/m_e = V\theta/B^2\ell d$, al despejar B se obtiene

$$B = \sqrt{\frac{V\theta}{\ell d(e/m_e)}}$$

de modo que

$$B = \left[\frac{(200\text{ V})(0.20\text{ rads})}{(0.050\text{ m})(0.015\text{ m})(1.76 \times 10^{11}\text{ C/kg})}\right]^{1/2}$$
$$= [3.03 \times 10^{-7}\text{ V}\cdot\text{kg/m}^2\text{ C}]^{1/2}$$
$$= [3.03 \times 10^{-7}\text{ N}^2/(\text{m/s})^2\text{ C}^2]^{1/2}$$
$$= 5.5 \times 10^{-4}\text{ N/(m/s)}\cdot\text{C} = 5.5 \times 10^{-4}\text{ T}$$

Ya que la magnitud del campo magnético de la Tierra es aproximadamente igual a 0.5×10^{-4} T, se requiere un campo 11 veces más intenso que éste.

Ejercicio 1 Encuentre la velocidad horizontal v_x para este caso.

Respuesta 2.4×10^7 m/s $= 0.080c$, donde c es la velocidad de la luz.

Valor de Millikan de la carga elemental

En 1897, Thomson no hubiese podido determinar e o m_e por separado. No obstante, alrededor de dos años más tarde este gran experimentalista británico ya había asociado el valor aceptado de e (1.602×10^{-19} C) con los valores de 2.3×10^{-19} C para cargas emitidas por zinc al que iluminaba con luz ultravioleta y 1.602×10^{-19} C a las cargas producidas por rayos X ionizantes y emisiones del radio. También pudo concluir que "e es de la misma magnitud que la carga transportada por el átomo de hidrógeno en la electrólisis de soluciones". La técnica usada por Thomson y sus estudiantes para medir e es especialmente interesante porque constituye la primera aplicación de la técnica de la cámara de niebla en física y también representa el punto de partida para el famoso experimento de la gota de aceite de Millikan. Charles Wilson, uno de los alumnos de Thomson, había descubierto que los iones actúan como centros de condensación para gotas de agua cuando se enfría aire húmedo rápidamente por expansión. Thomson usó esta idea para formar nubes cargadas utilizando el aparato que se muestra en la figura 4.7a. Aquí Q es la carga total de la nube, W es el peso medido y v es la razón de caída o velocidad terminal. Thomson supuso que la nube estaba compuesta por gotas esféricas de masa constante (sin evaporación) y que la magnitud de la fuerza de fricción D sobre una sola gota que cae estaba dada por la ley de Stokes,

$$D = 6\pi a\eta v \tag{4.8}$$

donde a es el radio de la gota, η es la viscosidad del aire y v es la velocidad terminal de la gota. El siguiente procedimiento fue utilizado para determinar a y w, el peso de una sola gota. Debido a que v es constante, la gota está en equilibrio bajo la acción combinada de su peso, w, y la fuerza de fricción, D, como se muestra en la figura 4.7b. Por tanto, se requiere que $w = D$, o bien,

$$w = \tfrac{4}{3}\pi a^3\rho g = D = 6\pi a\eta v$$

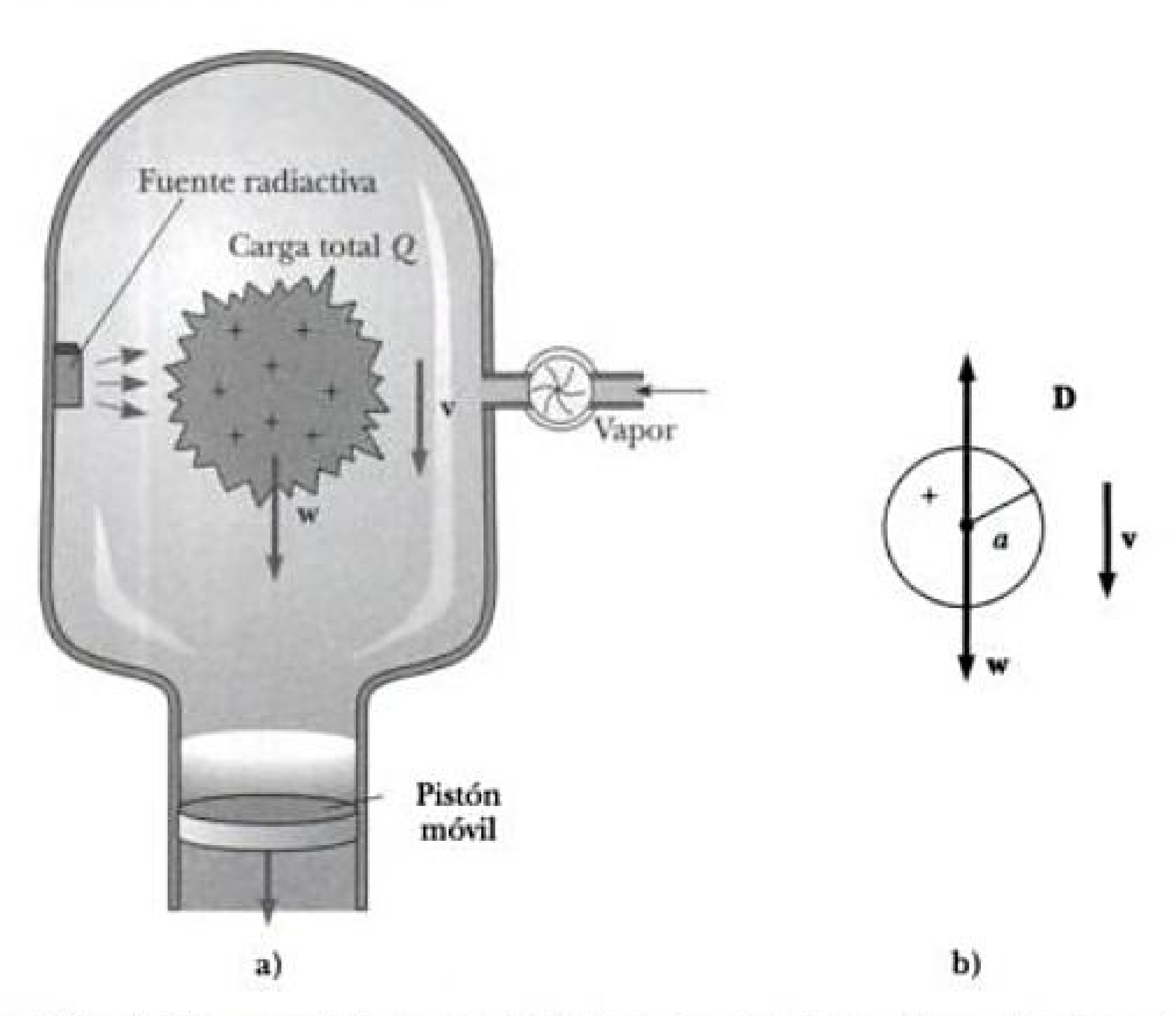


Figura 4.7 a) Diagrama del aparato de Thomson para determinar e. b) Una sola gota en la nube.

o bien

$$a = \sqrt{\frac{9\eta v}{2\rho g}} \tag{4.9}$$

donde ρ es la densidad de masa de la gota y g es la aceleración de caída libre. A partir del radio de la gota y de la densidad conocida es posible encontrar w, el peso. Una vez que se encuentra w, el número n de gotas (o el número de iones) está dado por W/w y la carga eléctrica e es igual a Q/n, en el supuesto de que cada gota sólo transporta una carga eléctrica. Aunque este método es ingenioso, es inexacto porque la teoría es válida sólo para una sola partícula y las partículas se suponen idénticas a fin de comparar la teoría con los experimentos realizados en una nube.

El tremendo avance de Millikan fue posible por su brillante idea de hacer que el experimento se "ajustara" a la teoría. Al observar gotas simples eliminó el problema de tener que suponer que todas las partículas eran idénticas y realizar mediciones inciertas en una nube. La idea básica de Millikan era medir la razón de caída de una simple gota sobre la que actuaban la gravedad y las fuerzas de fricción, aplicar la ley de Stokes para determinar el radio y la masa de la gota, medir luego la velocidad hacia arriba en un campo eléctrico opuesto y así determinar la carga total de una gota individual.[4] En la figura 4.8 se muestra un esquema del aparato de Millikan. Se deja que gotas de aceite cargadas por un atomizador pasen por un pequeño orificio en la placa superior de un capacitor de placas paralelas. Si estas gotas se iluminan lateralmente, parecen como estrellas brillantes contra un fondo negro, y es posible determinar

[4]En realidad, la idea de permitir que las cargas "caigan" bajo una combinación de campos gravitacional y eléctrico fue aplicada por primera vez por H. A. Wilson en 1903 a nubes cargadas de vapor de agua. Millikan cambió de vapor de agua a aceite a fin de evitar los problemas de cambiar la masa y el radio de la gotas provocados por la evaporación del agua.

Figura 4.8 Esquema del aparato de la gota de aceite de Millikan.

la razón de caída de cada gota.[5] Si a las placas del capacitor se aplica un campo electrostático de varios miles de volts por metro, la gota puede moverse lentamente hacia arriba, con una rapidez de *cientos* de centímetros por segundo. Debido a que la rapidez de caída es comparable, una simple gota de masa y radio constantes puede seguirse durante horas. Subiendo y cayendo de forma alternada, simplemente encendiendo y apagando el campo eléctrico. La atomicidad de la carga se muestra en forma directa al observar que después de una larga serie de mediciones de velocidades constantes hacia arriba se ve un cambio discontinuo o salto hacia una velocidad diferente *hacia arriba* (superior o inferior). Este cambio discontinuo es provocado por la atracción de un ion hacia la gota cargada y un cambio consecuente en la carga de la gota. Tales cambios se vuelven más frecuentes cuando se coloca entre las placas una fuente de radiación ionizante.

Determinación de Millikan de la carga electrónica

El análisis cuantitativo del experimento de Millikan empieza con la segunda ley de Newton aplicada a la gota de aceite, $\Sigma F_y = ma_y$. Debido a que la fuerza de fricción D es grande, rápidamente se alcanza una velocidad de caída constante, y se hacen todas las mediciones para el caso $a_y = 0$, o $\Sigma F_y = 0$. Si se supone que la magnitud de la fuerza de fricción es proporcional a la velocidad ($D = Cv$) y se consulta la figura 4.9, se encuentra

$$Cv - mg = 0 \qquad \text{(campo apagado)}$$

$$q_1E - mg - Cv_1' = 0 \qquad \text{(campo encendido)}$$

Al eliminar C de estas expresiones se obtiene

$$q_1 = \frac{mg}{E}\left(\frac{v + v_1'}{v}\right) \tag{4.10}$$

[5] ¡Quizá la razón de que la expresión "las estrellas brillantes de Millikan" haya fracasado como imagen poética y romántica tiene algo que ver con las generaciones de estudiantes de física que han experimentado alucinaciones, cegueras casi seguras, ataques de migraña, etc., mientras repetían su experimento!

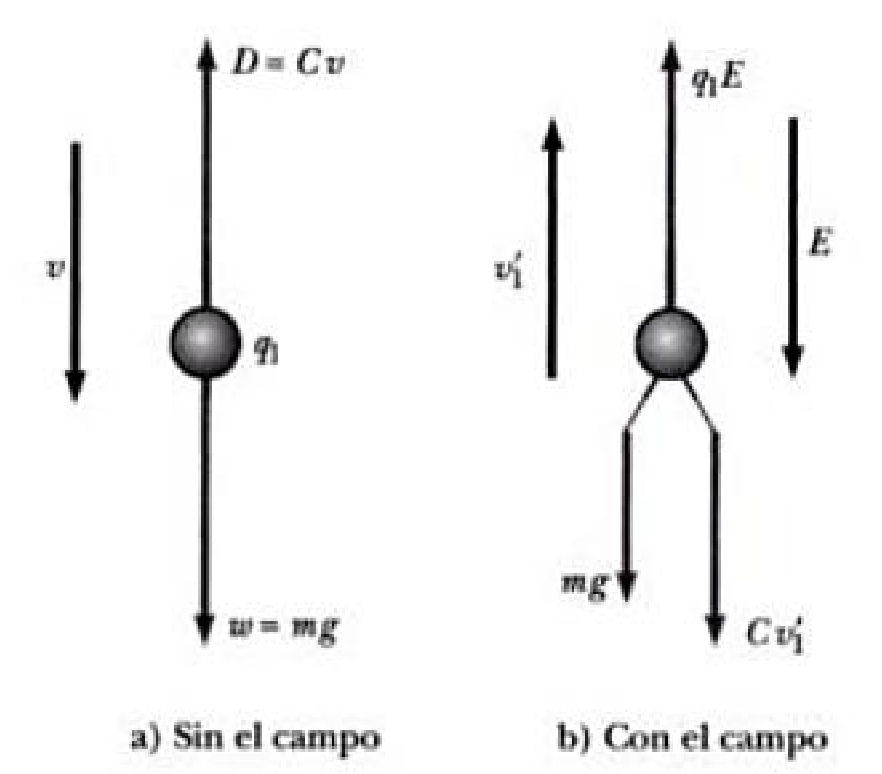


Figura 4.9 Fuerzas sobre una gota de aceite cargada, en el experimento de Millikan.

Cuando la gota experimenta un cambio discontinuo en su *velocidad hacia arriba* desde v_1' a v_2' (m, g, E, y v permanecen constantes), su nueva carga q_2 está dada por

$$q_2 = \frac{mg}{E}\left(\frac{v + v_2'}{v}\right) \tag{4.11}$$

Al dividir la ecuación 4.10 entre la ecuación 4.11 se obtiene

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{v + v_1'}{v + v_2'} \tag{4.12}$$



Robert Millikan (1868-1953). Aunque Millikan (*izquierda*) estudió griego en la universidad Oberlin, fue seducido por la física durante su capacitación como graduado después de enseñar en una escuela durante algunos años. Fue el primer estudiante de la Universidad de Columbia que recibió un doctorado en física, en 1895. Luego de terminar su posdoctorado en Alemania bajo la tutela de Planck y Nernst, Millikan obtuvo un puesto académico en la Universidad de Chicago en 1910, donde trabajó con Michelson. Recibió el premio Nobel en 1923 por su famosa determinación experimental de la carga del electrón. También se le recuerda por su cuidadoso trabajo experimental para comprobar la teoría del efecto fotoeléctrico, deducida por Einstein. Después de la Primera Guerra Mundial se trasladó al California Institute of Technology, donde trabajó en física atmosférica y permaneció hasta su retiro.

La ecuación 4.12 constituye una demostración extraordinariamente directa y poderosa de la cuantización de la carga, ya que si las razones de velocidades sucesivas son razones de números enteros, entonces ¡cargas consecutivas en la gota deben ser múltiplos de la misma carga elemental! ¡Las mediciones experimentales de Millikan de las razones de velocidad confirmaron elegantemente esta cuantización de la carga con un rango de 1% de precisión![6]

Hasta el momento, nuestros argumentos han sido bastante generales y sólo han supuesto que la fuerza de fricción sobre la gota es proporcional a su velocidad. Para determinar el valor real de la carga del electrón, e, es necesario determinar la masa de la gota, como puede observarse a partir de la ecuación 4.10. Como ya se observó, el radio a de la gota puede determinarse aplicando la ley de Stokes. Este valor de a, a su vez, puede usarse para encontrar m a partir de la densidad del aceite, ρ. En este procedimiento, a es

$$a = \sqrt{\frac{9\eta v}{2\rho g}} \tag{4.9}$$

y la masa de la gota puede expresarse como

$$m = \rho \cdot \text{volumen} = \rho \tfrac{4}{3}\pi a^3 \tag{4.13}$$

En el ejemplo 4.3 se ilustra esta técnica para determinar a aplicando la ley de Stokes.

EJEMPLO 4.3 Determinación experimental de *e*

En un experimento de Millikan la distancia de ascenso y descenso de una gota es 0.600 m y el tiempo medio de caída (fuera del campo) es 21 s. Los tiempos consecutivos de ascenso observados son 46, 15.5, 28.1, 12.9, 45.3 y 20 s.

a) Demuestre que la carga está cuantizada.

Solución La carga está cuantizada si q_1/q_2, q_2/q_3, q_3/q_4, etc., son razones de números enteros pequeños. Debido a que

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{v + v_1'}{v + v_2'}, \quad \frac{q_2}{q_3} = \frac{v + v_2'}{v + v_3'}, \text{ etc.}$$

Es necesario encontrar las velocidades. Así,

$$v = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{0.600 \text{ cm}}{21 \text{ s}} = 0.0286 \text{ cm/s}$$

$$v_1' = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{0.600 \text{ cm}}{46 \text{ s}} = 0.0130 \text{ cm/s}$$

$$v_2' = 0.600/15.5 = 0.0387 \text{ cm/s}$$

$$v_3' = 0.600/28.1 = 0.0214 \text{ cm/s}$$

$$v_4' = 0.600/12.9 = 0.0465 \text{ cm/s}$$

$$v_5' = 0.600/45.3 = 0.0132 \text{ cm/s}$$

$$v_6' = 0.600/20 = 0.0300 \text{ cm/s}$$

de modo que

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{v + v_1'}{v + v_2'} = \frac{0.0286 + 0.0130}{0.0286 + 0.0387} = 0.618 \approx \frac{3}{5}$$

$$\frac{q_2}{q_3} = \frac{v + v_2'}{v + v_3'} = \frac{0.0286 + 0.0387}{0.0286 + 0.0214} = 1.35 \approx \frac{4}{3}$$

$$\frac{q_3}{q_4} = \frac{v + v_3'}{v + v_4'} = \frac{0.0286 + 0.0214}{0.0286 + 0.0465} = 0.666 \approx \frac{2}{3}$$

$$\frac{q_4}{q_5} = \frac{v + v_4'}{v + v_5'} = \frac{0.0286 + 0.0465}{0.0286 + 0.0132} = 1.80 \approx \frac{9}{5}$$

$$\frac{q_5}{q_6} = \frac{v + v_5'}{v + v_6'} = \frac{0.0286 + 0.0132}{0.0286 + 0.0300}$$

$$= 0.713 \approx 8/11 \quad \text{o } 7/10$$

b) Si la densidad del aceite es 858 kg/m^3 y la viscosidad del aire es 1.83×10^{-5} kg/m·s, encuentre el radio, el volumen y la masa de la gota usada en este experimento.

Solución El radio de la gota es

$$a = \sqrt{\frac{9\eta v}{2\rho g}}$$

[6] R. A. Millikan, *Phys. Rev.* 1911, p. 349.

$$= \left[\frac{9(1.83 \times 10^{-5}\ \text{kg/m}\cdot\text{s})(0.0286 \times 10^{-2}\ \text{m/s})}{2(858\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)}\right]^{1/2}$$
$$= [2.80 \times 10^{-12}\ \text{m}^2]^{1/2}$$
$$= 1.67 \times 10^{-6}\ \text{m} \quad \text{o } 1.67\ \mu\text{m}$$

El volumen es

$$V = \tfrac{4}{3}\pi a^3 = 1.95 \times 10^{-17}\ \text{m}^3$$

La masa es

$$m = \rho V = (858\ \text{kg/m}^3)(1.95 \times 10^{-17}\ \text{m}^3)$$
$$= 1.67 \times 10^{-14}\ \text{kg}$$

c) Calcule las cargas sucesivas de la gota y, a partir de estos resultados, determine la carga electrónica. Suponga una separación de placas igual a 1.60 m y una diferencia de potencial de 4 550 V para el capacitor de placas paralelas.

Solución Para calcular la carga en cada gota usando la ecuación 4.10, primero debe calcularse la magnitud del campo eléctrico, *E*. Así,

$$E = \frac{V}{d} = \frac{4\,550\ \text{V}}{0.0160\ \text{m}} = 2.84 \times 10^5\ \text{V/m}$$

Ahora es posible encontrar las cargas sobre la gota:

$$q_1 = \left(\frac{mg}{E}\right)\left(\frac{v + v_1'}{v}\right)$$
$$= \frac{(1.67 \times 10^{-14}\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2)}{(2.84 \times 10^5\ \text{V/m})}\left(\frac{0.0286 + 0.0130}{0.0286}\right)$$
$$= 8.39 \times 10^{-19}\ \text{C}$$

De manera semejante, $q_2 = 13.6 \times 10^{-19}$ C, $q_3 = 10.1 \times 10^{-19}$ C, $q_4 = 15.2 \times 10^{-19}$ C, $q_5 = 8.43 \times 10^{-19}$ C y $q_6 = 11.8 \times 10^{-19}$ C.

Para encontrar el valor promedio de e, consideremos el hecho de que en la época del trabajo de Millikan se sabía que el valor de e estaba entre 1.5×10^{-19} C y 2×10^{-19} C. Dividiendo desde q_1 hasta q_6 entre estos valores, se obtiene el rango de cargas enteras sobre cada gota. Así, para q_1 se tienen desde $8.39/1.5 = 5.6$ cargas electrónicas hasta $8.39/2 = 4.2$ cargas electrónicas. De manera semejante, q_2 tiene de 9.1 hasta 5.8 cargas; q_3, de 6.7 a 5.1 cargas; q_4, de 10.1 a 7.6 cargas; q_5, de 5.6 a 4.2 cargas; y q_6, de 7.9 a 5.9 cargas. Debido a que debe haber un número entero de cargas en cada gota, se elige un entero en el centro del intervalo permitido. En consecuencia, en términos de la carga electrónica e, se concluye que $q_1 = 5e$, $q_2 = 8e$, $q_3 = 6e$, $q_4 = 9e$, $q_5 = 5e$ y $q_6 = 7e$. Usando estos valores, se encuentra

$$e_1 = q/5 = 1.68 \times 10^{-19}\ \text{C}$$
$$e_2 = q_1/8 = 1.70 \times 10^{-19}\ \text{C}$$
$$e_3 = q_2/6 = 1.68 \times 10^{-19}\ \text{C}$$
$$e_4 = q_3/9 = 1.69 \times 10^{-19}\ \text{C}$$
$$e_5 = q_4/5 = 1.69 \times 10^{-19}\ \text{C}$$
$$e_6 = q_5/7 = 1.69 \times 10^{-19}\ \text{C}$$

Al tomar el promedio de estos valores, se encuentra que el valor de la carga electrónica es $e = 1.688 \times 10^{-19}$ C para este conjunto de datos.

La ley de Stokes, como sabía Millikan, es sólo aproximadamente correcta para pequeñas esferas que se mueven a través de un gas. La expresión $D = 6\pi a\eta v$ se cumple con precisión aceptable para una esfera de 0.1 cm de radio que se mueve a través de un líquido o para cualquier caso donde el radio del objeto en movimiento, a, sea grande en comparación con el camino libre medio, L, de las moléculas circundantes. (El camino libre medio es esencialmente la distancia media entre moléculas.) No obstante, en el experimento de Millikan, a es del mismo orden de magnitud que el camino libre medio del aire en condiciones normales de temperatura y presión. En consecuencia, la ley de Stokes sobrestima la fuerza de fricción, debido a que la gota en realidad se mueve durante lapsos apreciables a través de un "vacío" sin fricción. Millikan corrigió la ley de Stokes usando una fuerza de fricción cuyo valor es

$$D = \frac{6\pi a\eta v}{1 + \alpha(L/a)} \tag{4.14}$$

y encontró que $\alpha = 0.81$ proporcionaba los valores más consistentes de e para gotas de radios distintos. Correcciones adicionales a la ley de Stokes fueron hechas por Perrin y Roux, y estas correcciones y el valor correcto de e permanecieron como tema controversial durante más de 20 años. El valor actualmente aceptado de la magnitud de la carga electrónica es

$$e = 1.60217733 \times 10^{-19}\ \text{C}$$

Carga electrónica

Modelo del átomo de Rutherford

Los primeros años del siglo XX fueron en general un periodo de conmoción y cambios increíbles en la física, incluyendo el advenimiento de la relatividad, la teoría cuántica y la física atómica y subatómica. Difícilmente se había establecido la realidad de los átomos prístinos e indivisibles ("son la única cosa material que permanece en la condición precisa en que comenzaron a existir desde el principio", escribió Maxwell en 1872), cuando Thomson anunció su divisibilidad en 1899: "los electrones esencialmente implican la división del átomo, una parte de la masa del átomo se libera en libre y se separa del átomo original". Desafíos posteriores a la indivisibilidad del átomo químico provinieron del trabajo experimental sobre radiactividad de Marie Curie (1867-1934, física química polaca) y por Ernest Rutherford (1871-1937, físico neozelandés), y Frederick Soddy, un físico británico, quienes explicaron las transformaciones radiactivas de los elementos en términos de la emisión de partículas subatómicas. La porosidad de los átomos también era conocida antes de 1910 a partir de los experimentos de Lenard, que demostraron que los electrones se transmiten fácilmente a través de delgadas hojas metálicas y de mica. Todos estos descubrimientos, más la sospecha de que las intrincadas líneas espectrales atómicas (luz emitida en un conjunto discreto de frecuencias características de cada elemento) debían producirse por carga en el interior del átomo, condujo a varias propuestas sobre la estructura interna de los átomos. El más famoso de estos primeros modelos atómicos fue el modelo de "budín de pasas" (1898) de Thomson. Esta propuesta consideraba al átomo como una esfera homogénea de masa y carga positiva uniformemente distribuidas en la que estaban incrustados, como pasas en un budín, electrones con carga negativa, los que equilibraban la carga positiva para producir átomos eléctricamente neutros. Aunque tales modelos poseían estabilidad eléctrica para evitar un colapso o una explosión del átomo, fracasaron al tratar de explicar los espectros de líneas de emisión incluso del átomo más sencillo: el de hidrógeno.

La clave para comprender los misteriosos espectros de líneas y el modelo correcto del átomo fueron proporcionados, ambos, por Ernest Rutherford y sus estudiantes Hans Geiger (1882-1945, físico alemán) y Ernest Marsden (1899-1970, físico británico) mediante una serie de experimentos realizados entre 1909 y 1914. Al observar que un haz colimado de partículas α se ensanchaba al pasar a través de una hoja metálica y aún así penetraba fácilmente la delgada película del metal, se embarcaron en experimentos para probar la distribución de masa en el interior del átomo al observar en detalle la dispersión de partículas α por las hojas. Estos experimentos terminaron por llevar a Rutherford al descubrimiento de que la mayor parte de la masa atómica y toda la carga positiva están en un minúsculo núcleo central del átomo. La cadena accidental de eventos y la inteligente capitalización sobre los descubrimientos accidentales que condujeron a la monumental teoría nuclear del átomo de Rutherford no están mejor descritos que en el propio ensayo de Rutherford, donde resume el desarrollo de la teoría de la estructura atómica:

Modelo nuclear de Rutherford

> . . . Me agradaría usar este ejemplo para mostrarles cuán a menudo ustedes se tropiezan accidentalmente con los hechos. Durante los últimos días he observado la dispersión de partículas α, y el Dr. Geiger la ha analizado con detalle en mi laboratorio. Encontró, en delgadas piezas de metal pesado, que la dispersión suele ser

pequeña, del orden de un grado. Un día, Geiger vino y me dijo: "¿No cree que el joven Marsden, a quien estoy capacitando en métodos radiactivos, debe iniciar una pequeña investigación?" Ahora he pensado que, también, dije: "¿Por qué no dejarle observar si algunas partículas α pueden dispersarse un gran ángulo?" Puedo decirles con confianza que no creía que lo hicieran, debido a que sabíamos que la partícula α era una partícula muy rápida y masiva, con una gran cantidad de energía, y ustedes podían demostrar que si la dispersión se debía al efecto acumulado de un número de pequeñas dispersiones, entonces la posibilidad de que una partícula α se dispersara hacia atrás era muy pequeña. Luego, recuerdo que dos o tres días después Geiger vino a verme muy emocionado y decía: "Hemos podido lograr que algunas partículas α se dirijan hacia atrás. . . ." Se trataba casi del evento más increíble que había ocurrido en mi vida. Era casi tan increíble como si se le disparara una esfera de 15 pulg a una pieza de papel higiénico y ésta regresara a uno para golpearlo. Al considerar lo anterior, me di cuenta que esta dispersión hacia atrás debía ser resultado de una sola colisión, y cuando hice cálculos observé que era imposible obtener algo de ese orden de magnitud, a menos que se considerase un sistema donde la mayor parte de la masa del átomo estuviese concentrada en un núcleo diminuto. Fue entonces que tuve la idea de un átomo con un diminuto centro masivo con una carga. Precisé matemáticamente qué leyes debía cumplir la dispersión, y encontré que el número de partículas dispersadas a un cierto ángulo debía ser proporcional al grosor de la hoja dispersora, al cuadrado de la carga nuclear e inversamente proporcional a la cuarta potencia de la velocidad. Estas deducciones fueron comprobadas posteriormente por Geiger y Marsden en una serie de hermosos experimentos.[7]

En la figura 4.10 se muestran las características experimentales esenciales del aparato de Rutherford. Un haz finamente colimado de partículas α emitidas con velocidades aproximadas de 2×10^7 m/s incide sobre una delgada lámina de oro que tiene varios miles de capas atómicas de grosor. La mayor parte de las partículas α atraviesan la lámina a lo largo de la línea DD' (lo cual nuevamente muestra la porosidad del átomo), pero algunas se dispersan a un ángulo ϕ. El número de partículas α dispersadas a cada ángulo por unidad de área del detector y por unidad de tiempo se midió al contar los destellos pro-

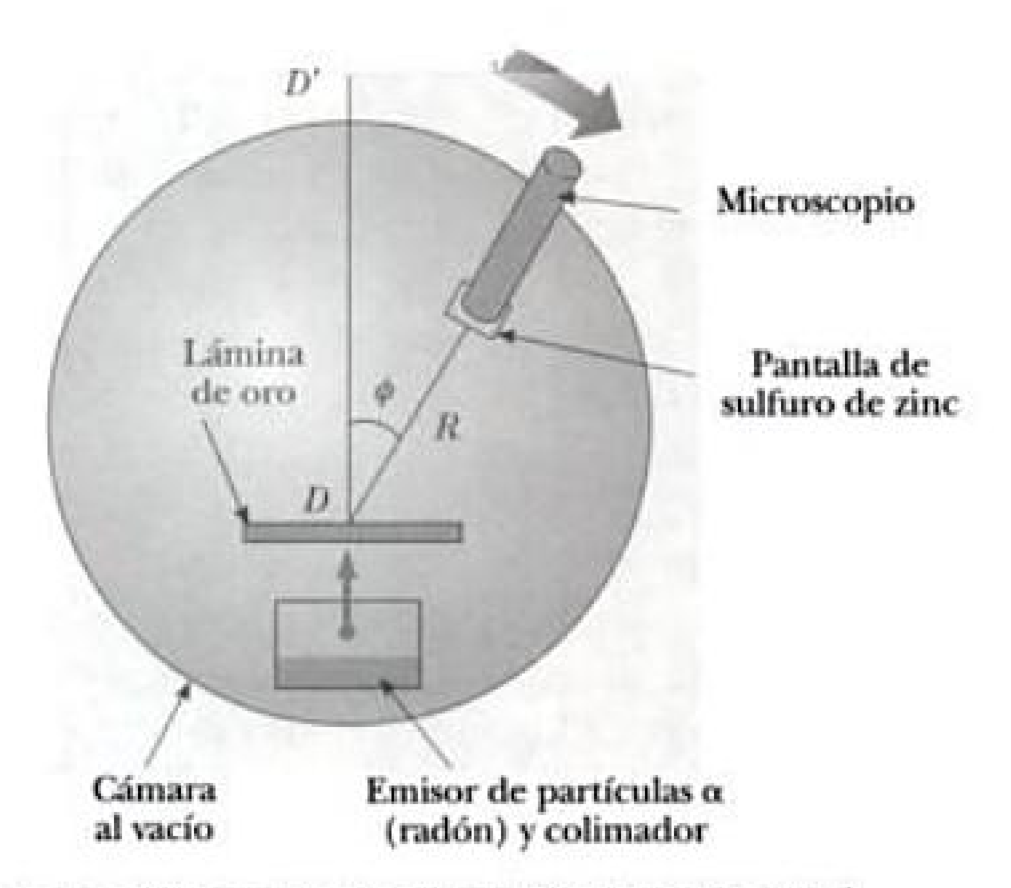


Figura 4.10 Esquema del aparato de dispersión de Rutherford.

[7]Un ensayo sobre "The Development of the Theory of Atomic Structure", 1936, Lord Rutherford, publicado en *Background to Modern Science*, Nueva York, Macmillan Company, 1940.

Figura 4.11 Dispersión de partículas α por un núcleo denso y con carga positiva.

ducidos por las partículas α dispersadas en la pantalla de ZnS. Estos destellos fueron contados con ayuda del microscopio. La distancia del punto en el que las partículas chocan con la lámina de oro a la pantalla de sulfuro de zinc se denota por R en la figura 4.10.

La intuición de Rutherford le decía que debido a que la masa y la energía cinética de las partículas α eran grandes, incluso una colisión casi frontal con una partícula con la masa de un átomo de hidrógeno desviaría sólo ligeramente a la partícula α y ésta golpearía al siguiente átomo de hidrógeno. Las múltiples dispersiones de las partículas α en la lámina explicaban el pequeño ensanchamiento (de alrededor de 1°) originalmente observado por Rutherford, pero no podía explicar las desviaciones ocasionales de gran escala. Por otra parte, si se supone que toda la carga positiva de un átomo está concentrada en un solo punto central y no distribuida en todo el átomo, la repulsión eléctrica experimentada por una partícula α incidente en una colisión frontal se vuelve mucho mayor. Debido a que la carga y la masa del átomo de oro están concentradas en el núcleo, es posible que la partícula α experimente grandes desviaciones en una *sola* colisión con el núcleo masivo. Esta situación se muestra en la figura 4.11.

EJEMPLO 4.4 Colisión de una partícula α con un protón

a) Una partícula de masa m_α y velocidad v_α choca contra un protón estacionario de masa m_p. Si la colisión es elástica y frontal, demuestre que la velocidad del protón después de la colisión, v_p, y la velocidad de la partícula α después de la colisión, v'_α, están dadas por

$$v_p = \left(\frac{2m_\alpha}{m_\alpha + m_p}\right) v_\alpha$$

y

$$v'_\alpha = \left(\frac{m_\alpha - m_p}{m_\alpha + m_p}\right) v_\alpha$$

b) Calcule el cambio porcentual de velocidad para una partícula α que choca contra un protón.

Solución a) Debido a que la colisión es elástica, la energía cinética total se conserva; en consecuencia,

$$\tfrac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 = \tfrac{1}{2} m_\alpha v_\alpha'^2 + \tfrac{1}{2} m_p v_p^2 \qquad (1)$$

La conservación de la cantidad de movimiento para esta colisión unidimensional produce

$$m_\alpha v_\alpha = m_p v_p + m_\alpha v_\alpha' \qquad (2)$$

Al despejar $(m_\alpha v_\alpha')^2$ en la ecuación 1 se obtiene

$$(m_\alpha v_\alpha')^2 = m_\alpha(m_\alpha v_\alpha^2 - m_p v_p^2) \qquad (3)$$

Al despejar $(m_\alpha v_\alpha')^2$ en la ecuación 2 e igualar esto con la ecuación 3 se obtiene

$$(m_\alpha v_\alpha)^2 + (m_p v_p)^2 - 2m_\alpha m_p v_\alpha v_p = (m_\alpha v_\alpha)^2 - m_\alpha m_p v_p^2$$

o bien

$$(m_p v_p)(m_p v_p - 2m_\alpha v_\alpha + m_\alpha v_p) = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son

$$v_p = 0$$

y

$$v_p = \left(\frac{2m_\alpha}{m_\alpha + m_p}\right) v_\alpha \qquad (4)$$

Debido a que el protón debe moverse cuando es golpeado por la pesada partícula α, la ecuación 4 es físicamente razonable sólo para v_p. La solución para v_α' se concluye inmediatamente al sustituir la ecuación 4 en la ecuación 2.

Solución b) Debido a que una partícula α consta de dos protones y dos neutrones, $m_\alpha = 4m_p$. Así,

$$v_p = \left(\frac{2m_\alpha}{m_\alpha + m_p}\right) v_\alpha = \left(\frac{8m_p}{5m_p}\right) v_\alpha = 1.60 v_\alpha$$

$$v_\alpha' = \left(\frac{m_\alpha - m_p}{m_\alpha + m_p}\right) v_\alpha = \left(\frac{3m_p}{5m_p}\right) v_\alpha = 0.60 v_\alpha$$

El cambio porcentual en la velocidad de la partícula α es

$$\text{cambio \% en } v_\alpha = \left(\frac{v_\alpha' - v_\alpha}{v_\alpha}\right) \times 100\% = -40\%$$

Ejercicio 2 Una partícula α con velocidad inicial v_α experimenta una colisión elástica frontal con un electrón que está inicialmente en reposo. Use el hecho de que la masa del electrón es aproximadamente 1/2 000 de la masa del protón para calcular las velocidades finales del electrón y de la partícula α, así como el cambio porcentual en la velocidad de la partícula α.

Respuestas $v_e = 1.998 v_\alpha$, $v_\alpha' = 0.9998 v_\alpha$, y el cambio porcentual en $v_\alpha = -0.02\%$.

En su análisis, Rutherford supuso que el gran ángulo de dispersión es producido por una sola colisión nuclear y que la fuerza de repulsión entre una partícula α y un núcleo separados por una distancia r está dada por la ley de Coulomb,

$$F = k\frac{(2e)(Ze)}{r^2} \qquad (4.15)$$

donde $+2e$ es la carga de la partícula α, $+Ze$ es la carga nuclear y k es la constante de Coulomb. Con estas suposiciones, Rutherford pudo demostrar que el número de partículas α que entran al detector por unidad de tiempo, Δn, a un ángulo ϕ, está dado por

$$\Delta n = \frac{k^2 Z^2 e^4 NnA}{4R^2(\frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2)^2 \operatorname{sen}^4(\phi/2)} \qquad (4.16)$$

Aquí R y ϕ están definidos en la figura 4.10, N es el número de núcleos por unidad de área de la lámina (y de este modo es proporcional al área del detector), n es el número total de partículas α que inciden en el blanco por unidad de tiempo y A es el área del detector. La dependencia de la dispersión con el grosor de la lámina, la velocidad de la partícula α y el ángulo de dispersión fue confirmada experimentalmente por Geiger y Marsden.[8] Debido a que en esa

[8]H. Geiger y E. Marsden, "Deflection of α-Particles trough Large Angles", *Phil. Mag.* (6)25:605, 1913.

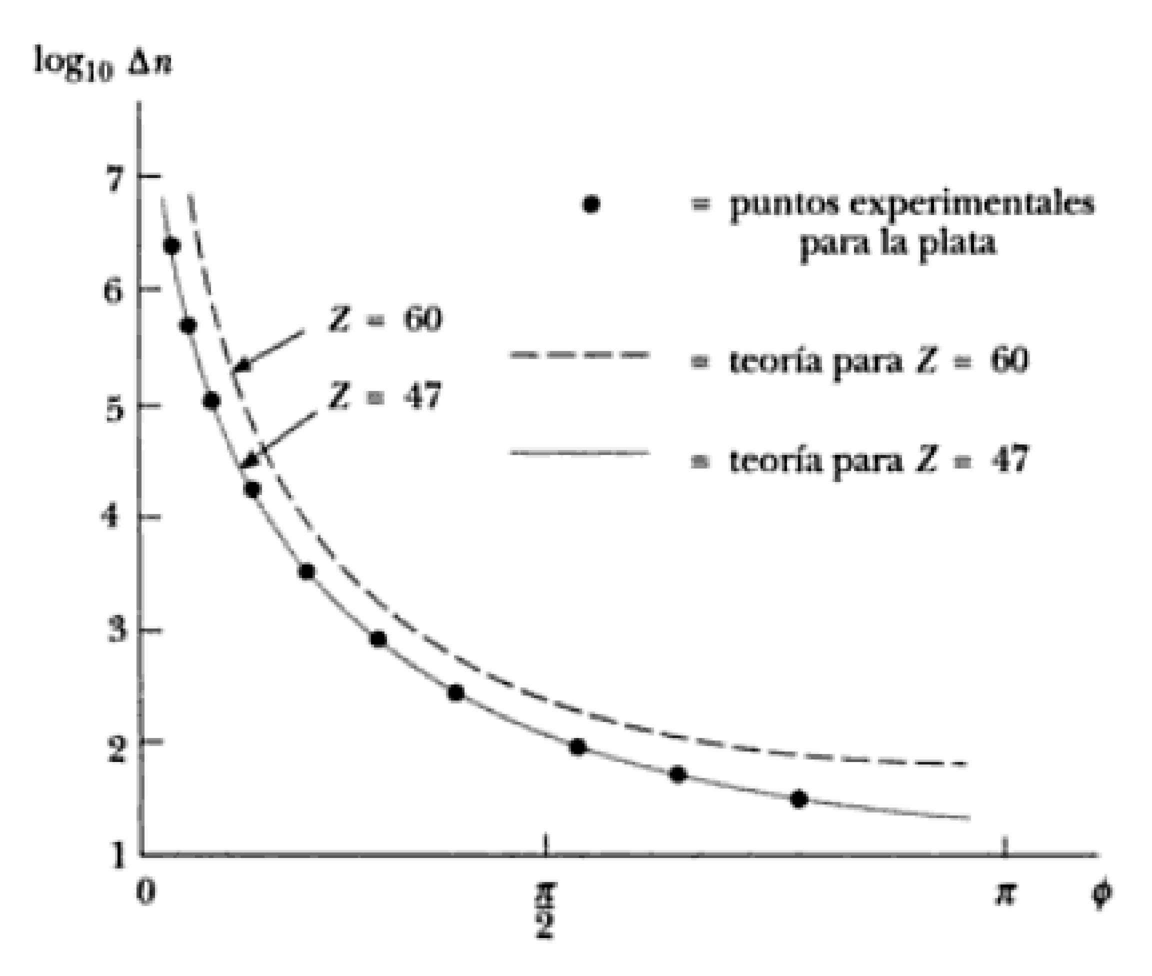


Figura 4.12 Comparación de la teoría y la experimentación para la dispersión de una partícula α por una lámina de plata. (*Tomada de Rutherford, J. Chadwick y J. Ellis,* Radiations from Radioactive Substances, *Cambridge University Press, 1951.*)

época se desconocían los valores del número atómico (Z), no era posible verificar en forma directa la dependencia de la dispersión con respecto a Z. Dándole un giro a nuestro razonamiento, no obstante, y suponiendo que la ecuación 4.16 es correcta, es posible encontrar el valor de Z que proporciona el mejor ajuste de esta ecuación para los puntos de datos experimentales. En la figura 4.12 se muestra una ilustración de esta sensible técnica para determinar Z para una lámina de plata. Observe que cambiar Z sólo produce un desplazamiento vertical en la gráfica y no un cambio en la forma.

Gran parte del extraordinario trabajo experimental del ingenioso Lord Rutherford puede acreditarse a su habilidad para utilizar sus descubrimientos para penetrar aún más en los misterios de la naturaleza. Por ejemplo, transformó sus estudios sobre la transmisión de partículas radiactivas a través de la materia en una técnica sensible y delicada para investigar el átomo. Otro ejemplo es su ingeniosa técnica para medir el tamaño del núcleo. Al darse cuenta que la ecuación 4.15 sólo se cumpliría si la partícula α no tenía energía suficiente para deformar o penetrar en el núcleo de dispersión, sistemáticamente buscó la energía mínima de α a la que ocurrían desviaciones con respecto a esta ecuación de dispersión, siendo la idea de que a esta energía mínima la partícula α apenas estaría penetrando el radio nuclear a su distancia de acercamiento máximo. Siguiendo el razonamiento de Rutherford, la energía cinética de la partícula α en el infinito se hace igual a la energía potencial del sistema (α + núcleo blanco) a la distancia de acercamiento máximo, $d_{\text{mín}}$, o bien,

$$\frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 = k\,\frac{(Ze)(2e)}{d_{\text{mín}}} \tag{4.17}$$

Luego, de la ecuación 4.17 puede despejarse $d_{\text{mín}}$ para determinar la distancia de acercamiento máximo. En el caso en que la energía cinética de la partícula α sea tan alta que la ecuación 4.16 empiece a fallar, la distancia de acercamiento máximo es aproximadamente igual al radio del núcleo.

Rutherford estaba frente al dilema experimental de que no se encontraban fallas en las ecuaciones 4.15 o 4.16 para láminas de metales pesados con las par-

tículas α naturales más energéticas con las que contaba ($\approx$ 8 MeV). Mostrando una economía peculiar, en vez de embarcarse en un acelerador de partículas, utilizó metales como el aluminio con Z's menores y, por tanto, barreras de Coulomb menores para la penetración α.[9] Así, en 1919, pudo determinar que el radio nuclear del aluminio era aproximadamente igual a 5×10^{-15} m.

EJEMPLO 4.5 Estimación del radio del núcleo del aluminio

En 1919, Rutherford pudo demostrar que la ecuación 4.16 fallaba para partículas α de 7.7 MeV que se dispersaban a grandes ángulos por núcleos de aluminio ($Z = 13$). Calcule el radio del núcleo del aluminio a partir de estos hechos.

Solución La fórmula de dispersión de Rutherford deja de ser válida cuando las partículas α empiezan a penetrar o a tocar el núcleo. Cuando la partícula α está muy lejos del núcleo del aluminio, su energía cinética es 7.7 MeV. Ésta es también la energía total del sistema (partículas α más núcleo del aluminio), debido a que el núcleo del aluminio está en reposo y a que la energía potencial es cero para una separación infinita de las partículas. Cuando en una colisión frontal la partícula α está en el punto de máximo acercamiento al núcleo del aluminio, su energía cinética es cero y está a una distancia $d_{\text{mín}}$, que puede tomarse como el radio del núcleo del aluminio. En este punto, la energía cinética del sistema es cero y la energía total es justamente la energía potencial del sistema. Al aplicar la conservación de la energía se obtiene

$$K_\alpha = \text{energía potencial en el punto de máximo acercamiento} = \frac{k(Ze)(2e)}{d_{\text{mín}}}$$

o bien

$$\begin{aligned} d_{\text{mín}} &= k\,\frac{2Ze^2}{K_\alpha} \\ &= \frac{2(13)(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})^2\,(8.99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)}{(7.7 \times 10^6\ \text{eV})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{J/eV})} \\ &= 4.9 \times 10^{-15}\ \text{m} \end{aligned}$$

El éxito del modelo nuclear de Rutherford fue impactante. Rutherford y sus estudiantes habían demostrado que toda la masa y la carga positiva Ze estaban concentradas en un núcleo diminuto del átomo de diámetro 10^{-14} m y que de alguna manera los electrones Z debían girar alrededor del núcleo. No obstante, como ocurre con todos los grandes descubrimientos, la idea del átomo nuclear originó una cascada de preguntas a un nivel más profundo: 1) Si en el núcleo sólo hay protones Z, ¿de qué está compuesta la otra mitad de la masa nuclear? 2) ¿Qué proporciona la fuerza de cohesión para lograr mantener muchos protones confinados en la increíblemente pequeña distancia de 10^{-14} m? 3) ¿Cómo se mueven los electrones alrededor del núcleo para formar un átomo estable, y cómo su movimiento explica las líneas espectrales observadas?

Rutherford no tenía una respuesta precisa para la primera pregunta. Especulaba que la diferencia entre la masa de Z protones y la masa nuclear total podía explicarse mediante agrupamientos adicionales de partículas neutras, cada una integrada por un par electrón-protón ligado. Esta conjetura pareció especialmente satisfactoria debido a que construía el átomo a partir de las partículas más fundamentales conocidas en la época.

Para responder a la segunda pregunta, Rutherford sostuvo con prudencia que las fuerzas eléctricas proporcionaban el efecto aglutinante para mantener unido al núcleo. Escribió: "El núcleo, aunque de dimensiones diminutas, es en sí mismo un sistema muy complejo que consta de cuerpos cargados positiva y

[9]Rutherford fue famoso por la observación que hizo a sus estudiantes universitarios: "No hay dinero para el aparato: tenemos que usar nuestras cabezas" (A. Keller, *Infancy of Atomic Physics: Hercules in His Cradle*, Oxford, Clarendon Press, 1983, p. 215).

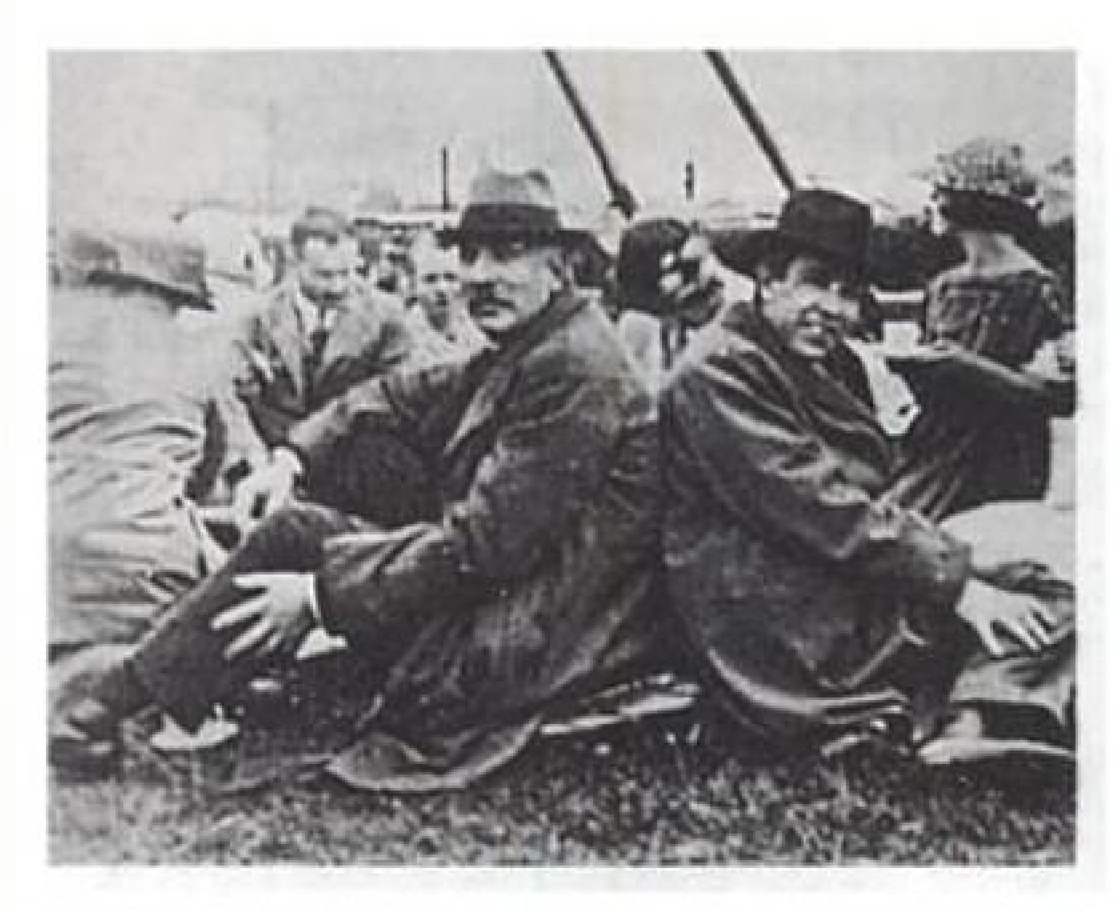


Figura 4.13 Bohr (a la derecha) y Rutherford (a la izquierda) se apoyaron mutuamente, literal e intelectualmente hablando. Esta fotografía de Bohr y Rutherford sentados espalda con espalda fue tomada durante una regata de remos en junio de 1923 en la Universidad de Cambridge. (*AIP Niels Bohr Library*, y Physics Today, *octubre de 1985, un número dedicado a Bohr.*)

negativamente, mantenidos muy próximos entre sí debido a intensas fuerzas eléctricas". De hecho, no fue sino hasta 1921 cuando se reconoció por completo que la fuerza de Coulomb no mantenía unido al núcleo y que un nuevo tipo de fuerza muy intensa mantiene juntos a los protones. Es interesante saber que fue James Chadwick, el descubridor del neutrón, quien primero aceptó que una nueva fuerza de intensidad mucho mayor que la intensidad eléctrica actuaba en el núcleo.[10] Quizá el magnífico logro de Rutherford en explicar la dispersión de las partículas α con la fuerza de Coulomb le impidió ver la posibilidad de que ésta no era la última ley que operaba en el interior del núcleo.

La respuesta a la tercera pregunta no fue proporcionada por Rutherford. Esa habría de ser la obra maestra de Niels Bohr (figura 4.13). Aun así, con su perspicacia característica, Rutherford sugirió un modelo planetario del átomo o, más precisamente, que cargas negativas giraban alrededor del denso núcleo positivo como los planetas giran alrededor del Sol.[11]

4.3 EL ÁTOMO DE BOHR

"La teoría cuántica original de los espectros de Bohr era, supongo, una de las teorías más revolucionarias que alguna vez fue proporcionada a la ciencia, y no conozco ninguna otra que haya sido tan exitosa... Considero que el trabajo de Bohr es uno de los triunfos más importantes del pensamiento humano." (Lord Rutherford.)

Así, se trata de uno de los descubrimientos más grandes. (Albert Einstein, al escuchar el cálculo teórico de Bohr de las constantes de Rydberg para el hidrógeno y el helio simplemente ionizado.)

[10] J. Chadwick y E. S. Biele, *Phil. Mag.* 42:923, 1921.

[11] Thomson y Hantaro Nagakoa, un físico japonés, habían trabajado incluso antes, en 1914, con modelos atómicos planetarios.

Series espectrales

Antes de abordar en detalle la primera teoría exitosa de la dinámica atómica, revisaremos el trabajo experimental sobre los espectros de líneas que sirvieron para impulsar y confirmar con claridad la primera teoría cuántica del átomo. Como ya se indicó en el capítulo 3, los sólidos y líquidos luminosos (e incluso los gases a las altas densidades que se encuentran en las estrellas) emiten una distribución continua de longitudes de onda. Esta distribución muestra una forma común para la curva de intensidad contra longitud de onda, y el pico en esta curva se desplaza hacia longitudes de onda más cortas con el aumento de la temperatura. Esta curva "universal" de cuerpo negro se muestra en la figura 4.14.

En nítido contraste con este espectro continuo está el espectro discreto de líneas emitido por un gas, a baja presión, sujeto a una descarga eléctrica. Cuando la luz emitida debido a la descarga en el gas se analiza con un espectroscopio, se encuentra que consta de unas cuantas líneas brillantes de color puro sobre un fondo oscuro. Lo anterior contrasta bastante con el arco iris continuo que se observa cuando un sólido luminoso se ve a través de un espectroscopio. Además, como puede verse a partir de la figura 4.15, las longitudes de onda contenidas en un espectro de líneas dado son características del elemento particular que emite la luz. (Consulte también la segunda de forros de este libro.) El espectro de líneas más simple se observa para el átomo de hidrógeno; este espectro se describirá en detalle. Otros átomos, como el mercurio, el helio y el neón tienen espectros de líneas completamente diferentes. Debido a que no hay dos elementos que emitan el mismo espectro de líneas, este fenómeno constituye una técnica práctica y sensible para identificar los elementos presentes en muestras desconocidas. De hecho, alrededor de 1860 la espectroscopía había avanzado tanto en manos de Gustav Robert Kirchhoff (figura 4.16) y Robert Wilhelm von Bunsen (figura 4.17) en la Universidad de Heidelberg, que pudieron descubrir dos nuevos elementos, el rubidio y el cesio, al observar nuevas secuencias de líneas espectrales en muestras minerales. Las mejoras en los instrumentos y en las técnicas dieron por resultado un crecimiento enorme en el análisis espectral en Europa de 1860 a 1900. Incluso la imaginación del público europeo fue atrapada por la espectroscopía cuando utilizando técnicas espectroscópicas se mostró que, después de todo, los meteoritos estaban constituidos sólo de elementos conocidos en la Tierra.

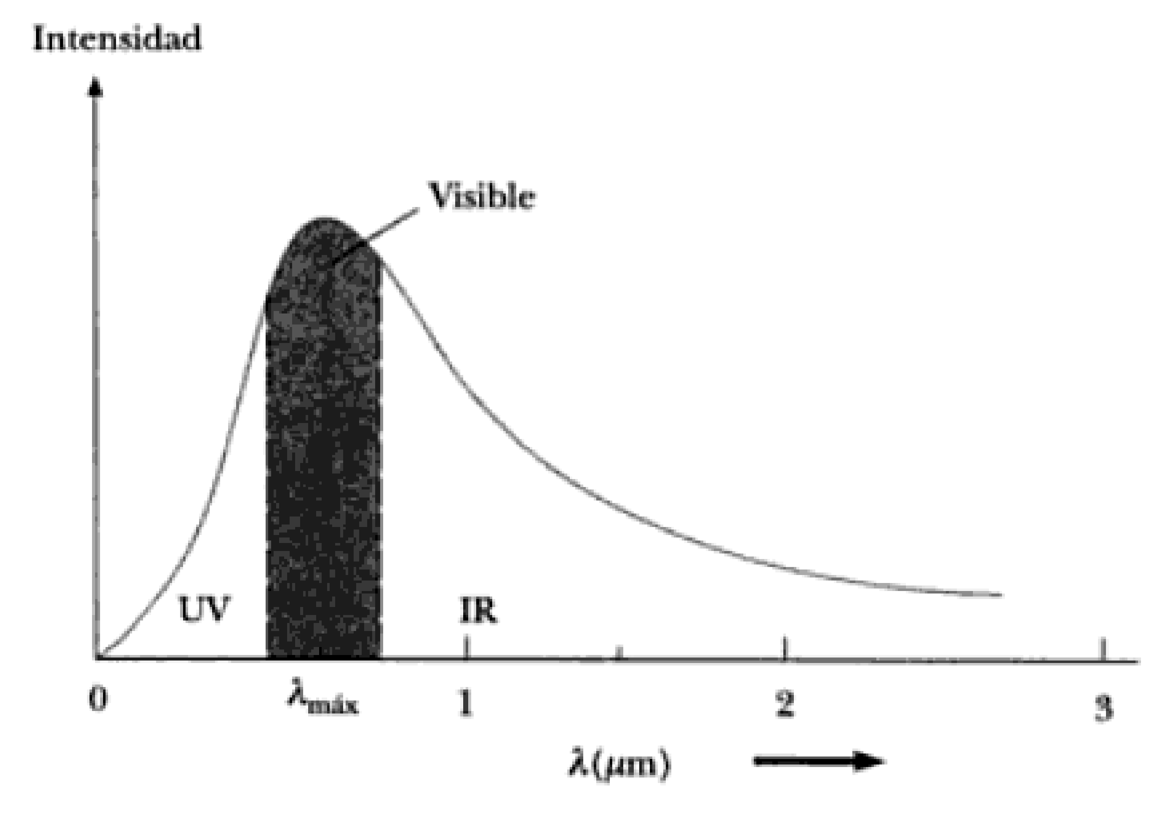


Figura 4.14 Gráfica de la intensidad contra la longitud de onda para un cuerpo calentado a 6 000 K.

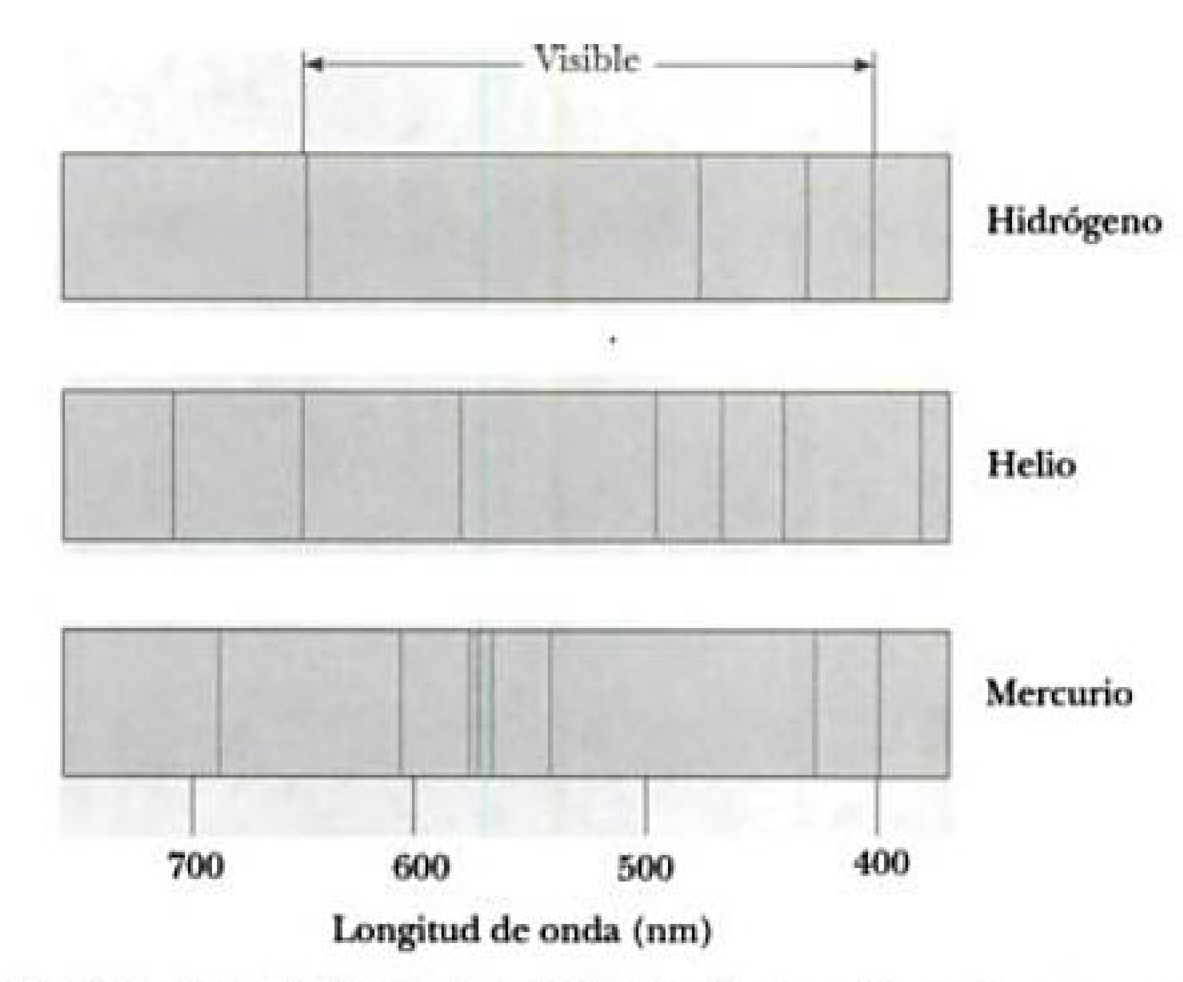


Figura 4.15 Espectros de líneas de emisión de algunos elementos representativos.



Figura 4.16 Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887). Sí, se trata de la persona que inventó el teorema del circuito eléctrico y estableció la relación entre la absorción y la emisión de un objeto (vea la sección 3.2). (*AIP Emilio Segrè Visual Archives, W. F. Meggers Collection.*)

La inmensa contribución de Kirchhoff a la espectroscopía también se muestra con otro avance logrado por él en 1859: el descubrimiento de la **espectroscopía de absorción** y la explicación de las líneas oscuras D de Fraunhofer en el espectro solar.[12] En 1814, Joseph Fraunhofer había hecho pasar el espectro continuo proveniente del Sol a través de una ranura estrecha y luego a través de un prisma. Observó el sorprendente resultado de casi 1 000 líneas negras finas, o huecos, en el espectro del arco iris continuo del Sol, y asignó las letras A, B, C, . . . a las líneas negras más prominentes. Estas y otras líneas se mues-



Figura 4.17 Robert Wilhelm von Bunsen (1811–1899). Bunsen junto a su invento más conocido, el mechero de gas para laboratorio que lleva su nombre. No obstante, el logro más importante de este químico fue el desarrollo, junto con Kirchhoff, del poderoso método analítico del análisis espectral. (*AIP Emilio Segrè Visual Archives, E. Scott Barr Collection.*)

[12]G. Kirchhoff, *Monatsber.*, Berlín, 1859, p. 662.

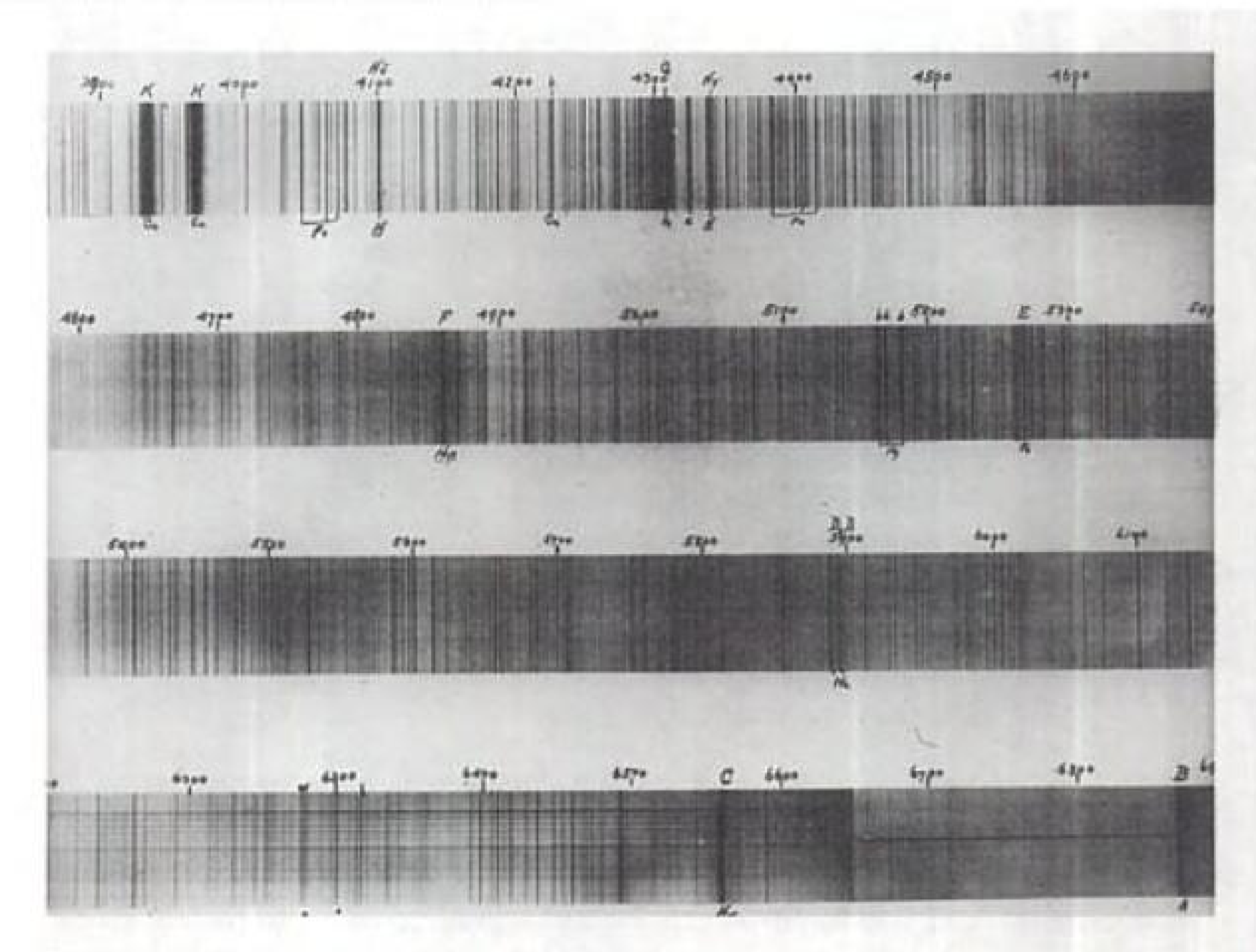


Figura 4.18 El espectro del Sol, tal como se observa con un espectrógrafo de alta resolución, que muestra muchas líneas oscuras de Fraunhofer. Las longitudes de onda se indican arriba del espectro en unidades de Angstroms (10^{-8} cm). (*Fotografía del Observatorio Palomar, Cal Tech.*)

tran en la figura 4.18. Kirchhoff dedujo correctamente que las misteriosas líneas negras se deben a una nube de átomos vaporizados en el exterior del Sol, en las capas más frías, que absorben frecuencias discretas de la intensa radiación continua proveniente del centro del Sol. Además, demostró que las líneas D de Fraunhofer eran producidas por sodio vaporizado y que tenían las mismas longitudes de onda que las intensas líneas amarillas en el espectro de emisión del sodio. Kirchhoff también dedujo que todas las líneas oscuras de Fraunhofer debían atribuirse a la absorción por diversos elementos presentes en el Sol. De un solo golpe abrió el camino para determinar la composición elemental de las estrellas que están a trillones de kilómetros de la Tierra. Su método elegante pero sencillo para demostrar la presencia de vapor de sodio en la atmósfera solar se muestra de forma esquemática en la figura 4.19.

Hoy día, la espectroscopía de absorción es ciertamente tan importante como la espectroscopía de emisión para realizar análisis cualitativos y cuantitativos de elementos y grupos moleculares. En general, un espectro de absorción se obtiene al hacer pasar luz proveniente de una fuente continua [ya sea en las regiones ultravioleta (uv), visible (vis) o infrarroja (IR)] a través de un gas del elemento que está siendo analizado. El espectro de absorción consta de una serie de líneas oscuras sobrepuestas en el espectro continuo emitido por una fuente. Cada línea en el espectro de absorción de un elemento coincide con una línea en el espectro de emisión del mismo elemento; sin embargo, no todas las líneas de emisión están presentes en un espectro de emisión. Las diferencias entre los espectros de emisión y absorción son complicadas en general y dependen de la temperatura del vapor absorbente.

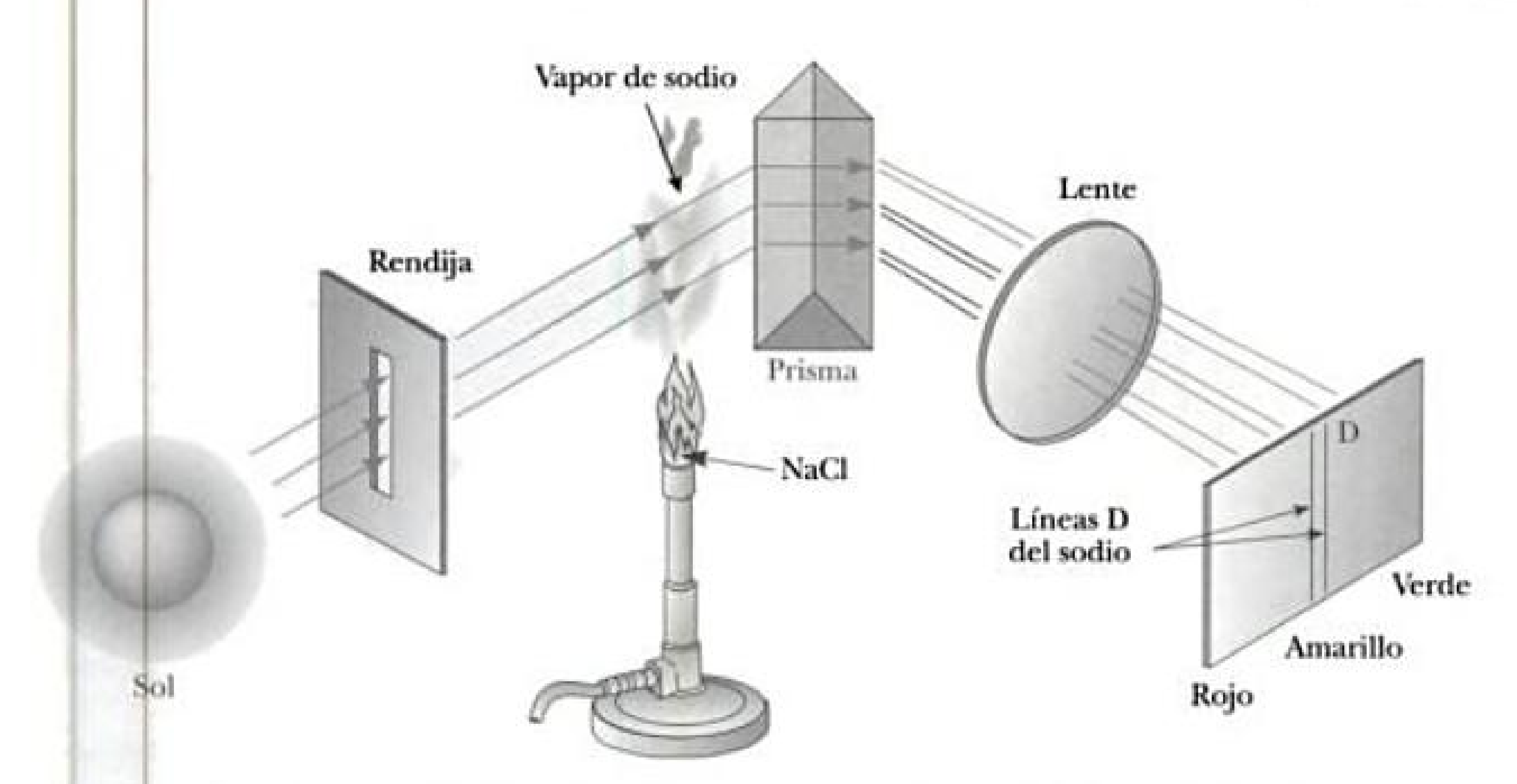


Figura 4.19 Experimento de Kirchhoff que explica las líneas D de Fraunhofer. Estas líneas se oscurecen notoriamente cuando se introduce vapor de sodio entre la rendija y el prisma.

En el espectrómetro de absorción atómica se hace uso de la coincidencia de las líneas de absorción y de emisión. Este dispositivo se usa habitualmente para medir partes por millón (ppm) de metales en objetos desconocidos. Por ejemplo, si desea medirse el sodio, entonces se elige como fuente de luz una lámpara de sodio que emite un espectro de líneas. El objeto desconocido se calienta con una flama (que suele ser de oxiacetileno) para vaporizar la muestra, romper los enlaces químicos del sodio con otros elementos y producir un gas de sodio elemental. Luego, el espectrómetro se sintoniza a una longitud de onda para la que existen líneas de absorción y de emisión (por ejemplo, una de las líneas D a 588.99 o 589.59 nm), y el oscurecimiento o disminución en la intensidad se mide con un fotomultiplicador sensible. La disminución en la intensidad es una medida de la concentración de sodio. Con esta técnica extremadamente selectiva y una calibración idónea es posible medir concentraciones de 0.1 ppm. La espectroscopía de absorción atómica ha sido una técnica útil para analizar la contaminación de metales pesados en la cadena alimenticia. Por ejemplo, las primeras determinaciones de elevados niveles de mercurio en el atún fueron hechas con absorción atómica.

Desde 1860 hasta 1885 se acumularon muchas mediciones espectroscópicas, enterrando a teóricos frenéticos bajo una montaña de datos. Recién habían sido realizadas mediciones exactas de cuatro líneas de emisión visibles del hidrógeno por Anders Ångstrom, un físico sueco, cuando en 1885 un maestro de escuela suizo, Johann Jakob Balmer, publicó un artículo con el título nada pretencioso de "Notice Concerning the Spectral Lines of Hydrogen". Al tanteo, Balmer encontró una fórmula que predecía correctamente las longitudes de onda de las cuatro líneas visibles de Ångstrom: H_α (roja), H_β (verde), H_γ (azul) y H_δ (violeta). En la figura 4.20 se muestran estas y otras líneas en el espectro de emisión del hidrógeno. Balmer proporcionó su fórmula como

$$\lambda(\text{cm}) = C_2\left(\frac{n^2}{n^2 - 2^2}\right) \qquad n = 3, 4, 5, \ldots \tag{4.18}$$

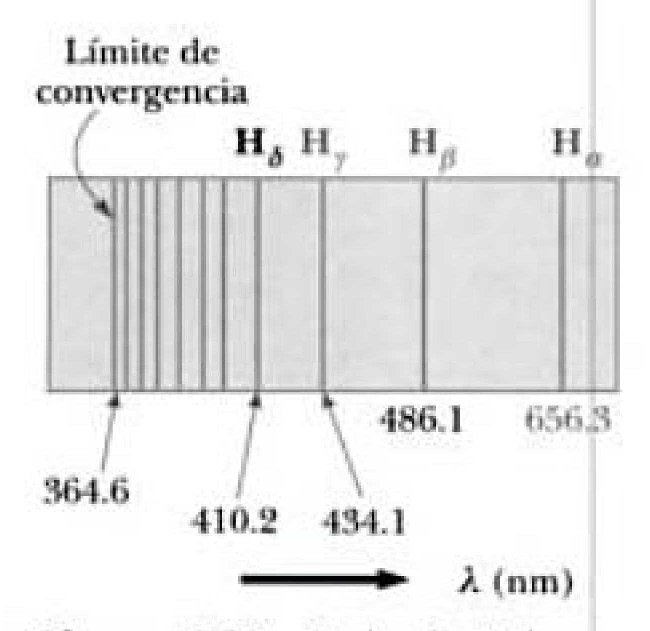


Figura 4.20 Serie de Balmer de las líneas espectrales para el hidrógeno (espectro de emisión).

donde λ es la longitud de onda emitida en cm y $C_2 = 3645.6 \times 10^{-8}$ cm, una constante denominada **límite de convergencia** porque proporciona la longitud de onda de la línea con el valor n más grande ($n = \infty$). También, observe que

$n = 3, 4, 5, \ldots$, donde H_α tiene $n = 3$, H_β tiene $n = 4$, etc. Aunque Balmer sólo conocía cuatro líneas cuando inició su artículo, al terminarlo ya habían sido medidas 10 líneas más en las regiones violeta y ultravioleta. Para su satisfacción y deleite, ¡estas líneas coincidían con su fórmula empírica dentro de un margen de 0.1%! Alentado por su éxito y porque era aficionado a la numerología, Balmer sugirió que podrían existir otras series del hidrógeno de la forma

$$\lambda = C_3\left(\frac{n^2}{n^2 - 3^2}\right) \qquad n = 4, 5, 6, \ldots \tag{4.19}$$

$$\lambda = C_4\left(\frac{n^2}{n^2 - 4^2}\right) \qquad n = 5, 6, 7, \ldots \tag{4.20}$$

Según se sabe ahora, sus especulaciones eran correctas y esas series existen, en efecto. En la notación actual, todas estas series están dadas por una sola fórmula:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \tag{4.21}$$

donde n_f y n_i son números *enteros*. La constante de Rydberg, R, es la misma para todas las series y su valor es

$$R = 1.0973732 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \tag{4.22}$$

Observe que para una serie dada, n_f tiene un valor constante. Además, para una serie dada $n_i = n_f + 1, n_f + 2, \ldots$, la tabla 4.1 enumera el nombre de cada serie (identificada según sus descubridores) y los enteros que definen la serie.

Modelo cuántico del átomo de Bohr

En abril de 1913, un joven físico danés, Niels Bohr (quien recientemente había trabajado con Thomson y Rutherford) publicó un artículo en tres partes que conmocionó hasta sus cimientos al mundo de la física.[13] Este joven rebelde no sólo proporcionó la primera teoría exitosa de los espectros atómicos de líneas sino que, en el proceso, derrocó algunos de los principios más apreciados del rey del electromagnetismo, James Clerk Maxwell.

Tabla 4.1 Algunas series espectrales para el átomo de hidrógeno

Serie de Lyman (uv)	$n_f = 1$	$n_i = 2, 3, 4, \ldots$
Serie de Balmer (vis-uv)	$n_f = 2$	$n_i = 3, 4, 5, \ldots$
Serie de Paschen (IR)	$n_f = 3$	$n_i = 4, 5, 6, \ldots$
Serie de Brackett (IR)	$n_f = 4$	$n_i = 5, 6, 7, \ldots$
Serie de Pfund (IR)	$n_f = 5$	$n_i = 6, 7, 8, \ldots$

[13]N. Bohr, "On the Constitution of Atoms and Molecules", *Phil. Mag.* 26:1, 1913. También, N. Bohr, *Nature* 92:231, 1913.

Desde nuestro punto de vista, el modelo de Bohr podría parecer sólo el siguiente paso razonable, pero para aquella época pareció sorprendente, desconcertante e increíblemente audaz. Como ya se mencionó, tanto Thomson como Rutherford se dieron cuenta de que los electrones debían girar alrededor del núcleo para no caer en él. Ellos, junto con Bohr, percibieron que, según la teoría de Maxwell, cargas aceleradas girando con una frecuencia orbital f debían emitir ondas de luz de frecuencia f. Desafortunadamente, llevado a su conclusión lógica, este modelo clásico es un desastre. A medida que el electrón pierde energía, su radio orbital disminuye de manera continua y su frecuencia de revolución aumenta. Lo anterior lleva a una frecuencia de radiación emitida siempre creciente y al colapso catastrófico final del átomo a medida que los electrones se lanzan hacia el núcleo (figura 4.21).

Las deducciones de electrones cayendo al núcleo y un espectro de emisión continuo para los elementos fueron ingeniosamente eludidas por Bohr. Él simplemente postuló que la teoría clásica de la radiación, que había sido confirmada por Hertz al detectar ondas de radio usando grandes circuitos, no era válida para sistemas de dimensiones atómicas. Además, recurrió al trabajo de Planck y Einstein como fuentes correctas de la teoría de los sistemas atómicos. Superó el problema clásico del electrón que continuamente pierde energía al aplicar las ideas de Planck sobre los niveles de energía cuantizados a los electrones atómicos en órbita. Así, postuló que los electrones en los átomos por lo general están confinados en ciertos niveles energéticos y órbitas estables, no radiantes, conocidos como **estados estacionarios.**[14] Aplicó el concepto de Einstein del fotó para obtener una expresión para la frecuencia de la luz emitida cuando un electrón salta de un estado estacionario a otro. Por tanto, si ΔE es la separación entre dos posibles estados electrónicos estacionarios, entonces $\Delta E = hf$, donde h es la constante de Planck y f es la frecuencia de la luz emitida sin importar la frecuencia del movimiento orbital del electrón. De esta forma, al combinar ciertos principios de la mecánica clásica con los nuevos principios cuánticos de la emisión de la luz, Bohr llegó a una teoría del átomo que coincidía en forma extraordinaria con los experimentos.

Estados estacionarios

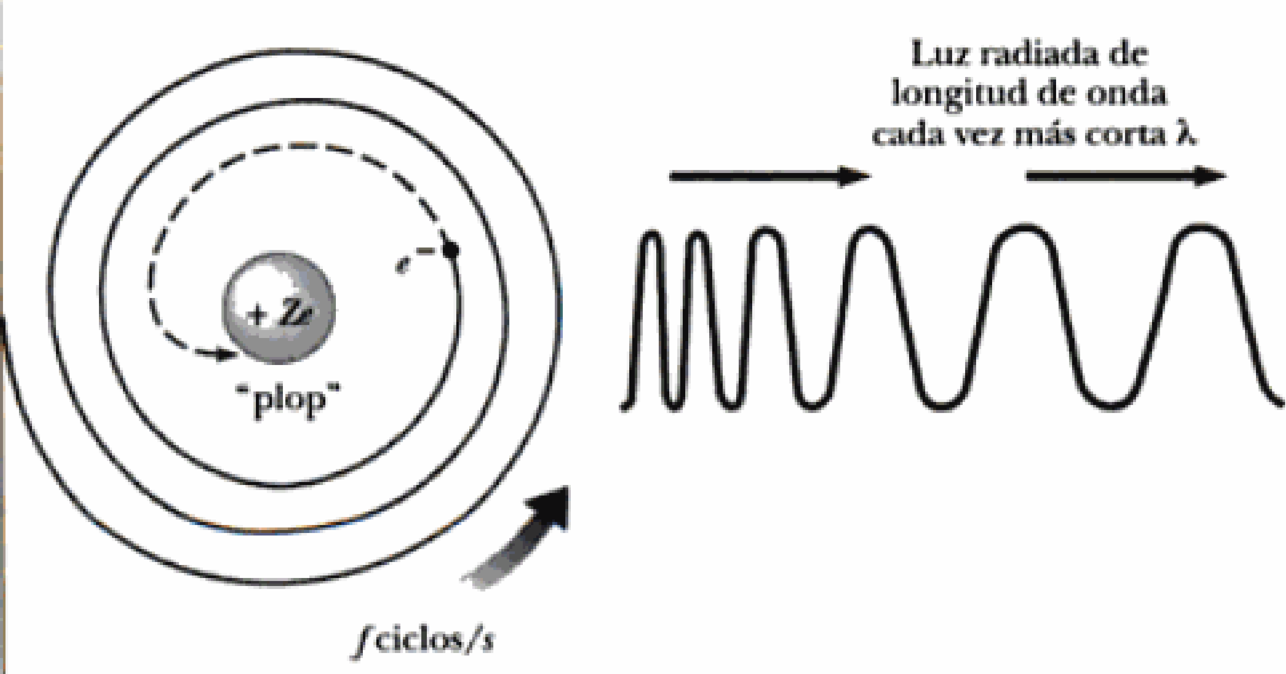


Figura 4.21 Modelo clásico del átomo.

[14] *Onda estacionaria* fue un término usado por Bohr para indicar el estado de un átomo estable, que no radía y que tiene una energía constante con el tiempo. No significa "fijo en posición" o "sin movimiento"; hay que recordar que los electrones en órbitas estacionarias se mueven a velocidades muy grandes.

Postulados de la teoría de Bohr

Ahora que ya se han considerado los principios generales del modelo del hidrógeno de Bohr y los espectros experimentales descubiertos alrededor de 1913, se analizará en detalle la teoría cuántica de Bohr. Las ideas básicas de esta teoría, si se aplica a un átomo de hidrógeno, son las siguientes:

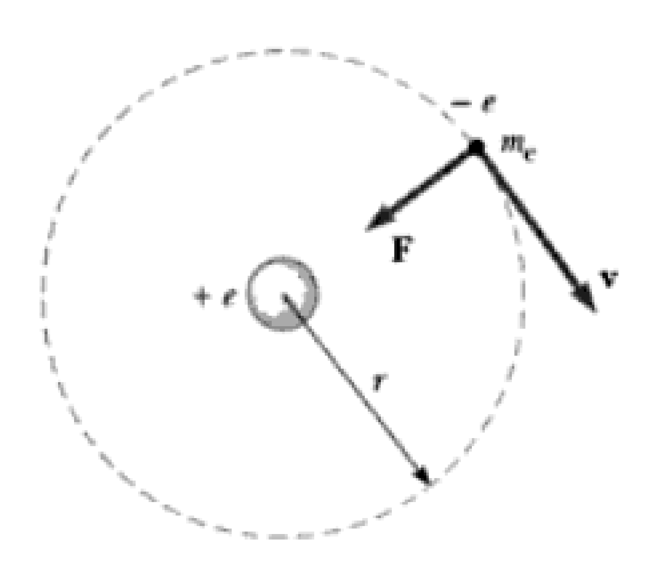


Figura 4.22 Diagrama que representa el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno.

- El electrón se mueve en órbitas circulares alrededor del protón bajo el efecto de la fuerza de atracción de Coulomb, como se muestra en la figura 4.22. ¡Hasta el momento, nada nuevo!
- Sólo ciertas órbitas son estables. Estas órbitas estables son aquellas donde los electrones no radían. Por tanto, la energía es fija o estacionaria con el tiempo, y para describir el movimiento del electrón en estas órbitas estables es posible hacerlo mediante la mecánica clásica.
- El átomo emite radiación cuando el electrón "salta" de un estado estacionario inicial más energético a un estado más bajo menos energético. Este "salto" no puede visualizarse o tratarse desde el punto de vista clásico. En particular, **la frecuencia f del fotón emitido en el salto es independiente de la frecuencia del movimiento orbital del electrón.** En vez de ello, la frecuencia de la luz emitida está relacionada con el cambio en la energía del átomo y está dada por la fórmula de Planck-Einstein

$$E_i - E_f = hf \tag{4.23}$$

  donde E_i es la energía del estado inicial, E_f es la energía del estado final y $E_i > E_f$.
- El tamaño de las órbitas permitidas del electrón es determinado por una condición cuántica adicional impuesta sobre la cantidad de movimiento angular orbital del electrón. A saber, las órbitas permitidas son aquellas para las que el momento angular orbital del electrón alrededor del núcleo es un múltiplo entero de $\hbar = h/2\pi$,

$$m_e vr = n\hbar \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.24}$$

Usando estos cuatro postulados, ahora es posible calcular los niveles de energía permitidos y las longitudes de onda de emisión del átomo de hidrógeno. Recuerde que la energía potencial eléctrica del sistema que se muestra en la figura 4.22 está dada por $U = qV = -ke^2/r$, donde el valor de k (la constante de Coulomb) es $1/4\pi\varepsilon_0$. Así, la energía total del átomo, que contiene términos tanto de energía potencial como de energía cinética, es

$$E = K + U = \tfrac{1}{2} m_e v^2 - k\frac{e^2}{r} \tag{4.25}$$

Al aplicar la segunda ley de Newton a este sistema se observa que la fuerza de atracción coulombiana sobre el electrón, ke^2/r^2, debe ser igual a la masa multiplicada por la aceleración centrípeta del electrón, o bien,

$$\frac{ke^2}{r^2} = \frac{m_e v^2}{r}$$

A partir de esta expresión, de inmediato se encuentra que la energía cinética es

$$K = \frac{m_e v^2}{2} = \frac{ke^2}{2r} \tag{4.26}$$

Al sustituir este valor de K en la ecuación 4.25 se obtiene la energía total del átomo como

$$E = -\frac{ke^2}{2r} \tag{4.27}$$

Observe que la energía total es negativa, lo cual indica un sistema *ligado* electrón-protón. Esto significa que es necesario agregar energía al átomo en una cantidad $ke^2/2r$ para llevar al electrón hasta el infinito y dejarlo sin movimiento. Al eliminar v entre las ecuaciones 4.24 y 4.26 puede obtenerse una expresión para r, el radio de la órbita del electrón:

Radios de las órbitas de Bohr en el hidrógeno

$$r_n = \frac{n^2\hbar^2}{m_e ke^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.28}$$

La ecuación 4.28 muestra que sólo ciertas órbitas son permitidas y que estas órbitas preferidas pueden deducirse a partir del paso nada clásico de pedir que el momento angular del electrón sea un múltiplo entero de $\hbar$. El radio más pequeño se presenta con $n = 1$, se denomina **radio de Bohr** y se denota por a_0. El valor del radio de Bohr es

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e ke^2} = 0.529 \text{ Å} = 0.0529 \text{ nm} \tag{4.29}$$

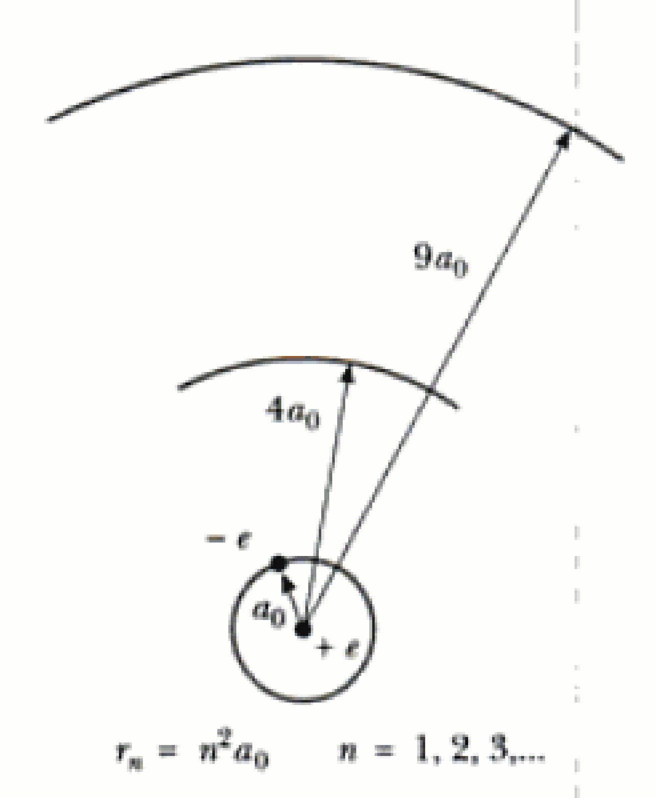


Figura 4.23 Las tres primeras órbitas para el hidrógeno.

El hecho de que la teoría de Bohr produjera un valor para a_0 que coincide bastante bien con el tamaño experimental del hidrógeno sin ninguna calibración empírica del tamaño de la órbita fue considerado una hazaña sorprendente. En la figura 4.23 se muestran a escala las tres primeras órbitas de Bohr.

La cuantización de los radios orbitales conduce de inmediato a la cuantización de la energía. Esto puede verse al sustituir $r_n = n^2a_0$ en la ecuación 4.27, proporcionando para los niveles de energía permitidos

Niveles de energía del hidrógeno

$$E_n = -\frac{ke^2}{2a_0}\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.30}$$

Al sustituir valores numéricos en la ecuación 4.30 se obtiene

$$E_n = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.31}$$

Números cuánticos

Los enteros n que corresponden a los valores discretos o cuantizados de la energía del átomo poseen la denominación especial de **números cuánticos.** Estos números son fundamentales para la teoría cuántica y en general se refieren al conjunto de enteros que identifican los valores discretos de cantidades atómicas importantes, como energía y momento angular. El estado estacionario más bajo, o no radiante, se denomina **estado fundamental** o estado base, tiene $n = 1$ y su energía es $E_1 = -13.6$ eV. El siguiente estado, o **primer estado excitado,** tiene $n = 2$ y una energía de $E_2 = E_1/2^2 = -3.4$ eV. En la figura 4.24 aparece un diagrama de los niveles de energía que muestra las energías de estos estados energéticos discretos y los números cuánticos correspondientes. El nivel superior, que corresponde a $n = \infty$ (o $r = \infty$) y $E = 0$, representa el estado en el cual el electrón es removido del átomo y queda sin movimiento. La energía mínima para ionizar el átomo (es decir, para remover por completo a un electrón en el estado base de la influencia del protón) se de-

nomina **energía de ionización.** Como puede verse a partir de la figura 4.24, la energía de ionización para el hidrógeno, con base en el cálculo de Bohr, es 13.6 eV. Esto constituyó otro logro sustancial para la teoría de Bohr, porque la energía de ionización para el hidrógeno ya había sido medida exactamente igual a 13.6 eV.

Para calcular la frecuencia del fotón emitido cuando el electrón salta de una órbita exterior a una órbita interior pueden utilizarse la ecuación 4.30 y el tercer postulado de Bohr:

$$f = \frac{E_i - E_f}{h} = \frac{ke^2}{2a_0 h}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \tag{4.32}$$

Debido a que la cantidad que se mide realmente es la longitud de onda, conviene convertir la frecuencia en longitud de onda usando $c = f\lambda$ para obtener

Longitud de onda de las emisiones de hidrógeno

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{f}{c} = \frac{ke^2}{2a_0 hc}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \tag{4.33}$$

El hecho extraordinario es que la expresión *teórica*, ecuación 4.33, es idéntica a la relación *empírica* de Balmer

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) \tag{4.34}$$

suponiendo que la combinación de constantes $ke^2/2a_0hc$ es igual a la constante determinada experimentalmente por Rydberg, $R = 1.0973732 \times 10^7\ \text{m}^{-1}$. Cuando a fines de 1913 Bohr demostró la concordancia de estas dos cantidades con una precisión aproximada del 1%, este hecho fue reconocido como el logro máximo de su teoría cuántica del hidrógeno. Además, Bohr demostró que todas las series espectrales observadas para el hidrógeno mencionadas previamente en esta sección poseen una interpretación natural en su teoría. En la figura 4.24 estas series espectrales se muestran como transiciones entre niveles de energía.

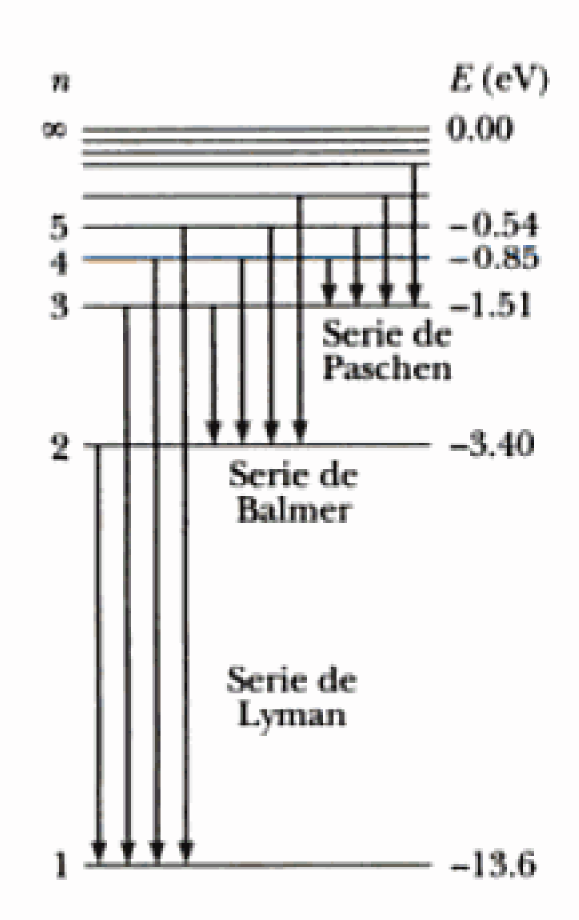


Figura 4.24 Diagrama de los niveles de energía para el hidrógeno. En estos diagramas las energías permitidas se grafican en el eje vertical. En el eje horizontal no se grafica nada, aunque la dimensión horizontal del diagrama es lo suficientemente grande como para mostrar las transiciones permitidas. Observe que los números cuánticos se proporcionan a la izquierda.

De inmediato, Bohr extendió su modelo para el hidrógeno a otros elementos en los cuales se habían removido todos los electrones, menos uno. Se sospechaba que elementos ionizados como He^+, Li^{2+} y Be^{3+} existían en atmósferas estelares calientes, donde con frecuencia ocurrían colisiones atómicas con suficiente energía para remover por completo uno o más electrones atómicos. Bohr demostró que varias de las misteriosas líneas observadas en el Sol y las estrellas podían no deberse al hidrógeno, sino que podían predecirse en forma correcta si se atribuían simplemente a helio ionizado, de acuerdo con su teoría. En general, para describir un solo electrón en órbita alrededor de un núcleo fijo de carga $+Ze$, la teoría de Bohr proporciona

$$r_n = (n^2)\frac{a_0}{Z} \tag{4.35}$$

y

$$E_n = -\frac{ke^2}{2a_0}\left(\frac{Z^2}{n^2}\right) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.36}$$

EJEMPLO 4.6 Líneas espectrales provenientes de la estrella ζ-Puppis

Las misteriosas líneas observadas por el astrónomo estadounidense Edward Charles Pickering en 1896 en el espectro de la estrella ζ-Puppis satisfacen la fórmula empírica

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{(n_f/2)^2} - \frac{1}{(n_i/2)^2}\right)$$

donde R es, de nuevo, la constante de Rydberg. Demuestre que estas líneas pueden explicarse con la teoría de Bohr si se considera que son originadas a partir de He^+.

Solución El He^+ tiene $Z = 2$. Así, los niveles energéticos permitidos están dados por la ecuación 4.36 como

$$E_n = \frac{ke^2}{2a_0}\left(\frac{4}{n^2}\right)$$

Al usar $hf = E_i - E_f$ se encuentra

$$f = \frac{E_i - E_f}{h} = \frac{ke^2}{2a_0h}\left(\frac{4}{n_f^2} - \frac{4}{n_i^2}\right)$$
$$= \frac{ke^2}{2a_0h}\left(\frac{1}{(n_f/2)^2} - \frac{1}{(n_i/2)^2}\right)$$

o bien

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{f}{c} = \frac{ke^2}{2a_0hc}\left(\frac{1}{(n_f/2)^2} - \frac{1}{(n_i/2)^2}\right)$$

Esta es la solución esperada, ya que $R \equiv ke^2/2a_0hc$.

EJEMPLO 4.7 Una transición electrónica en el hidrógeno

El electrón en un átomo de hidrógeno en reposo realiza una transición desde el estado energético $n = 2$ hasta el estado fundamental $n = 1$.

a) Encuentre la longitud de onda, la frecuencia y la energía (eV) del fotón emitido.

Solución Es posible usar directamente la ecuación 4.34 para obtener λ, con $n_i = 2$ y $n_f = 1$:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) = R\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3R}{4}$$

$$\lambda = \frac{4}{3R} = \frac{4}{3(1.097 \times 10^7\ \text{m}^{-1})}$$
$$= 1.215 \times 10^{-7}\ \text{m} = 121.5\ \text{nm}$$

Esta longitud de onda está en la región ultravioleta.

Debido a que $c = f\lambda$, la frecuencia del fotón es

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8\ \text{m/s}}{1.215 \times 10^{-7}\ \text{m}} = 2.47 \times 10^{15}\ \text{Hz}$$

La energía del fotón está dada por $E = hf$, de modo que

$$E = hf$$
$$= (4.136 \times 10^{-15}\ \text{eV}\cdot\text{s})(2.47 \times 10^{15}\ \text{Hz}) = 10.2\ \text{eV}$$

b) En el cálculo del inciso a) se supone que *toda* la energía de transición desde $n = 2$ hasta $n = 1$ se la lleva el fotón; no obstante, esto es técnicamente incorrecto porque parte de esta energía debe ir hacia el movimiento en retroceso del átomo. Aplicando la conservación de la cantidad de movimiento al sistema (átomo + fotón), y suponiendo que la energía de retroceso del átomo es pequeña si se compara con la energía de separación de los niveles $n = 2$ y $n = 1$, encuentre la cantidad de movimiento y la energía del átomo de hidrógeno en retroceso.

Solución Debido a que la cantidad de movimiento se conserva y a que la cantidad de movimiento total antes de la emisión es cero, ésta también debe ser igual a cero después de la emisión. En consecuencia, el fotón y el átomo se mueven en direcciones opuestas, con

$$mv = \frac{E_{\text{fotón}}}{c}$$

donde m y v son la masa y la velocidad de retroceso del átomo de hidrógeno, $E_{\text{fotón}}$ es la energía del fotón (menos de 10.2 eV) y c es la velocidad de la luz. Debido a que la diferencia de energía entre los niveles energéticos $n = 2$ y $n = 1$, E, es la fuente tanto de la energía del fotón como de la energía de retroceso del átomo, puede escribirse

$$E = E_{\text{fotón}} + \tfrac{1}{2}mv^2$$

Debido a que el átomo es masivo, puede suponerse que su energía de retroceso v y su energía cinética son tan pequeñas que $E \approx E_{\text{fotón}}$. Al sustituir $E_{\text{fotón}} = 10.2$ en la expresión para mv se obtiene

$$mv = 10.2\ \text{eV}/c$$

La energía cinética (aproximada) de retroceso del átomo de hidrógeno puede calcularse ahora:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{(mv)^2}{m} = (0.5)\frac{(10.2\ \text{eV})^2}{mc^2}$$
$$= \frac{(0.5)(10.2\ \text{eV})^2}{938.8 \times 10^6\ \text{eV}} = 5.56 \times 10^{-8}\ \text{eV}$$

Así, la fracción de la diferencia de energía entre los niveles $n = 2$ y $n = 1$ que se transforma en energía de retroceso del átomo *es muy* pequeña, aproximadamente de 5 partes por billón:

$$\frac{K}{E} = \frac{5.56 \times 10^{-8}\ \text{eV}}{10.2\ \text{eV}} = 5.4 \times 10^{-9}$$

Evidentemente, el sencillo proceso de igualar la energía del fotón con la separación de los niveles energéticos atómicos produce respuestas exactas porque para conservar la cantidad de movimiento se requiere poca energía.

Ejercicio 3 Verifique la aproximación hecha en el ejemplo 4.7 de que $E \approx E_{\text{fotón}}$, calculando directamente la energía cinética de retroceso del átomo de hidrógeno, $1/2mv^2$. (*Sugerencia*: Resuelva en forma simultánea $mv = E_{\text{fotón}}/c$ y $E = E_{\text{fotón}} + 1/2mv^2$ para demostrar que $v \approx E/mc$, calcule el valor numérico de $1/2mv^2$ y compare esta respuesta con el resultado proporcionado en el ejemplo 4.7.)

Ejercicio 4 ¿Cuál es la longitud de onda del fotón emitido por el hidrógeno cuando el electrón realiza una transición desde el estado $n = 3$ hasta el estado $n = 1$?

Respuesta $\dfrac{9}{8R} = 102.6$ nm.

EJEMPLO 4.8 La serie de Balmer para el hidrógeno

La serie de Balmer para el átomo de hidrógeno corresponde a transiciones electrónicas que terminan en el estado de número cuántico $n = 2$, como se muestra en la figura 4.24.

a) Encuentre el fotón emitido de longitud de onda más larga y determine su energía.

Solución El fotón con la longitud de onda más larga (el menos energético) en la serie de Balmer resulta de la transición desde $n = 3$ hasta $n = 2$. Usando la ecuación 4.34 se obtiene

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

$$\frac{1}{\lambda_{\text{máx}}} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{5}{36}R$$

$$\lambda_{\text{máx}} = \frac{36}{5R} = \frac{36}{5(1.097 \times 10^7\ \text{m}^{-1})} = 656.3\ \text{nm}$$

Esta longitud de onda está en la región roja del espectro visible.

La energía de este fotón es

$$E_{\text{fotón}} = hf = \frac{hc}{\lambda_{\text{máx}}}$$

$$= \frac{(6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s})(3 \times 10^8\ \text{m/s})}{656.3 \times 10^{-9}\ \text{m}}$$

$$= 3.03 \times 10^{-19}\ \text{J} = 1.89\ \text{eV}$$

la cual también puede obtenerse usando la expresión $hf = E_3 - E_2$, donde E_2 y E_3 son los niveles energéticos del átomo de hidrógeno, que puede calcularse a partir de la ecuación 4.31. Observe que este es el fotón de menor energía en esta serie porque implica el menor cambio de energía.

b) Encuentre el fotón de longitud de onda más corta emitido en la serie de Balmer.

Solución El fotón de longitud de onda más corta (el más energético) en la serie de Balmer es emitido cuando el electrón realiza una transición desde $n = \infty$ hasta $n = 2$. En consecuencia,

$$\frac{1}{\lambda_{\text{mín}}} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{R}{4}$$

$$\lambda_{\text{mín}} = \frac{4}{R} = \frac{4}{1.097 \times 10^7\ \text{m}^{-1}} = 364.6\ \text{nm}$$

Esta longitud de onda está en la región ultravioleta y corresponde al límite de la serie.

Ejercicio 5 Encuentre la energía del fotón de longitud de onda más corta emitido en la serie de Balmer del hidrógeno.

Respuesta 3.40 eV.

Aunque la deducción teórica del espectro de líneas fue una hazaña extraordinaria, el alcance y el impacto del excepcional logro de Bohr sólo se ve realmente cuando se percibe qué otras cosas fueron abordadas en su artículo de tres partes de 1913:

- Explicó por qué se ven menos líneas en el espectro de absorción del hidrógeno que en el espectro de emisión.
- Explicó la emisión de rayos X a partir de átomos.
- Explicó el origen nuclear de las partículas β.

- Explicó las propiedades químicas de los átomos en términos del modelo de capas de electrones en los átomos.
- Explicó cómo los átomos se asocian para formar moléculas.

Dos de estos tópicos, la comparación de la absorción y la emisión en el hidrógeno y la estructura de capas de los átomos son de tal importancia que merecen una explicación más detallada.

Ya se ha indicado que un gas absorbe a longitudes de onda que corresponden exactamente a algunas líneas de emisión, pero no toda línea presente en la emisión se observa como una línea oscura de absorción. Bohr explicó la absorción como el inverso de la emisión; es decir, un electrón en un estado energético dado sólo puede absorber un fotón de la frecuencia exacta necesaria para producir un "salto" desde un nivel energético inferior a un nivel energético superior. Por lo general, los átomos de hidrógeno están en el estado fundamental ($n = 1$) y sólo así la serie de Liman de alta energía correspondiente a transiciones desde el estado fundamental hasta estados energéticos superiores se observa en la absorción. La serie de Balmer, de longitud de onda más larga, corresponde a transiciones que se originan en el primer estado excitado ($n = 2$) no se observa porque la energía térmica media de cada átomo es insuficiente para elevar al electrón al primer estado excitado. Es decir, el número de electrones en el primer estado excitado es insuficiente, a temperaturas ordinarias, para producir absorción mensurable.

EJEMPLO 4.9 El hidrógeno en su primer estado excitado

Calcule la temperatura a la cual muchos átomos de hidrógeno están en su primer estado excitado ($n = 2$). ¿Qué series deben ser prominentes en la absorción a esta temperatura? (Calcule ambas a partir de $N_2/N_1 = \exp(-\Delta E/k_B T)$ y de $\frac{3}{2}k_B T =$ energía térmica media.)

Solución A temperatura ambiente casi todos los átomos de hidrógeno están en el estado fundamental con una energía de −13.6 eV. El primer estado excitado ($n = 2$) posee una energía igual a $E_2 = -3.4$ eV. En consecuencia, cada átomo de hidrógeno debe ganar una energía de 10.2 eV para alcanzar el primer estado excitado. Si los átomos han de obtener energía del calor, entonces debe tenerse

$$\frac{3}{2}k_B T = \frac{\text{energía térmica media}}{\text{átomo}} \approx 10.2 \text{ eV}$$

o bien

$$T = \frac{10.2 \text{ eV}}{(3/2)k_B} = \frac{10.2 \text{ eV}}{(1.5)(8.62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})}$$
$$= 79\,000 \text{ K}$$

Este resultado se podrá verificar usando la distribución de Boltzmann. En la sección 3.3 se vio que la probabilidad de encontrar un átomo con energía E a temperatura T es

$$P(E) = P_0 e^{-(E-E_0)/k_B T}$$

donde P_0 es la probabilidad de encontrar el átomo en el estado fundamental de energía, E_0. A partir de esta expresión, se concluye que la razón del número de átomos en dos niveles energéticos distintos en equilibrio térmico a temperatura T es

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{P(E_2)}{P(E_1)} = e^{-(E_2-E_1)/k_B T}$$

donde N_2 es el número en el nivel superior, N_1 es el número en el nivel inferior y ΔE es la separación energética de los dos niveles. Esta ecuación se usará para determinar la temperatura a la cual aproximadamente 10% de los átomos de hidrógeno están en el estado $n = 2$.

$$\frac{N_2}{N_1} = 0.10 = e^{-(10.2 \text{ eV})/k_B T}$$

o bien

$$\ln(0.10) = -\frac{10.2 \text{ eV}}{k_B T}$$

Al despejar T se obtiene

$$T = -\frac{10.2 \text{ eV}}{k_B \ln(0.10)} = -\frac{10.2 \text{ eV}}{(8.62 \times 10^{-5} \text{ eV/K})\ln(0.10)}$$
$$= 51\,000 \text{ K}$$

Así, los dos estimados coinciden en orden de magnitud y muestran que la serie de Balmer sólo se ve en la absorción si el gas absorbente está lo suficientemente caliente, como en una atmósfera estelar.

El comentario final sobre el trabajo de Bohr tiene que ver con su desarrollo de la teoría de las capas electrónicas para tratar átomos multielectrónicos. En la segunda parte de su artículo intentó encontrar disposiciones electrónicas estables sujetas a las condiciones de que el momento angular total de todos los electrones está cuantizada y, simultáneamente, que la energía total es mínima. Éste es un problema difícil; además, se hace más difícil a medida que se introducen en el sistema más electrones. Sin embargo, Bohr había tenido bastante éxito al explicar la actividad química de átomos multielectrónicos. Por ejemplo, pudo demostrar que el hidrógeno neutro podía adquirir otro electrón para convertirse en H^-, y que el helio neutro era particularmente estable con una capa cerrada más interna de dos electrones y un alto potencial de ionización. También propuso que el litio ($Z = 3$) presentaba un arreglo electrónico que consistía de dos electrones en una órbita cercana al núcleo y un tercero en una gran órbita externa enlazada débilmente. Esto explica la tendencia de los átomos de litio a perder un electrón y "adquirir una carga positiva al combinarse químicamente con otros elementos". Aunque no podemos permitirnos el lujo de mirar en detalle todas las predicciones de Bohr sobre átomos miltielectrónicos, a continuación se presentan sus ideas básicas de la estructura por capas:

- Electrones de elementos con número atómico superior forman anillos concéntricos estables, donde se permite un número definido de electrones para cada anillo o capa.
- El número de electrones en el anillo exterior determina la valencia.[15]

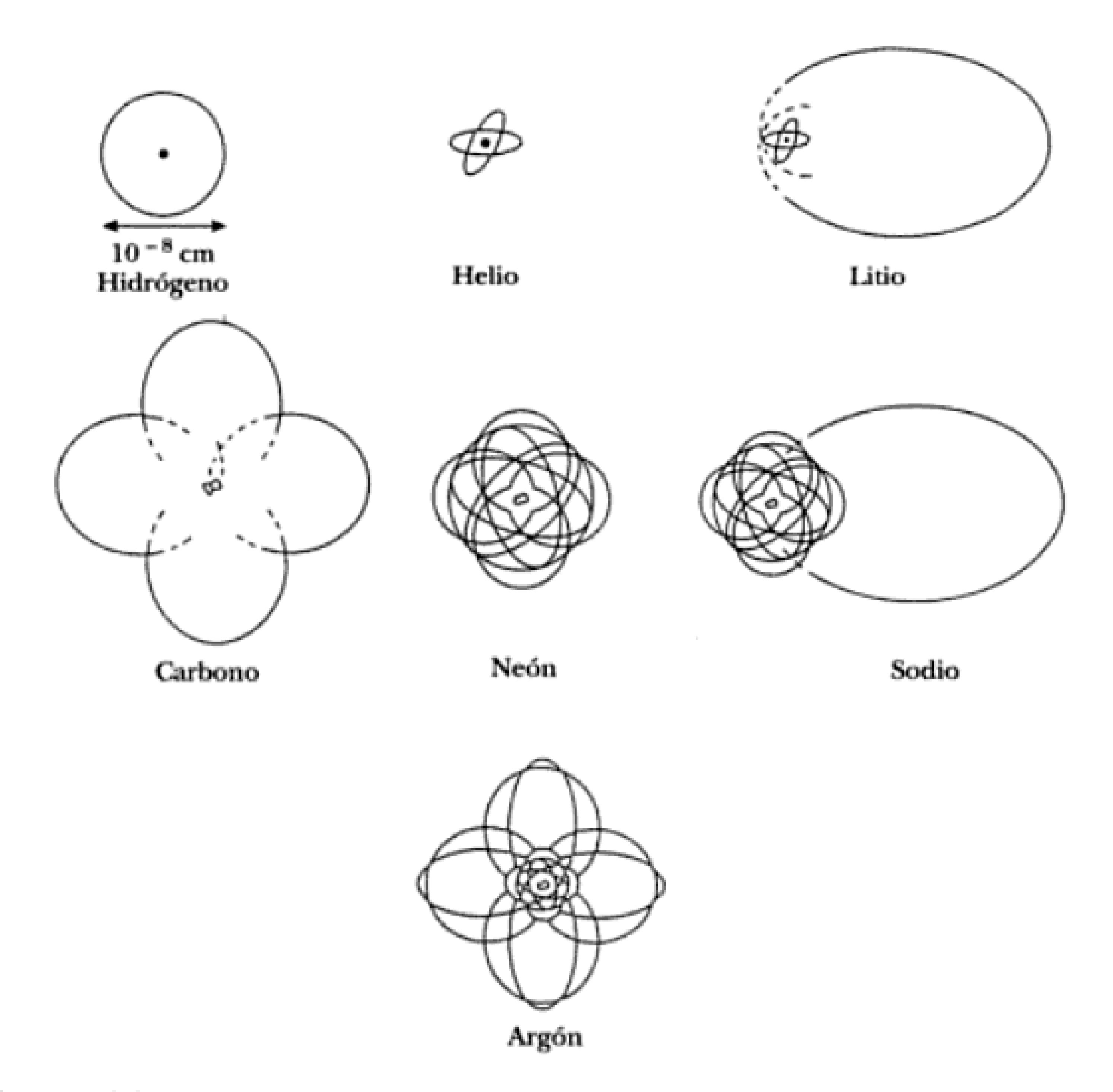


Figura 4.25 Bosquejos de Bohr de las órbitas de los electrones.

[15]G. N. Lewis, químico estadounidense, contribuyó mucho a la comprensión de la estructura por capas en 1916, haciendo avanzar los extraordinarios cimientos establecidos por Bohr.

Con una perspicacia casi mágica, Bohr concluyó la segunda parte de su artículo clásico con la explicación de las propiedades químicas semejantes del grupo del hierro (Fe, Co, Ni) y las tierras raras, que tienen números atómicos que aumentan progresivamente por 1 y de los que, por lo común, no se espera que tengan características semejantes. La respuesta, según Bohr, es que la configuración de los electrones en el anillo exterior de estos elementos es idéntica y que energéticamente es más favorable añadir electrones a anillos interiores. Bajo el riesgo de que alguien tomase demasiado en serio la idea de las órbitas electrónicas, en la figura 4.25 se muestran algunos bosquejos de órbitas electrónicas, según los trazó Bohr a principios del siglo XX.

4.4 PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA DE BOHR, O ¿POR QUÉ ESTÁ CUANTIZADO EL MOMENTO ANGULAR?

Ahí donde otros hubieran podido dejar un hueco salvaje y caótico entre las nuevas leyes revolucionarias, válidas para los sistemas atómicos, y las que se cumplen para los sistemas clásicos, Bohr proporcionó un *continuum* suave y refinado en la forma del **principio de correspondencia**. Este principio establece que **las predicciones de la teoría cuántica deben corresponder a las predicciones de la física clásica en la región de tamaños donde se sabe que la teoría clásica es válida.** Estos tamaños clásicos para longitud, masa y tiempo son del orden de centímetros, gramos y segundos, y típicamente implican números cuánticos muy grandes, como puede verse si se calcula n para un átomo de hidrógeno cuyo radio mide 1 cm. Si el número cuántico se vuelve grande debido a un incremento de tamaño o de masa, entonces es posible plantear el principio de correspondencia de manera simbólica como

Principio de correspondencia

$$\lim_{n\to\infty} [\text{física cuántica}] = [\text{física clásica}]$$

donde n es un número cuántico típico del sistema como el número cuántico para el hidrógeno. En manos de Bohr, el principio de correspondencia se convirtió en una herramienta maestra para probar nuevos resultados cuánticos, así como una fuente de postulados fundamentales sobre sistemas atómicos. De hecho, Bohr aplicó razonamientos de este tipo para llegar al concepto de cuantización del momento angular orbital de los electrones. Tanto la idea de Bohr sobre los estados de energía discretos no radiantes como el postulado de la emisión para átomos se basaban en la teoría de Planck sobre la cuantización de la energía de osciladores de cuerpo negro y en el tratamiento de Einstein del efecto fotoeléctrico. No obstante, el concepto de cuantización del momento angular parece haber surgido por completo a partir de la obra de Bohr *Gedankenkuche* (pensamiento de cocina), como acertadamente la denominó Einstein. En efecto, en algunos de sus últimos escritos, Bohr recalcó el punto de vista de que la cuantización del momento angular era un postulado, no deducible a partir de cualquier ley más profunda, y que su validez dependía simplemente de la coincidencia de su modelo con espectros experimentales.

Lo que es más interesante es que en su artículo de 1913 Bohr demostró con gran ingenio que la cuantización del momento angular es una consecuencia de la aparición gradual y paulatina de resultados clásicos a partir de la teoría cuántica en el límite de números cuánticos grandes. En particular, Bohr argumentó que, según su principio de correspondencia, la condición cuántica para la emisión ($\Delta E = hf$) y la teoría de la radiación clásica de Maxwell (cargas electrónicas con frecuencia orbital f emiten ondas de luz de frecuencia f) *deben cumplirse en forma simultánea para el caso de órbitas electrónicas extremadamente*

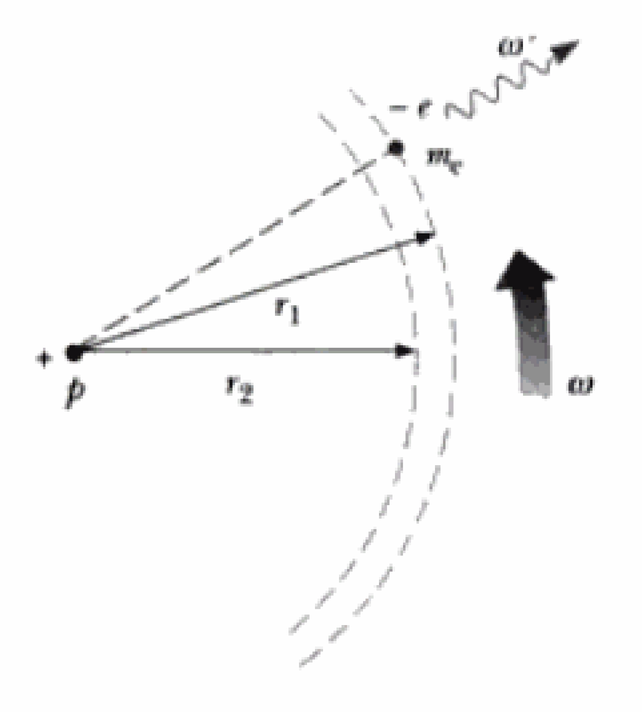


Figura 4.26 Límite clásico del átomo de Bohr. Observe que r_1 y r_2 son los radios de las dos órbitas cuánticas adyacentes, donde el electrón posee frecuencias angulares orbitales de ω_1 y ω_2. Se supone que $r_1 \approx r_2 \approx r$ y que $\omega_1 \approx \omega_2 \approx \omega$; ω'es la frecuencia angular de un fotón emitido en una transición desde r_1 hasta r_2.

grandes. Este caso se muestra en la figura 4.26. En esta figura, r_1 y r_2 son los radios de dos grandes órbitas adyacentes separadas energéticamente por una cantidad dE y ω es la frecuencia angular orbital del electrón, donde ω es aproximadamente constante en una transición entre grandes órbitas. (El procedimiento algebraico es más sencillo si en vez de la frecuencia se utiliza la frecuencia angular. Recuerde que la conexión es $\omega = 2\pi f$). Debido a que se desea determinar los valores permitidos del momento angular a partir del cambio conocido en la energía del átomo cuando se emite luz, se requiere la relación entre la energía total del átomo, $E = -ke^2/2r$ (ecuación 4.27) y la magnitud del momento angular total del átomo, $L = m_e vr = m_e \omega r^2$. Usando el hecho de que el electrón se mantiene en órbita debido a la fuerza de Coulomb, no es difícil mostrar que $1/r = m_e ke^2/L^2$ (vea el problema 30), de modo que la ecuación 4.27 se vuelve

$$E = -\frac{1}{2}\frac{m_e k^2 e^4}{L^2} \tag{4.37}$$

Al tomar la derivada de la ecuación 4.37 se obtiene la conexión buscada entre el cambio en energía y el cambio en el momento angular para el átomo de Bohr.

$$\frac{dE}{dL} = \frac{m_e k^2 e^4}{L^3} \tag{4.38}$$

Por último, se obtiene dE/dL en términos de ω, la frecuencia angular orbital del electrón, usando $L^3 = m_e k^2 e^4$ (vea el problema 30). Así,

$$\frac{dE}{dL} = \frac{m_e k^2 e^4}{(m_e k^2 e^4/\omega)} = \omega \tag{4.39}$$

Ahora considere la emisión de un fotón de energía $dE = dE = \hbar\omega'$ cuando el electrón hace una transición desde r_1 hasta r_2. La ecuación 4.39 se convierte en

$$dE = \omega\, dL$$

o bien

$$\hbar\omega' = \omega\, dL \tag{4.40}$$

donde ω' es la frecuencia angular del fotón y ω es la frecuencia angular orbital del electrón. Por lo general, ω' y ω no guardan una relación simple. No obstante, debido a que en este caso se está tratando con órbitas grandes, el principio de correspondencia establece que la teoría cuántica debe predecir la misma frecuencia para la luz emitida que la ley de radiación de Maxwell. Debido a que la teoría clásica de Maxwell requiere que el electrón radíe luz con la misma frecuencia que su frecuencia de movimiento orbital, $\omega = \omega'$, y la ecuación 4.40 se vuelve

$$\hbar\omega = \omega\, dL$$

o bien

$$dL = \hbar \tag{4.41}$$

La ecuación 4.41 muestra que el cambio en el momento angular electrónico para una transición entre grandes órbitas electrónicas adyacentes *siempre* es $\hbar$. Esto significa que debe considerarse que la magnitud del momento angular total del electrón en una órbita específica tiene un valor igual a un múltiplo entero de $\hbar$, o bien,

$$L = m_e vr = n\hbar \tag{4.42}$$

para n = enteros grandes.

Bohr se dio cuenta que, aunque la ecuación 4.42 fue deducida para el caso de grandes órbitas electrónicas, se trataba de un principio cuántico universal aplicable a todos los sistemas y de mayor validez que la ley de radiación de Maxwell. Esta visión tan audaz y adelantada de Bohr fue muy bien descrita por Einstein en la cita siguiente: "El que este cimiento inseguro y contradictorio [la física de 1910 a 1920] fuese suficiente para permitir que un hombre con el instinto y tacto únicos de Bohr descubriese las leyes fundamentales de las líneas espectrales y de las capas electrónicas de los átomos junto con su importancia para la química me pareció —y me sigue pareciendo incluso hoy— como un milagro. Ésta es la forma suprema de musicalidad en la esfera del pensamiento".

4.5 CONFIRMACIÓN DIRECTA DE LOS NIVELES DE ENERGÍA ATÓMICOS: EL EXPERIMENTO DE FRANCK-HERTZ

En las secciones precedentes se mostraron los embrollados razonamientos que indirectamente probaban la existencia de niveles cuantizados de energía en los átomos a partir de observaciones de los espectros ópticos de líneas emitidos por distintos elementos. Ahora la atención se enfocará en una prueba experimental más simple y directa de la existencia de niveles de energía discretos en átomos que implica su excitación debido a la colisión con electrones de baja energía. El primer experimento de este tipo fue realizado por los físicos alemanes James Franck y Gustav Hertz (un nieto de Heinrich Hertz) en 1914 con átomos de mercurio. Proporcionó una demostración experimental clara de la existencia en los átomos de niveles de energía cuantizados y demostró que los niveles deducidos a partir del bombardeo con electrones coincidían con los deducidos a partir de los espectros ópticos de líneas. Además, confirmó la universalidad de la cuantización de la energía en los átomos, ya que los muy diferentes procesos físicos de la emisión de fotones y el bombardeo con electrones produjeron los mismos niveles energéticos.

En la figura 4.27 se muestra un esquema de un dispositivo típico en un laboratorio universitario semejante al aparato de Franck-Hertz. Los electrones emitidos por el filamento son acelerados en una región relativamente larga

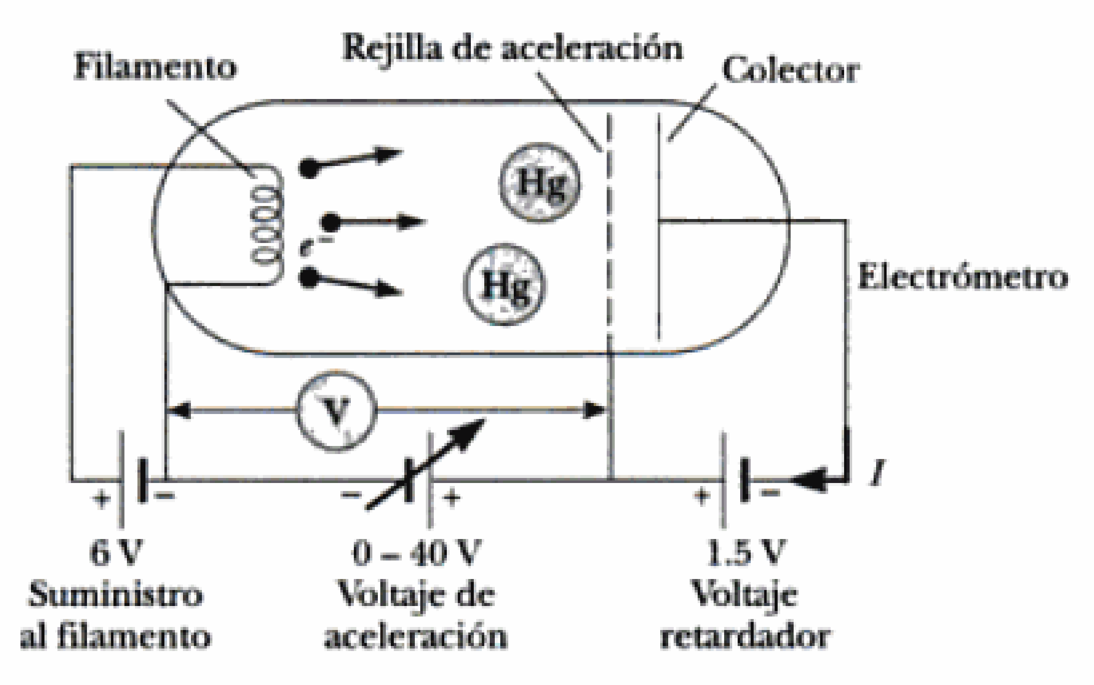


Figura 4.27 Aparato de Franck-Hertz. Una gota de mercurio puro se encierra en un tubo al vacío. A fin de obtener una densidad de mercurio muy alta, lo que garantizará que ocurran muchas colisiones electrón-átomo, el tubo se calienta hasta 185° durante las mediciones.

(≈ 1 cm) por el potencial positivo en la rejilla, V. Los electrones pueden llegar al colector y ser detectados en el electrómetro (un amperímetro sensible) si poseen suficiente energía para superar el potencial retardador de aproximadamente 1.5 V establecido sobre una distancia corta (≈ 1 mm) entra la rejilla y el colector. Con electrones de baja energía o bajos voltajes de aceleración ocurren colisiones perfectamente elásticas entre los electrones y los átomos de Hg, donde la *suma* de las energías cinéticas del electrón y del átomo se conservan. Debido a que el átomo de Hg es mucho más masivo que el electrón, éste transfiere muy poca energía cinética al átomo en una colisión (vea el problema 38). Incluso después de muchas colisiones, el electrón llega a la rejilla con una energía cinética de aproximadamente e veces V y llegará al colector si el voltaje de aceleración V es mayor que 1.5 V. Cuando V se incrementa ligeramente, más electrones llegan al colector y la corriente, I, aumenta.

A medida que el voltaje de aceleración asciende, se alcanza un voltaje crítico al que ocurren colisiones inelásticas en la rejilla, donde los electrones alcanzan una energía de e veces V. En estas colisiones inelásticas, los electrones pueden transferir casi toda su energía cinética al átomo, llevándolo al primer estado excitado (vea el problema 39 y la pregunta 9). Los electrones que chocan en forma inelástica no pueden superar el potencial de retardador y, en consecuencia, I decrece para este voltaje crítico. En la figura 4.28 se muestra una gráfica típica de corriente contra voltaje de aceleración, donde la primera caída de corriente (A) ocurre a un voltaje crítico ligeramente superior a 7 V. Cuando el voltaje se incrementa de nuevo, la región de la colisión inelástica se desplaza más cerca del filamento y los electrones que fueron detenidos por una colisión inelástica son reacelerados, llegando al colector y provocando otro aumento en la corriente (B). Otra caída (C) ocurre cuando V se incrementa tanto que un electrón puede experimentar dos colisiones inelásticas consecutivas: Un electrón excita a un átomo a la mitad entre el filamento y la rejilla, pierde toda su energía y luego es reacelerado para excitar a otro átomo en la rejilla. Al final tendrá una energía insuficiente para ser capturado. Este proceso se lleva a cabo de manera periódica con un voltaje creciente en la rejilla, lo que origina máximos y mínimos equidistantes en la curva I-V, como se muestra en la figura 4.28.

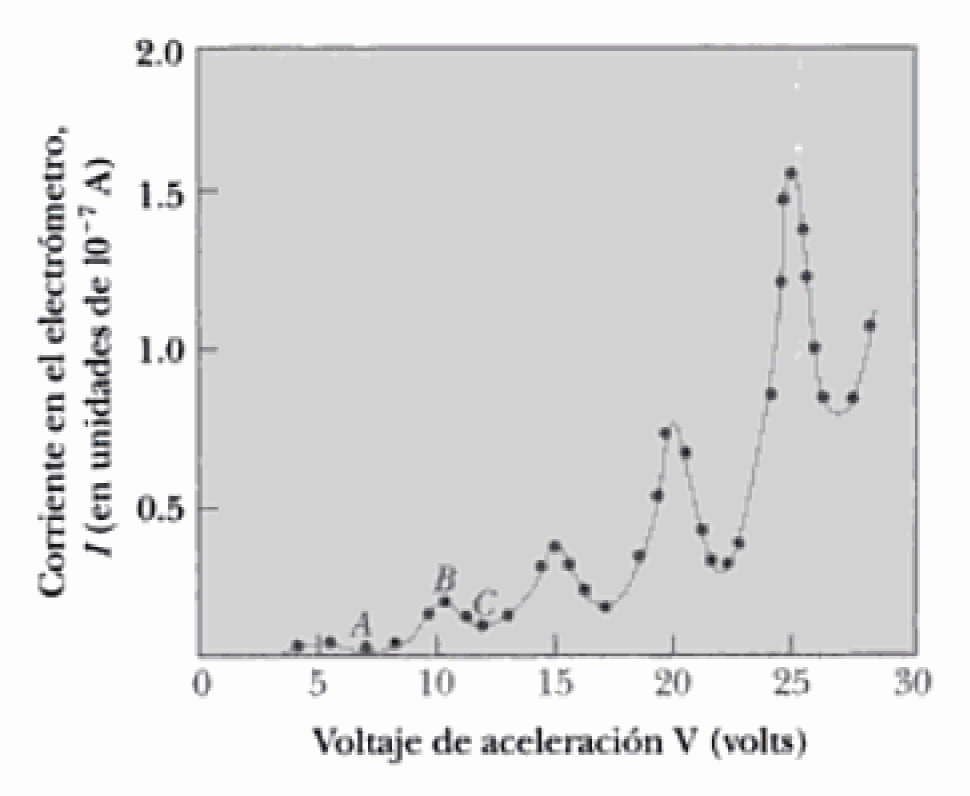


Figura 4.28 La corriente como una función del voltaje en el experimento de Franck-Hertz. Para obtener estos datos, el voltaje del filamento se estableció a 6 V y el tubo se calentó a 185°. (*Datos tomados por Bob Rodick, Utica College, generación de 1992.*)

Si las separaciones de máximos y mínimos adyacentes de la figura 4.28 se promedian con cuidado, puede encontrarse que el promedio es 4.9 ± 0.1 V, o una separación igual a 4.9 ± 0.1 eV entre el estado fundamental y el primer estado excitado. Sin embargo, observe que el primer mínimo no ocurre a 4.9 V sino aproximadamente a 7.1 V. La energía extra (7.1 − 4.9 = 2.2 eV) es necesaria porque el filamento y el colector están hechos de metales diferentes con distintas funciones trabajo. (Recuerde que la función trabajo es la energía necesaria para expulsar un electrón de un metal: vea el capítulo 3.) Aunque el filamento, como todos los buenos emisores, posee una función trabajo baja, el colector tiene una función trabajo alta, y es necesario suministrar energía de la función trabajo a fin de extraer un electrón del colector para que pueda circular corriente en el circuito.

Como se vio, Franck y Hertz usaron simples mediciones con un amperímetro y un voltímetro para demostrar que los átomos sólo pueden aceptar cantidades discretas de energía proveniente de un haz de electrones. Además, demostraron que los niveles energéticos obtenidos mediante el bombardeo con electrones coincidía con los resultados de la espectroscopía. Razonando que un átomo de Hg excitado de hecho a un nivel energético de 4.9 eV por arriba de su estado fundamental podía volver a éste mediante la emisión de un solo fotón (como había postulado Bohr), calcularon que la longitud de onda de tal fotón era

$$\Delta E = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

o bien

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{1\,240 \text{ eV}\cdot\text{nm}}{4.9 \text{ eV}} = 253 \text{ nm} \qquad (4.43)$$

Debido a que el cristal no es transparente a esta radiación ultravioleta, elaboraron un aparato de cuarzo y midieron cuidadosamente la radiación emitida, encontrando que la radiación de longitud de onda de 254 nm era emitida tan pronto como el voltaje de aceleración excedía los 4.9 V. Debido a esta confirmación experimental directa de las ideas básicas de Bohr sobre los niveles energéticos discretos en átomos y el proceso de emisión de fotones, Franck y Hertz fueron galardonados con el premio Nobel de física en 1925.

RESUMEN

Determinar la composición de los átomos depende en gran medida de cuatro experimentos clásicos:

- **La ley de Faraday de la electrólisis,** que puede plantearse como

$$m = \frac{(q)\,(\text{masa molar})}{(96\,500\text{ C})\,(\text{valencia})} \qquad (4.1)$$

  donde m es la masa liberada en un electrodo y q la carga total que pasa por la solución. La ley de Faraday muestra que los átomos constan de cargas positivas y negativas y que las cargas atómicas siempre son múltiplos de alguna carga unitaria.
- **La determinación lograda por J.J Thomson de e/m_e** y que el electrón forma parte de todos los átomos. Thomson calculó el valor de e/m_e al medir la desviación de un haz de electrones de diversos elementos, provocada por un campo eléctrico. Luego, aplicó un campo magnético para cancelar

la desviación eléctrica a fin de determinar la velocidad del electrón. La razón carga a masa del electrón en el experimento de Thomson es

$$\frac{e}{m_e} = \frac{V\theta}{B^2 \ell d} \tag{4.7}$$

donde V/d es la magnitud del campo eléctrico aplicado, ℓ es la longitud de las placas de deflexión verticales, θ es la desviación producida por el campo eléctrico y B es el campo magnético aplicado.

- **Determinación de Millikan de la carga fundamental, *e*.** Al equilibrar las fuerzas eléctrica y gravitacional sobre gotas individuales de aceite, Millikan pudo determinar la carga eléctrica fundamental y demostrar que las cargas siempre aparecen en múltiplos de e. El cuanto de carga puede determinarse a partir de la relación

$$ne = \left(\frac{mg}{E}\right)\left(\frac{v + v_1'}{v}\right) \tag{4.11}$$

donde n es un entero, m es la masa de la gota, E es la magnitud del campo eléctrico, v es la velocidad terminal de la gota con el campo apagado (cayendo), y v_1' es la velocidad terminal con el campo encendido (subiendo).

- **Dispersión de Rutherford de partículas α por átomos de oro,** que estableció el modelo nuclear del átomo. Al medir la razón de dispersión de partículas α en un ángulo ϕ, Rutherford pudo establecer que casi toda la masa y la carga positiva de un átomo, $+Ze$, están concentradas en un volumen diminuto del átomo con un diámetro aproximado de 10^{-14} m.

La explicación del movimiento de los electrones en el interior del átomo y de las ricas y elaboradas series de líneas espectrales emitidas por el átomo fue proporcionada por Bohr. La teoría de Bohr se basaba en parte en la mecánica clásica y en parte en algunas nuevas y sorprendentes ideas cuánticas. **Los postulados de Bohr** eran

- Los electrones se mueven alrededor del núcleo en órbitas circulares determinadas por las leyes de Coulomb y de Newton.
- Sólo ciertas órbitas son estables. El electrón no radía energía electromagnética en estas órbitas especiales, y como la energía es constante con el tiempo, lo anterior se denomina **estados estacionarios.**
- Cuando un electrón salta de una órbita inicial de energía E_i a una órbita final de energía E_f, se emite una línea espectral de frecuencia f, donde

$$hf = E_i - E_f \tag{4.23}$$

- Los tamaños de las órbitas electrónicas estables se determinan al requerir que el momento angular del electrón sea un múltiplo entero de $\hbar$:

$$m_e vr = n\hbar \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.24}$$

Estos postulados llevaron a órbitas cuantizadas y energías cuantizadas para un electrón simple en órbita alrededor de un núcleo con carga $+Ze$, dada por

$$r_n = \frac{n^2 a_0}{Z} \tag{4.35}$$

y

$$E_n = -\frac{ke^2}{2a_0}\frac{Z^2}{n^2} = -\frac{13.6\ Z^2}{n^2}\ \text{eV} \tag{4.36}$$

donde n es un entero y $a_0 = (\hbar^2/m_e ke^2 = 0.529$ Å $= 0.0529$ nm) es el radio de Bohr.

Para tender un puente entre el dominio familiar de la física clásica y el más incierto territorio de los sistemas atómicos y la teoría cuántica, Bohr proporcionó el **principio de correspondencia.** Este principio establece que las predicciones de la teoría cuántica deben corresponder a las predicciones de la física clásica en la región de tamaños donde se sabe que la teoría clásica es verdadera.

El experimento de Franck-Hertz proporciona evidencia experimental directa de la energía cuantizada de los átomos. Este experimento muestra que los átomos sólo pueden aceptar cantidades discretas de energía proveniente del bombardeo con un haz de electrones.

BIBLIOGRAFÍA ADICIONAL SUGERIDA

1. G. Holton, *Introduction to Concepts and Theories in Physical Science*, Reading, MA, Addison-Wesley, 1952. Es un repaso exacto, humano y eminentemente legible de la historia y avance de los conceptos científicos desde los griegos hasta la teoría cuántica.
2. J. Perrin, *Atoms*, traducido por D. L. Hammick, Nueva York, D. Van Nostrand Co., 1923. Es un soberbio relato de primera mano sobre la evidencia de los átomos a principios del siglo XX.
3. G. Thomson, *J. J. Thomson and the Cavendish Laboratory in His Day*, Nueva York, Doubleday and CO., 1965. Este libro ofrece una narración fascinante hecha por el hijo de Thomson sobre el experimento de e/m y otras obras.
4. R. A. Millikan, *Electrons* (+ *and* −), *Protons, Neutrons, Mesotrons, and Cosmic Rays*, Chicago, University of Chicago Press, 1947. Este libro proporciona un relato detallado sobre la determinación de e.
5. *Physics Today*, octubre de 1985. Número especial: Niels Bohr Centennial. Esta revista contiene tres artículos que tratan las contribuciones científicas, sociales y culturales de Bohr a la comunidad física. Incluye muchas fotografías interesantes de los personajes clave.

PREGUNTAS

1. La teoría de Bohr del átomo de hidrógeno se basa en varias suposiciones. Analícelas, y determine su importancia. ¿Alguna de estas suposiciones contradice la física clásica?
2. Suponga que el electrón en el átomo de hidrógeno cumple las leyes de la mecánica clásica, en vez de las de la mecánica cuántica. ¿Por qué un átomo *hipotético* como éste emite un espectro continuo en vez del espectro de líneas observado?
3. ¿Es posible que el electrón en el estado fundamental del átomo de hidrógeno absorba un fotón de energía a) *menor* que 13.6 eV y b) *mayor* que 13.6 eV?
4. Explique el concepto de estado estacionario atómico. ¿Por qué esta idea es de central importancia en la explicación de la estabilidad del átomo de Bohr?
5. ¿El principio de correspondencia de Bohr es válido sólo para la teoría cuántica? ¿Puede proporcionar un ejemplo de la aplicación de este principio a la teoría de la relatividad?
6. Con base en las ideas de Bohr, explique por qué en absorción no es posible ver todas las líneas de emisión.
7. Los resultados de mediciones y cálculos clásicos a veces se denominan números clásicos. Compare y explique las diferencias entre los números cuánticos y los clásicos.
8. ¿Qué factor provoca el ancho finito en los picos de la curva $I-V$ del experimento de Franck-Hertz?
9. Un electrón con energía cinética de 4.9 eV (masa = 5.49×10^{-4} u) choca inelásticamente con un átomo estacionario de mercurio (masa = 201 u). Explique en forma cualitativa por qué casi 100% de la energía del electrón podría utilizarse para hacer subir el átomo a su primer estado excitado.
10. ¿Por qué en el experimento de Franck-Hertz no se aprecian otras caídas de corriente correspondientes a la excitación del átomo de mercurio al segundo estado excitado, tercer estado excitado, etc.? (*Sugerencia:* A una densidad tan alta como la del vapor de mercurio utilizado en el experimento, la probabilidad de que un electrón a 4.9 eV experimente una colisión inelástica es aproximadamente 1.)
11. A continuación se muestran cuatro transiciones posibles para un átomo de hidrógeno:

(A) $n_i = 2;\ n_f = 5$

(B) $n_i = 5;\ n_f = 3$

(C) $n_i = 7;\ n_f = 4$

(D) $n_i = 4;\ n_f = 7$

a) ¿Qué transición generan los fotones que tienen la longitud de onda más corta? b) ¿Para qué transición el átomo gana mayor energía? c) ¿Para qué transición (o transiciones) el átomo pierde energía?

PROBLEMAS

4.2 Composición de los átomos

1. Use el faraday (96 500 C) y el número de Avogadro para determinar la carga del electrón. Explique su razonamiento.
2. *Pesaje de un átomo de cobre en un experimento de electrólisis.* Un experimento normal implica el paso de una corriente de varios ampers a través de una solución de sulfato de cobre ($CuSO_4$) durante un lapso de tiempo y la determinación de la masa del cobre enchapado sobre el cátodo. Si se encuentra que una corriente de 1 A circulando durante 3 600 s deposita 1.185 g de cobre, encuentre a) el número de átomos de cobre depositados, b) el peso de un átomo de cobre y c) la masa molar del cobre.
3. Una partícula misteriosa penetra en la región entre las placas de un aparato de Thomson, como se muestra en la figura 4.6. Se mide que el ángulo de deflexión θ es de 0.20 radianes (hacia abajo) para esta partícula cuando $V = 2\,000$ V, $\ell = 10$ cm y $d = 2$ cm. Si un campo magnético perpendicular, de magnitud 4.57×10^{-2} T, se aplica simultáneamente con el campo eléctrico, la partícula pasa entre las placas sin desviarse. a) Encuentre q/m para esta partícula. b) Identifique la partícula. c) Encuentre la velocidad horizontal con la que entró la partícula en las placas. d) Para esta partícula, ¿es necesario utilizar la mecánica relativista?
4. En la figura P4.4 se muestra un tubo de rayos catódicos que permite determinar e/m_e sin aplicar un campo magnético. En este caso v_x puede encontrarse midiendo el aumento de temperatura cuando se detiene una cantidad conocida de carga en un blanco. Si se miden V, ℓ, d, D y y, es posible encontrar e/m_e. Demuestre que

$$\frac{e}{m_e} = \frac{yv_x^2 d}{V\ell[(\ell/2) + D]}$$

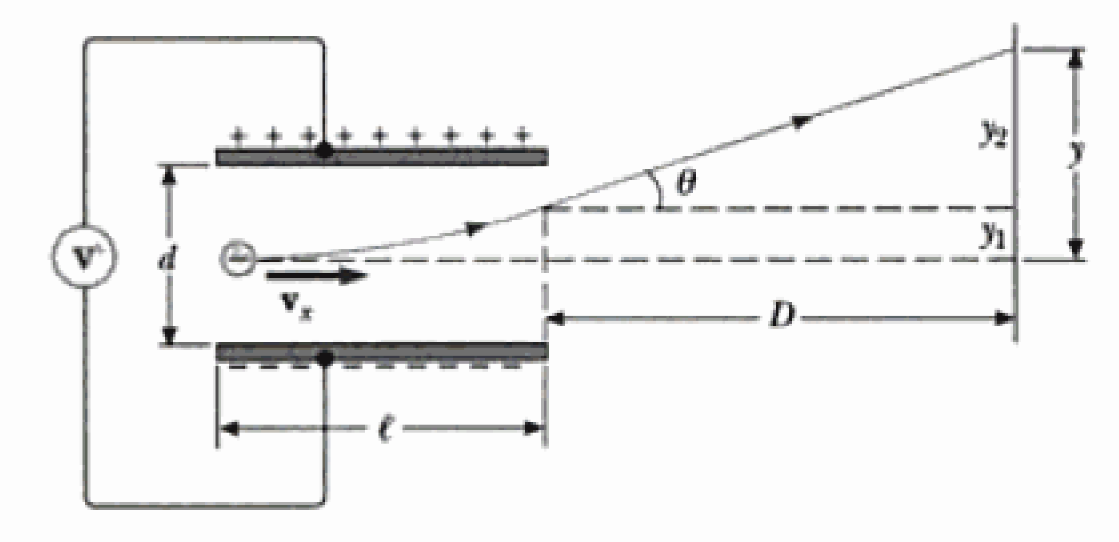


Figura P4.4 Desviación de una partícula cargada por un campo eléctrico.

5. *Un experimento tipo Thomson con electrones relativistas.* Uno de los primeros experimentos para demostrar que $p = \gamma mv$ (en vez de $p = mv$) fue el de Neumann. [G. Neumann, *Ann. Physik* 45:529 (1914).] El aparato que se muestra en la figura P4.5 es idéntico al de Thomson, excepto que la fuente de electrones a alta velocidad es una fuente radiactiva de radio y el campo magnético **B** está dispuesto para actuar sobre el electrón a lo largo de toda su trayectoria, desde la fuente hasta el detector. Los campos eléctrico y magnético combinados actúan como un *selector de velocidad,* donde sólo pasan electrones con velocidad v, con $v = V/Bd$ (ecuación 4.6), mientras que en la región en donde sólo hay un campo magnético el electrón se mueve en un círculo de radio r, con r dado por $p = Bre$. Esta última región ($\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B}$ = constante) actúa como un *selector de cantidad de movimiento* debido a que los electrones con cantidades de movimiento mayores poseen trayectorias con radios más grandes. a) Demuestre que el radio del círculo descrito por el electrón está dado por $r = (\ell^2 + y^2)/2y$. b) Valores típicos para el experimento de Neumann fueron $d = 2.51 \times 10^{-4}$ m, $B = 0.0177$ T y $l = 0.0247$ m. Para $V = 1\,060$ V, se midió que y, el valor más crítico, era de 0.0024 ± 0.0005 m. Demuestre que estos valores no coinciden con el valor de y calculado a partir de $p = mv$, pero que sí lo hacen con el valor de y calculado a partir de $p = \gamma mv$ en el intervalo de incertidumbre experimental. (*Sugerencia:* Encuentre v a partir de la ecuación 4.6, use $mv = Bre$ o $\gamma mv = Bre$ para encontrar r, y use r para encontrar y.)

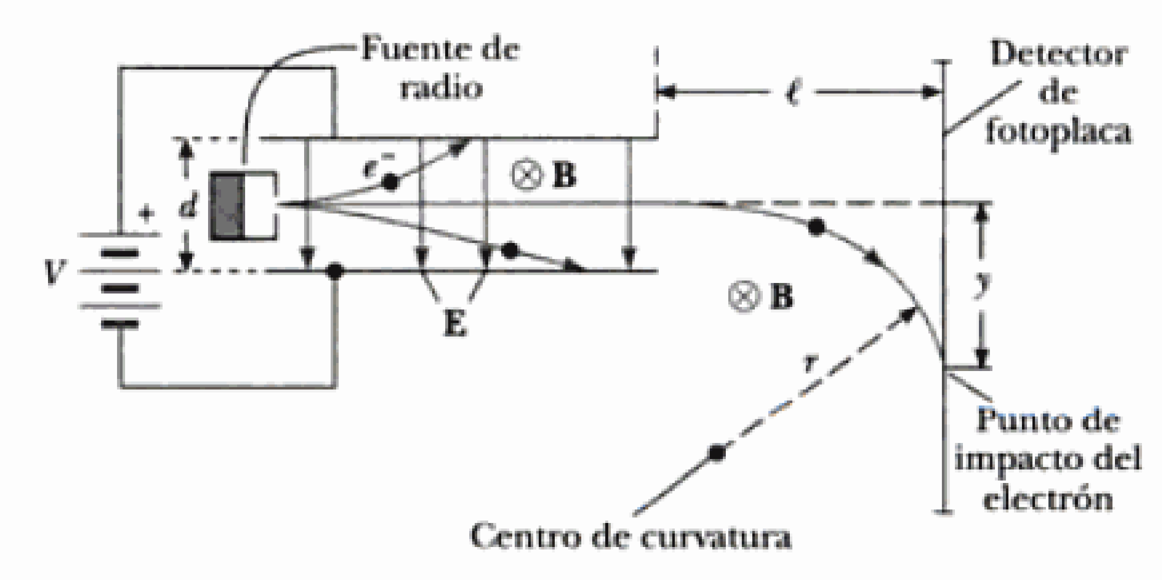


Figura P4.5 Aparato de Neumann.

6. En un experimento de la gota de aceite de Millikan, las placas del condensador están separadas por 2 cm, el potencial a través de las placas es de 4 000 V, la distancia de ascenso o descenso es de 4 mm, la densidad de las gotas de aceite es 0.800 g/cm^3 y la viscosidad del aire es igual a 1.81×10^{-5} kg·m^{-1}s^{-1}. El tiempo medio de caída en ausencia de un campo eléctrico es de 15.9 s. Cuando el campo se enciende, se observan los siguientes tiempos de ascenso en segundos: 36, 17.3, 24, 11.4 y 7.54. a) Encuentre el radio y la masa de la gota utilizada en este experimento. b) Calcule la carga sobre cada gota y demuestre que la carga está cuantizada, al considerar tanto el tamaño de cada carga como la cantidad de carga ganada (o perdida) cuando cambia el tiempo de ascenso. c) Determine la carga del electrón a partir de estos datos. Puede suponer que e está entre 1.5 y 2×10^{-19} C.
7. A continuación se proporcionan datos reales de uno de los primeros experimentos realizados por Millikan:

$a = 0.000276$ cm
$\rho = 0.9561$ g/cm^3
Tiempo medio de caída = 11.894 s
Distancia de ascenso o caída = 10.21 nm
Separación de las placas = 16 mm
Diferencia de potencial media entre las placas = 5 085 V
Tiempos de ascenso secuenciales en segundos: 80.708, 22.336, 22.390, 22.368, 140.566, 79.600, 34.748, 34.762, 29.286, 29.236.
Encuentre el valor medio e si se requiere que la diferencia de carga en gotas con tiempos de ascenso diferentes sea igual a un número *entero* de cargas elementales.

8. Un haz paralelo de partículas α con energía cinética fija incide normalmente sobre una lámina de oro. a) Si a 20° se detectan 100 partículas α, ¿cuántas se encontrarán a 40°, 60°, 80° y 100°? b) Si la energía cinética de las partículas α incidentes se duplica, ¿cuántas partículas α dispersadas se observarán a 20°? c) Si las partículas α originales incidiesen en una lámina de cobre del mismo grosor, ¿cuántas partículas α dispersadas se observarían a 20°? Observe que $\rho_{\text{Cu}} = 8.9$ g/cm^3 y $\rho_{\text{Au}} = 19.3$ g/cm^3.

9. Se ha observado que partículas α con energías cinéticas de 13.9 MeV y más, que inciden sobre láminas de Cu, no cumplen con la ley $(\text{sen }\phi/2)^{-4}$ de Rutherford. Calcule el tamaño nuclear del cobre a partir de estas observaciones, suponiendo que el núcleo de Cu permanece fijo en una colisión frontal con una partícula α.

10. Un aparato típico de dispersión de Rutherford consta de un tubo al vacío que contiene una fuente de partículas α de Polonio 210 (partículas α de 5.2 MeV), colimadores, una lámina de oro como blanco y un película especial para detectar partículas α. Esta película mide a la vez todas las partículas α dispersadas sobre un intervalo de $\phi = 2.5°$ hasta 12.5° (vea la figura P4.10). El número total de conteos medidos sobre los tiempos de caída en una semana en un anillo específico (denotado por su ángulo de dispersión medio) y el área correspondiente del anillo se proporcionan en la tabla 4.2. a) Encuentre los conteos por área a cada ángulo y corrija estos valores para el fondo independiente del ángulo. La corrección de fondo puede encontrarse a partir del conteo de siete días tomado con el haz bloqueado con un obturador metálico, donde se midieron 72 conteos uniformemente distribuidos sobre el área total del detector de 8.50 cm^2. b) Demuestre que los conteos corregidos por unidad de área son proporcionales a $\text{sen}^{-4}(\phi/2)$ o, en términos de la fórmula de Rutherford, a la ecuación 4.16,

$$\frac{\Delta n}{A} = \frac{C}{\text{sen}^4(\phi/2)}$$

Notas: Si una gráfica de $(\Delta n/A)$ contra ϕ no cabe en una sola hoja de papel, intente graficar $\log(\Delta n/A)$ contra $\log[1/(\text{sen }\phi/2)^4]$. Deberá producirse una línea recta con pendiente 1 y ordenada al origen igual a C. Explique por qué esta técnica funciona.

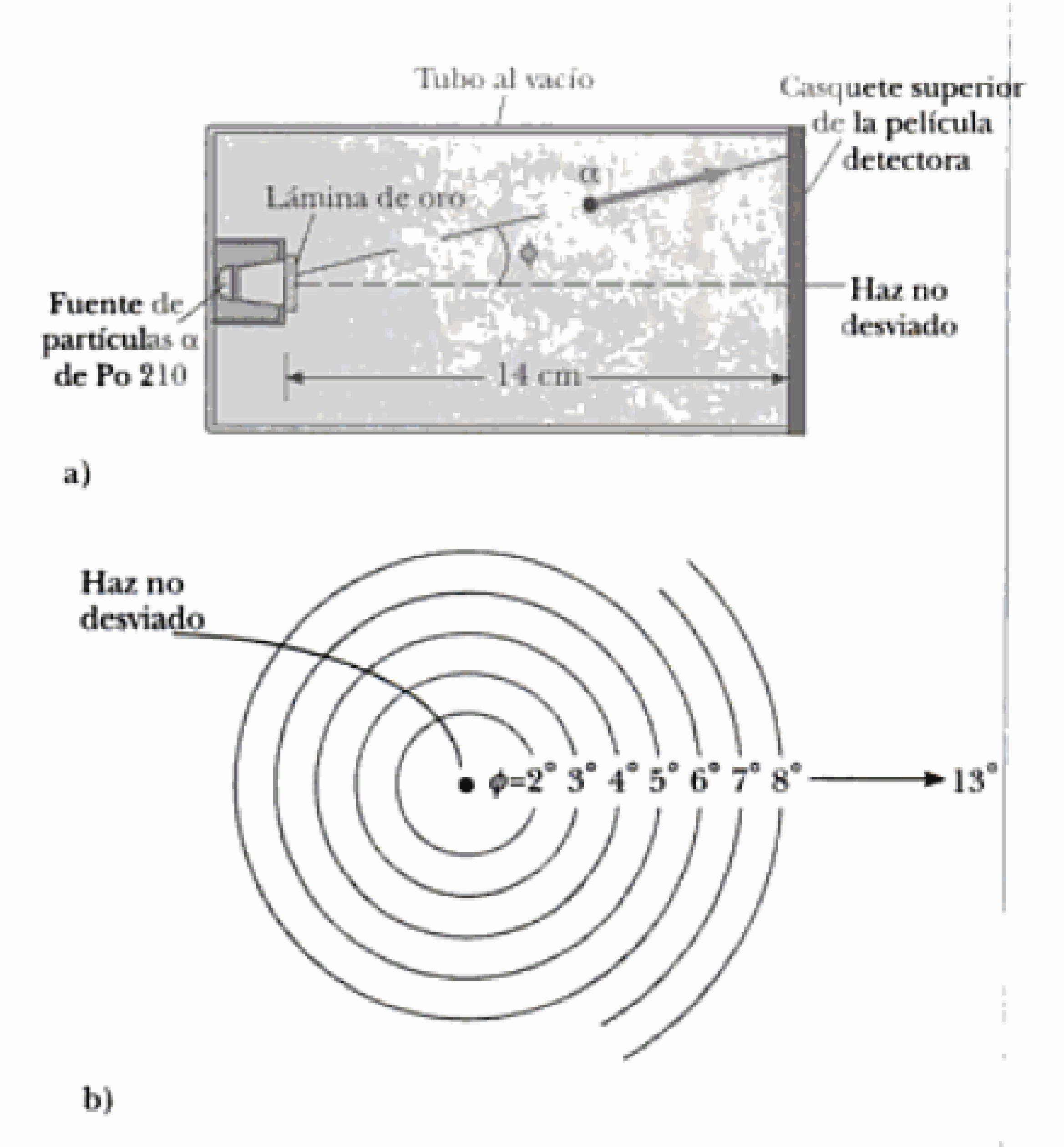


Figura P4.10 a) Vista lateral del aparato de dispersión de Rutherford; ϕ es el ángulo de dispersión. b) Vista del extremo del aparato de Rutherford que muestra el casquete superior de la película detectora con la retícula marcando el ángulo ϕ. Las partículas α dañan la emulsión de la película y después del revelado se observan como puntos dentro de los anillos.

Tabla 4.2 Datos a utilizar en el problema 10

Ángulo (grados)	Conteos/anillo	Área del anillo (cm^2)	Conteos/área
2.5	605	0.257	
3.5	631	0.360	
4.5	520	0.463	
5.5	405	0.566	
6.5	301	0.669	
7.5	201	0.772	
8.5	122	0.875	
9.5	78	0.987	
10.5	65	1.08	
11.5	66	1.18	
12.5	44	1.29	

4.3 El átomo de Bohr

11. Calcule las longitudes de onda de las tres primeras líneas en la serie de Balmer para el hidrógeno.

12. Calcule las longitudes de onda de las tres primeras líneas en la serie de Lyman para el hidrógeno.
13. a) ¿Qué valor de n está asociado con la serie de Lyman en el hidrógeno cuya longitud de onda es 102.6 nm? b) ¿Esta longitud de onda puede asociarse con la serie de Paschen o con la serie de Brackett?
14. a) Use la ecuación 4.35 para calcular los radios de la primera, segunda y tercera órbitas de Bohr para el hidrógeno. b) Encuentre la velocidad del electrón para las tres primeras órbitas. c) ¿Es necesaria una corrección relativista? Explique su respuesta.
15. a) Elabore un diagrama de los niveles de energía para el ion He^+, para el cual $Z = 2$. b) ¿Cuál es la energía de ionización para el He^+?
16. Elabore un diagrama de los niveles de energía para el ion Li^{2+}, para el cual $Z = 3$.
17. ¿Cuál es el radio de la primera órbita de Bohr en a) He^+, b) Li^{2+} y c) Be^{3+}?
18. Un átomo de hidrógeno que se encuentra inicialmente en su estado fundamental ($n = 1$) absorbe un fotón y termina en el estado para el cual $n = 3$. a) ¿Cuál es la energía del fotón absorbido? b) Si el átomo regresa a su estado fundamental, ¿qué energías del fotón podría emitir?
19. Un fotón es emitido por un átomo de hidrógeno que experimenta una transición electrónica desde el estado $n = 3$ hasta el estado $n = 2$. Calcule a) la energía, b) la longitud de onda y c) la frecuencia del fotón emitido.
20. ¿Cuál sería la energía de un fotón que provocara a) una transición electrónica del estado $n = 4$ al estado $n = 5$ del hidrógeno y b) una transición electrónica del estado $n = 5$ al estado $n = 6$?
21. a) Calcule las longitudes de onda más larga y más corta para la serie de Paschen. b) Determine las energías del fotón correspondientes a estas longitudes de onda.
22. Encuentre la energía potencial y la energía cinética de un electrón en un átomo de hidrógeno en el estado fundamental.
23. Un átomo de hidrógeno se encuentra en su estado fundamental ($n = 1$). Use la teoría del átomo de Bohr para calcular a) el radio de la órbita, b) la cantidad de movimiento del electrón, c) el momento angular del electrón, d) la energía cinética, e) la energía potencial y f) la energía total.
24. Un átomo de hidrógeno que se encuentra inicialmente en el estado $n = 3$ se desintegra al estado fundamental emitiendo un fotón. a) Calcule la longitud de onda del fotón emitido, b) Estime la cantidad de movimiento de retroceso del átomo y la energía cinética del átomo en retroceso. ¿De dónde proviene esta energía?
25. Calcule la frecuencia del fotón emitido por un átomo de hidrógeno que realiza una transición desde el estado $n = 4$ hasta el estado $n = 3$. Compare su resultado con la frecuencia de revolución para el electrón en estas dos órbitas de Bohr.
26. Calcule las longitudes de onda más larga y más corta en la serie de Lyman para el hidrógeno, indicando la transición electrónica subyacente que produce cada una de las longitudes de onda. ¿Se presentan línea(s) de Lyman en el espectro visible? Explique su respuesta.
27. Demuestre que la fórmula de Balmer, $\lambda = C_2\left(\frac{n^2}{n^2 - 2^2}\right)$, se reduce a la fórmula de Rydberg, $\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$, en el supuesto de que $(2^2/C_2) = R$. Compruebe que $(2^2/C_2)$ tiene el mismo valor numérico que R.
28. *El proceso Auger.* Un electrón en el cromo realiza una transición desde el estado $n = 2$ hasta el estado $n = 1$ sin emitir ningún fotón. En vez de ello, la energía en exceso se transfiere a un electrón exterior (en el estado $n = 4$), que es expulsado por el átomo. (Esto se denomina *proceso Auger*, y el electrón expulsado se denomina *electrón de Auger*.) Use la teoría de Bohr para encontrar la energía cinética del electrón de Auger.
29. Un electrón inicialmente en el estado $n = 3$, en un átomo de masa M, que está en reposo, experimenta una transición hacia el estado fundamental $n = 1$. a) Demuestre que la velocidad de retroceso del átomo debido a la emisión de un fotón está dada aproximadamente por

$$v = \frac{8hR}{9M}$$

b) Calcule el porcentaje de la energía de transición $3 \rightarrow 1$ que se lleva el átomo en retroceso, si éste es de deuterio.
30. Aplique la mecánica clásica a un electrón en un estado estacionario del hidrógeno para demostrar que $L^2 = m_e k e^2 r$ y $L^3 = m_e k^2 e^4/\omega$. Aquí, k es la constante de Coulomb, L es la magnitud del momento angular orbital del electrón y m_e, e, r y ω son la masa, la carga, el radio orbital y la frecuencia angular orbital del electrón, respectivamente.
31. a) Encuentre la frecuencia del movimiento orbital de un electrón, f_e, alrededor de un núcleo fijo de carga $+Ze$, usando la ecuación 4.24 y $f_e = (v/2\pi r)$ para obtener

$$f_e = \frac{m_e k^2 Z^2 e^4}{2\pi \hbar^3}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

b) Demuestre que la frecuencia del fotón emitido cuando un electrón salta de una órbita exterior a una órbita interior puede escribirse como

$$f_{\text{fotón}} = \frac{kZ^2e^2}{2a_0h}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

$$= \frac{m_e k^2 e^4 Z^2}{2\pi\hbar^3}\left(\frac{n_i + n_f}{2n_i^2 n_f^2}\right)(n_i - n_f)$$

Para una transición del electrón entre órbitas adyacentes, $n_i - n_f = 1$ y

$$f_{\text{fotón}} = \frac{m_e k^2 Z^2 e^4}{2\pi\hbar^3}\left(\frac{n_i + n_f}{2n_i^2 n_f^2}\right)$$

Luego, analice el factor

$$\left(\frac{n_i + n_f}{2n_i^2 n_f^2}\right)$$

y use $n_i > n_f$ para argumentar que

$$\frac{1}{n_i^3} < \frac{n_i + n_f}{2n_i^2 n_f^2} < \frac{1}{n_f^3}$$

c) ¿Cuál sería su conclusión sobre la frecuencia de radiación emitida en comparación con las frecuencias de revolución orbital en los estados inicial y final? ¿Qué ocurre cuando $n_i \to \infty$?

32. Las longitudes de onda de las líneas espectrales dependen en alguna medida de la masa nuclear. Esto ocurre debido a que el núcleo no es una masa estacionaria infinitamente pesada, y tanto el electrón como el núcleo en realidad giran alrededor de su centro de masa común. Puede demostrarse que un sistema de este tipo es completamente equivalente a una simple partícula de masa reducida μ que gira alrededor de la posición de la partícula más pesada a una distancia igual a la separación electrón-núcleo. Vea la figura P4.32. Aquí, $\mu = m_e M/(m_e + M)$, donde m_e es la masa del electrón y M es la masa nuclear. A fin de tomar en cuenta el núcleo en movimiento en la teoría de Bohr se sustituye m_e con μ. Así, la ecuación 4.30 se vuelve

$$E_n = \frac{-\mu k e^2}{2m_e a_0}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

y la ecuación 4.30 se vuelve

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\mu k e^2}{2m_e a_0 hc}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right) = \left(\frac{\mu}{m_e}\right) R\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

Determine los valores de longitud de onda corregidos para la primera línea de Balmer (transición desde $n = 3$ hasta $n = 2$), tomando en cuenta el movimiento nuclear para a) hidrógeno, ^{1}H, b) deuterio, ^{2}H, y c) tritio, ^{3}H. (El deuterio fue descubierto en 1932 por Harold Urey, quien midió la pequeña diferencia de longitud de onda entre ^{1}H y ^{2}H.)

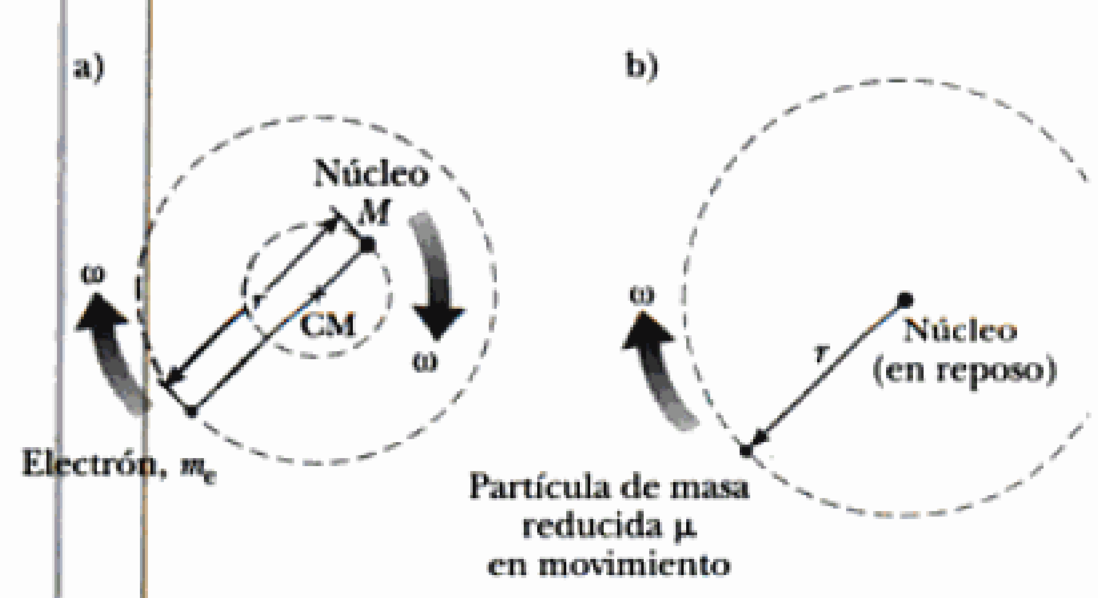


Figura P4.32 a) Tanto el electrón como el núcleo en realidad se mueven alrededor del centro de masa. b) Para calcular el efecto del movimiento nuclear, el núcleo puede considerarse como si estuviese en reposo y m_e se sustituye por la masa reducida μ.

33. Un muón es una partícula con una carga igual a la de un electrón y una masa igual a 207 veces la masa de un electrón. Cuando el ^{208}Pb captura un muón para remplazar un electrón, se forma plomo muónico. Suponga que el muón se mueve en una órbita tan pequeña que "ve" una carga nuclear de $Z = 82$. Según la teoría de Bohr, ¿cuáles son el radio y la energía del estado fundamental del plomo muónico? Use el concepto de masa reducida que se introdujo en el problema 32.

34. Un muón (problema 33) es capturado por un deuterón (un núcleo ^{2}H) para formar un átomo muónico. a) Encuentre la energía del estado fundamental y del primer estado excitado. b) ¿Cuál es la longitud de onda del fotón emitido cuando el átomo realiza una transición desde el primer estado excitado hasta el estado fundamental? Use el concepto de masa reducida que se introdujo en el problema 32.

35. El *positronio* es un átomo parecido al hidrógeno que consta de un positrón (un electrón con carga positiva) y de un electrón, que giran uno alrededor del otro. Use el modelo de Bohr para encontrar los radios permitidos (con respecto al centro de masa de las dos partículas) y las energías permitidas del sistema. Use el concepto de masa reducida que se introdujo en el problema 32.

4.4 Principio de correspondencia

36. a) Calcule la frecuencia de revolución y el radio orbital del electrón en el modelo del hidrógeno de Bohr para n = 100, 1 000 y 10 000. b) Calcule las frecuencias del fotón para transiciones desde los estados n hasta los estados $n - 1$ para los mismos valores de n que en el inciso a) y compárelas con las frecuencias de revolución que se encontraron en el inciso a). c) Explique cómo sus resultados comprueban el principio de correspondencia.

37. Use el modelo del átomo de hidrógeno de Bohr para demostrar que cuando el átomo realiza una transición desde el estado n hasta el estado $n - 1$, la frecuencia de la luz emitida está dada por

$$f = \frac{2\pi^2 m_e k^2 e^4}{h^3}\left[\frac{2n - 1}{(n-1)^2 n^2}\right]$$

Demuestre que cuando $n \to \infty$, la expresión precedente varía con $1/n^3$ y se reduce a la frecuencia clásica que sería de esperar que emita el átomo. (*Sugerencia:* Para calcular la frecuencia clásica, observe que la frecuencia de revolución es $v/2\pi r$, donde r está dado por la ecuación 4.28.) Éste es un ejemplo del principio de correspondencia, el cual requiere que los modelos clásico y cuántico coincidan para valores grandes de n.

4.5 El experimento de Franck-Hertz

38. Un electrón con energía cinética menor que 100 eV experimenta una colisión inelástica frontal contra un átomo masivo de mercurio que se encuentra en reposo. a) Si el electrón invierte su dirección en la colisión (como cuando una pelota choca contra una pared), demuestre que éste sólo pierde una pequeña fracción de su energía cinética inicial, dada por

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{4M}{m_e(1 + M/m_e)^2}$$

donde m_e es la masa del electrón y M es la masa del átomo de mercurio. b) Use los valores aceptados para m_e y M para demostrar que

$$\frac{\Delta K}{K} \approx \frac{4m_e}{M}$$

y calcule el valor numérico de $\Delta K/K$.

PROBLEMAS ADICIONALES

39. Un electrón choca frontal e inelásticamente con un átomo de mercurio que está en reposo. a) Si la separación del primer estado excitado y el estado fundamental del átomo es igual a 4.9 eV, ¿cuál es la energía cinética inicial mínima del electrón necesaria para llevar al átomo a su primer estado excitado y conservar la cantidad de movimiento? Suponga que la colisión es completamente inelástica. b) ¿Cuál es la velocidad inicial del electrón en este caso? c) ¿Cuál es la velocidad del electrón y del átomo después de la colisión? d) ¿Cuál es la energía cinética (en electrón-volts) del electrón después de la colisión? ¿Es justificada la aproximación de que el electrón pierde toda su energía cinética en una colisión inelástica?
40. Si el experimento de Franck-Hertz pudiese realizarse con hidrógeno monoatómico de alta densidad, ¿a qué diferencias de voltaje aparecería la caída de la corriente? Considere la separación entre el estado fundamental y el primer estado excitado como igual a 10.2 eV y asegúrese de considerar la cantidad de movimiento, así como la energía, al llegar a una respuesta.
41. El oxígeno líquido tiene un color azulado, lo cual significa que de preferencia absorbe luz hacia el extremo rojo del espectro visible. Aunque la molécula de oxígeno (O_2) no absorbe fuertemente radiación visible, sí lo hace a 1 269 nm, lo cual se encuentra en la región infrarroja del espectro. La investigación ha mostrado que es posible que dos moléculas de O_2 en colisión absorban un simple fotón, compartiendo en forma equitativa su energía. La transición que experimentan ambas moléculas es la misma que resulta cuando absorben radiación a 1 269 nm. ¿Cuál es la longitud de onda del fotón único que provoca esta doble transición? ¿Cuál es el color de esta radiación?
42. Dos átomos de hidrógeno chocan de frente y terminan con una energía cinética igual a cero. Luego, cada uno emite un fotón con una longitud de onda de 121.6 nm (una transición desde $n = 2$ hasta $n = 1$). ¿A qué velocidad se movían los átomos antes de la colisión?
43 Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji y William Philips recibieron el premio Nobel de Física en 1997 por "el desarrollo de métodos para enfriar y atrapar átomos con luz láser". Una parte de su trabajo fue realizada con un haz de átomos (masa $\sim 10^{-25}$ kg) que se movía a una velocidad del orden de 1 km/s, semejante a la velocidad de las moléculas en el aire a temperatura ambiente. Un intenso haz de luz láser, sintonizado a una transición atómica visible (suponga 500 nm), se dirige directa hacia el haz atómico. Es decir, el haz atómico y el haz de luz se desplazan en direcciones opuestas. De inmediato, un átomo en el estado fundamental absorbe un fotón. La cantidad de movimiento total del sistema se conserva en el proceso de absorción. Luego de un tiempo de vida del orden de 10^{-8} s, el átomo excitado radía por emisión espontánea. Tiene la misma probabilidad de emitir un fotón en cualquier dirección. Así, el "retroceso" promedio del átomo es cero luego de muchos ciclos de absorción y emisión. a) Calcule la desaceleración promedio del haz atómico. b) ¿Cuál será el orden de magnitud de la distancia a la cual se detendrán los átomos en el haz?
44. En una estrella caliente, un átomo múltiplemente ionizado al cual sólo le resta un electrón produce una serie de líneas espectrales, según describe el modelo de Bohr. La serie corresponde a transiciones electrónicas que terminan en el mismo estado final. La longitud de onda más larga y más corta de la serie son 63.3 nm y 22.8 nm, respectivamente. a) ¿Cuál es el ión? b) Encuentre las longitudes de onda de las tres líneas siguientes espectrales más próximas a la línea de longitud de onda más larga.

5

Ondas de materia

Contenido del capítulo

En el capítulo anterior se analizaron algunos descubrimientos y conceptos teóricos importantes sobre la *naturaleza corpuscular de la materia.* Ahora se indicarán algunos defectos de estas teorías y se introducirán las fascinantes y raras *propiedades ondulatorias de las partículas.* Especialmente notables son las extraordinarias ideas del conde Louis de Broglie acerca de cómo representar a los electrones (y otras partículas) como ondas y la confirmación experimental de la hipótesis de De Broglie a través de los experimentos de Davisson y Germer sobre la difracción de electrones. También se verá cómo el hecho de representar a una partícula como una onda localizada (o como grupos de ondas) conduce de forma natural a limitaciones respecto a la medición simultánea de la posición y la cantidad de movimiento de la partícula. Por último, como una forma para "comprender" la dualidad onda-partícula de la materia se estudiará el paso de electrones por una rendija doble.



Figura 5.1 Louis de Broglie perteneció a una familia aristocrática francesa que produjo mariscales, embajadores, ministros del exterior y por lo menos un duque, su hermano mayor Maurice de Broglie. Louis de Broglie se interesó en la física teórica ya tarde, pues primero estudió historia. Sólo después de servir como radiooperador en la Primera Guerra Mundial siguió los pasos de su hermano mayor e inició sus estudios de física. Maurice de Broglie fue un notable físico experimental, cuyos experimentos fueron realizados en la mansión familiar en París. (*AIP Meggers Gallery of Nobel Laureates.*)

5.1 ONDAS PILOTO DE DE BROGLIE

A principios de la década de 1920 los científicos aceptaron que la teoría de Bohr presentaba muchas deficiencias:

- Fracasaba en la predicción de las intensidades observadas de las líneas espectrales.
- Era sólo parcialmente exitosa para predecir las longitudes de onda de emisión y la absorción para átomos multielectrónicos.
- No proporcionaba una ecuación de movimiento que rigiese el desarrollo temporal de los sistemas atómicos, a partir de algún estado inicial.
- Recalcaba en exceso la naturaleza corpuscular de la materia y no podía explicar la recién descubierta dualidad onda-partícula de la luz.
- No proporcionaba un esquema general para "cuantizar" otros sistemas, especialmente aquéllos sin movimiento periódico.

El primer paso audaz hacia una nueva mecánica de los sistemas atómicos fue dado por Louis Víctor de Broglie en 1923 (figura 5.1). En su disertación doctoral postuló que, *debido a que los fotones poseen características ondulatorias y corpusculares, quizá todas las formas de la materia también tengan propiedades ondulatorias y corpusculares.* Ésta era una idea radical sin confirmación experimental en esa época. Según De Broglie, los electrones poseen una naturaleza dual partícula-onda. Acompañando a cada electrón había una onda (¡no una onda electromagnética!) que "guiaba" o "pilotaba" al electrón a través del espacio. Explicó el origen de esta aseveración en su discurso de aceptación del premio Nobel en 1929:

> De otra manera, la teoría cuántica de la luz no puede considerarse satisfactoria dado que define la energía de un corpúsculo de luz mediante la ecuación $E = hf$, que contiene la frecuencia f. Luego, una teoría puramente corpuscular no contiene nada que nos permita definir una frecuencia; sólo por esta razón, en consecuencia, estamos obligados, en el caso de la luz, a introducir en forma simultánea las ideas de corpúsculo y de periodicidad. Por otra parte, la determinación del movimiento estable de los electrones en el átomo introduce enteros, y hasta el momento los únicos fenómenos en física que implican enteros son el de la interferencia y el de los modos normales de vibración. Este hecho me sugirió la idea de que los electrones tampoco podían considerarse simplemente como corpúsculos, sino que también a ellos es necesario asignarles periodicidad.

Consideremos la idea de De Broglie con más detalle. Él concluyó que la longitud de onda y la frecuencia de una *onda de materia*, asociada a cualquier objeto en movimiento, estaban dadas por

Longitud de onda de De Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{5.1}$$

y

$$f = \frac{E}{h} \tag{5.2}$$

donde h es la constante de Planck, p es la cantidad de movimiento relativista y E es la energía total relativista del objeto. Recuerde del capítulo 2 que p y E pueden escribirse como

$$p = \gamma m v \tag{5.3}$$

y

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 = \gamma^2 m^2 c^4 \tag{5.4}$$

donde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ y v es la velocidad del objeto. Las ecuaciones 5.1 y 5.2 sugieren de inmediato que debe ser fácil calcular la velocidad de una onda de De Broglie a partir del producto λf. No obstante, como se verá después, ésta no es la velocidad de la partícula. Debido a que el cálculo correcto es algo complicado, lo analizaremos hasta la sección 5.3. Antes de abordar la cuestión de la velocidad de las ondas de materia, preferimos proporcionar primero algunos ejemplos introductorios del uso de $\lambda = h/p$ y una breve descripción de cómo las ondas de De Broglie constituyen una representación física de la teoría de los átomos de Bohr.

Explicación de De Broglie de la cuantización en el modelo de Bohr

El modelo del átomo de Bohr presentaba muchas deficiencias y problemas. Por ejemplo, a medida que los electrones giran alrededor del núcleo, ¿cómo puede entenderse el hecho de que sólo se permiten ciertas energías para los electrones? ¿Por qué todos los átomos de un elemento dado poseen exactamente las mismas propiedades físicas sin importar la variedad infinita de velocidades y posiciones iniciales de los electrones en cada átomo?

La gran perspicacia de De Broglie consistió en reconocer que aun cuando éstos eran problemas profundos para las teorías corpusculares, las teorías ondulatorias de la materia manejan tales problemas cuidadosamente por medio de la interferencia. Por ejemplo, una cuerda tensa de una guitarra, aunque de inicio está sometida a un amplio intervalo de longitudes de onda, sólo presenta patrones de ondas estacionarias que poseen nodos en cada extremo. Así, para las ondas estacionarias sólo está permitido un conjunto discreto de longitudes de onda, mientras que otras longitudes de onda no incluidas en este conjunto desaparecen rápidamente por interferencia destructiva. Este mismo razonamiento puede aplicarse a las ondas de materia de electrones que se doblan en círculo alrededor del núcleo. Aunque inicialmente podría estar presente una distribución continua de longitudes de onda, correspondiente a una distribución de velocidades iniciales de los electrones, la mayor parte de las longitudes de onda y de las velocidades se extinguen rápidamente. Los patrones de ondas estacionarias residuales explican así la naturaleza idéntica de todos los átomos de un elemento dado y muestran que los átomos son más una especie de tímpanos en vibración con modos de vibración discretos que sistemas solares en miniatura. Este punto de vista se enfatiza en la figura 5.2, que muestra el patrón de onda estacionaria del electrón en el átomo de hidrógeno correspondiente al estado $n = 3$ de la teoría de Bohr.

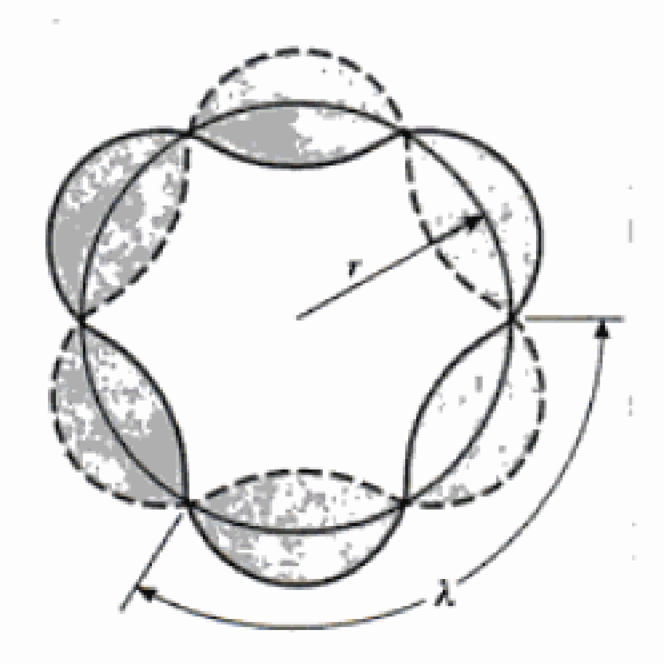


Figura 5.2 Las ondas estacionarias se ajustan a una órbita circular de Bohr. En este diagrama particular, caben tres longitudes de onda, en la órbita que corresponden al estado energético $n = 3$ de la teoría de Bohr.

Otro aspecto de la teoría de Bohr que también es más fácil de visualizar físicamente utilizando la hipótesis de De Broglie es la cuantización del momento angular. Sólo se supone que **las órbitas permitidas de Bohr surgen porque las ondas de materia de los electrones interfieren de manera constructiva cuando un número entero de longitudes de onda cabe exactamente en la circunferencia de una órbita circular.** Por tanto,

$$n\lambda = 2\pi r \tag{5.5}$$

donde r es el radio de la órbita. De la ecuación 5.1 se observa que $\lambda = h/m_e v$. Al sustituir esto en la ecuación 5.5 y despejar $m_e vr$, el momento angular del electrón, se obtiene

$$m_e vr = n\hbar \tag{5.6}$$

Observe que ésta es precisamente la condición de Bohr para la cuantización del momento angular.

EJEMPLO 5.1 ¿Por qué no es posible ver las propiedades ondulatorias de una pelota de béisbol?

Un objeto se asemeja a "una onda" si presenta interferencia o difracción, las cuales, requieren de objetos o aberturas de dispersión de aproximadamente el mismo tamaño que la longitud de onda. Una pelota de béisbol de 140 g de masa que se desplaza a una velocidad de 60 mi/h (27 m/s) posee una longitud de onda de De Broglie dada por

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}}{(0.14\,\mathrm{kg})(27\,\mathrm{m/s})} = 1.7 \times 10^{-34}\,\mathrm{m}$$

¡Incluso un núcleo (cuyo tamaño es $\approx 10^{-15}$ m) es demasiado grande para difractar esta increíblemente pequeña longitud de onda! Esto explica por qué todos los objetos macroscópicos se asemejan a las partículas.

EJEMPLO 5.2 ¿De qué tamaño son las "partículas" que presentan difracción?

Una partícula de carga q y masa m es acelerada a partir del reposo a través de una diferencia de potencial pequeña V. a) Encuentre su longitud de onda de De Broglie, suponiendo que la partícula no es relativista.

Solución Cuando una carga es acelerada desde el reposo a través de una diferencia de potencial V, su ganancia en energía cinética, $\frac{1}{2}mv^2$, debe ser igual a la pérdida de energía potencial, qV. Es decir,

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = qV$$

Debido a que $p = mv$, lo anterior puede expresarse como

$$\frac{p^2}{2m} = qV \qquad \text{o} \qquad p = \sqrt{2mqV}$$

Al sustituir esta expresión para p en la relación de De Broglie $\lambda = h/p$, se obtiene

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mqV}}$$

b) Calcule λ si la partícula es un electrón y $V = 50$ V.

Solución La longitud de onda de De Broglie de un electrón acelerado a través de 50 V es

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e qV}}$$

$$= \frac{6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}}{\sqrt{2(9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg})(1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C})(50\,\mathrm{V})}}$$

$$= 1.7 \times 10^{-10}\,\mathrm{m} = 1.7\,\text{Å}$$

Esta longitud de onda es del orden de las dimensiones atómicas y la separación entre átomos en un sólido. Tales electrones de baja energía suelen utilizarse en experimentos de difracción de electrones para determinar las posiciones atómicas sobre una superficie.

Ejercicio 1 a) Demuestre que la longitud de onda de De Broglie para un electrón acelerado a partir del reposo a través de una diferencia de potencial *grande*, V, es

$$\lambda = \frac{12.27}{V^{1/2}}\left(\frac{Ve}{2m_e c^2} + 1\right)^{-1/2} \tag{5.7}$$

donde λ está en angstroms (Å) y V está en volts. b) Calcule el error porcentual introducido cuando se usa $\lambda = 12.27/V^{1/2}$ en vez de la expresión relativista correcta para electrones a 10 MeV.

Respuesta b) 230%.

5.2 EXPERIMENTO DE DAVISSON-GERMER

Los experimentos de difracción realizados por los físicos estadounidenses Clinton J. Davisson (1881-1958) y Lester H. Germer (1896-1971) en los Bell Laboratories de Nueva York en 1927 (figura 5.3) constituyeron una prueba experimental directa de que los electrones poseen una longitud de onda $\lambda = h/p$.[1] De hecho, De Broglie ya había sugerido en 1924 que una corriente de electrones que atraviesan una pequeña abertura deben presentar fenómenos de difracción. En 1925, Einstein tuvo que postular ondas de materia a partir de un análisis de fluctuaciones de un gas molecular. Además, observó que un haz de moléculas debía mostrar efectos de difracción pequeños pero mensurables. Ese mismo año, Walter Elsasser indicó que los lentos experimentos de dispersión de elec-

[1] C.J. Davisson y L.H. Germer, *Phys. Rev.* 30:705, 1927.



Figura 5.3 Clinton J. Davisson (izquierda) y Lester H. Germer (centro) en los Bell Laboratories en Nueva York. (*Bell Laboratories, cortesía AIP Emilio Segrè Visual Archives.*)

trones de C. J. Davisson y C. H. Kunsman en los Bell Laboratories podían explicarse por la difracción de electrones.

Una prueba inequívoca de la naturaleza ondulatoria de los electrones fue obtenida en 1927 por el trabajo de Davisson y Germer en Estados Unidos y el de George P. Thomson (físico británico, 1892-1975, hijo de J. J. Thomson) en Inglaterra. Ambos casos son intrigantes no sólo por su aspecto físico, sino también por su lado humano. El primer caso fue un descubrimiento accidental, y el segundo implicó el descubrimiento de las propiedades corpusculares del electrón por el padre y de las propiedades ondulatorias por el hijo.

El experimento crucial de Davisson y Germer fue una derivación de un intento por comprender la disposición de los átomos sobre la superficie de una muestra de níquel al dispersar elásticamente un haz de electrones a baja velocidad utilizando un blanco de níquel policristalino. En la figura 5.4 se muestra un esquema de sus aparatos. Su dispositivo permitía la variación de tres parámetros experimentales: la energía del electrón; la orientación del blanco de níquel, α; y el ángulo de dispersión, ϕ. Antes de que ocurriese un accidente afortunado, los resultados parecían bastante mediocres. Para energías constantes de los electrones de aproximadamente 100 eV, la intensidad de dispersión disminuía rápidamente cuando ϕ aumentaba. Pero entonces a alguien se le cayó un frasco de aire líquido sobre el sistema del tubo al vacío, rompiendo el vacío y oxidando el blanco de níquel, que había estado a alta temperatura. Para remover el óxido, la muestra fue reducida calentándola cuidadosamente[2] en una corriente de hidrógeno en circulación. Cuando volvieron a armar el aparato, encontraron resultados bastante distintos: observaron fuertes variaciones en la intensidad de los electrones dispersados con respecto al ángulo, como se muestra en la figura 5.5. Evidentemente, el prolongado calentamiento había destemplado el blanco de níquel, provocando al desarrollo de grandes regiones monocristalinas en la muestra policristalina. Estas regiones cristalinas proporcionaron la retícula extendida regular necesaria para observar la difracción de electrones. Una vez que Davisson y Germer se dieron cuenta de que era la dispersión elástica *por monocristales* la que provocaba tales resultados tan poco comunes (1925), iniciaron una minuciosa investigación de la dispersión elástica por grandes cristales simples con la orientación cristalográfica predeterminada. Sin embargo, incluso

[2]Hoy día esto puede hacerse sin temor de que se obtengan "olores insoportables o explosiones", debido a que comercialmente existen mezclas seguras de hidrógeno al 5% y argón al 95%.

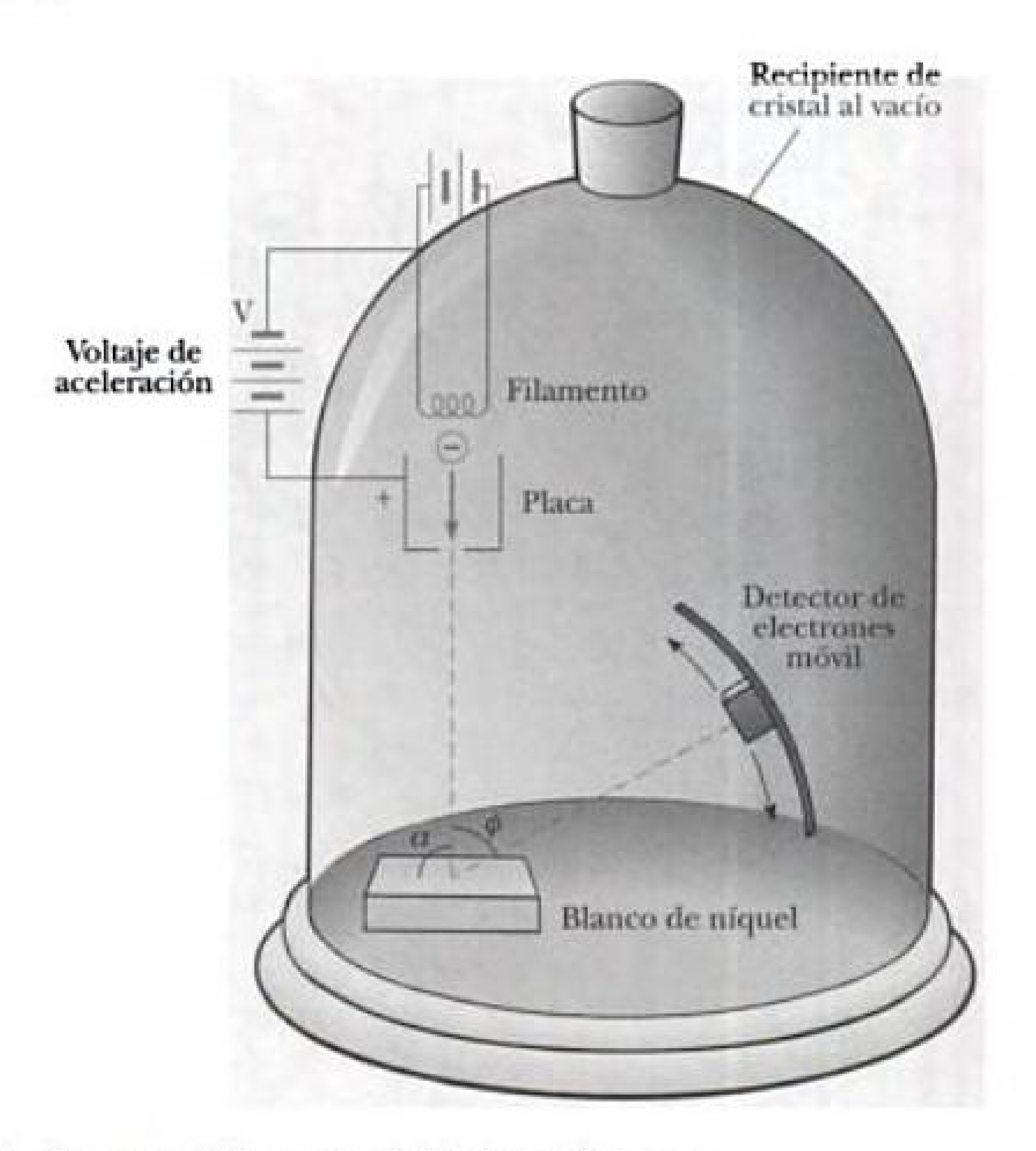


Figura 5.4 Esquema del aparato de Davisson-Germer.

estos experimentos no fueron realizados al principio como una prueba de la teoría ondulatoria de De Broglie. Luego de discusiones subsiguientes con Richardson, Born y Franck, los experimentos y sus análisis culminaron finalmente en 1927 en la prueba de que los electrones experimentan difracción con una longitud de onda del electrón dada por $\lambda = h/p$.

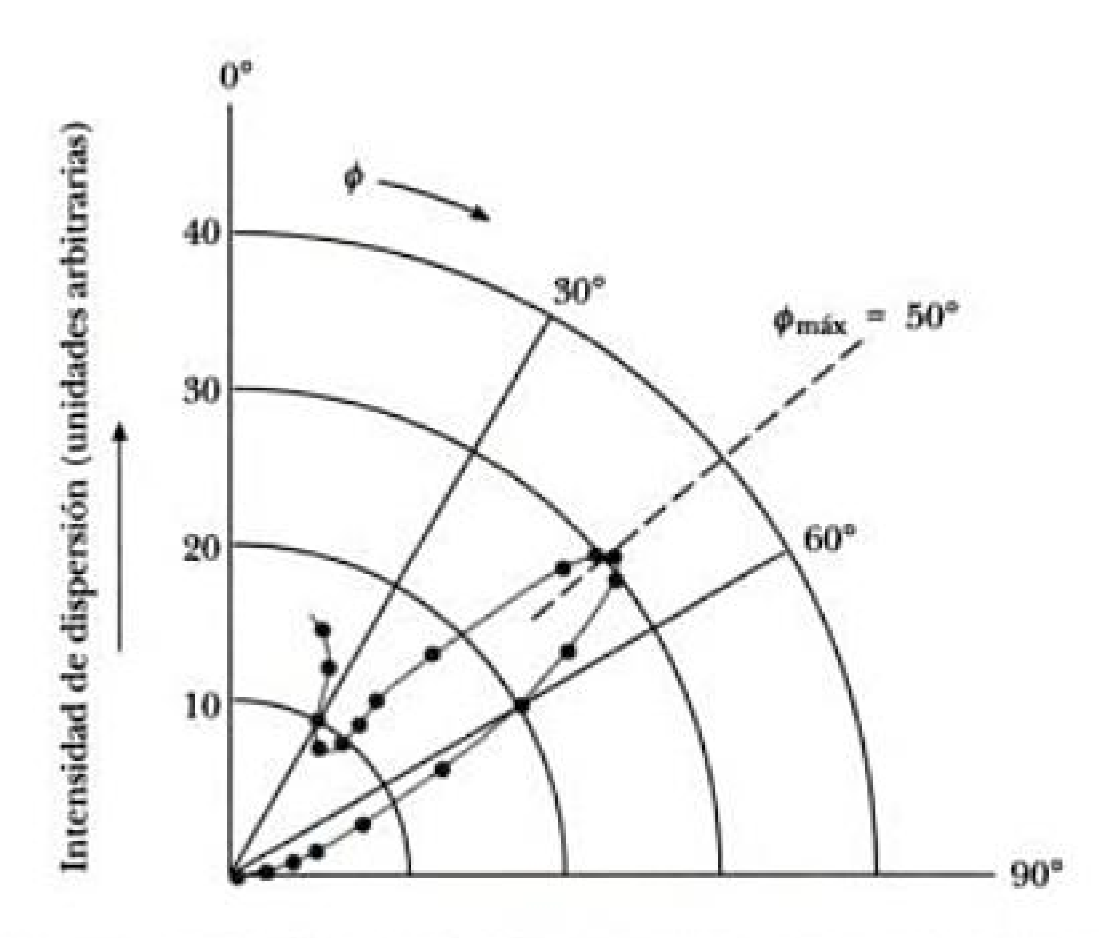


Figura 5.5 Gráfica polar de la intensidad de dispersión contra el ángulo de dispersión para electrones de 54 eV, con base en el trabajo original de Davisson y Germer. La intensidad de dispersión es proporcional a la distancia del punto al origen de esta gráfica.

La idea de que los electrones se comportan como ondas cuando interactúan con los átomos de un cristal es tan sorprendente que la prueba de Davisson y Germer amerita un escrutinio más detallado. En efecto, ellos calcularon la longitud de onda de los electrones a partir de una simple fórmula de difracción y compararon este resultado con la fórmula de De Broglie, $\lambda = h/p$. Aunque probaron este resultado sobre un amplio intervalo de orientaciones del blanco y energías del electrón, aquí sólo se considerará en detalle el simple caso que se muestra en las figuras 5.4 y 5.5 con $\alpha = 90°$, $V = 54$ V y $\phi = 50°$, lo cual corresponde al máximo de difracción $n = 1$. A fin de calcular la longitud de onda de De Broglie para este caso, primero se obtiene la velocidad de un electrón no relativista acelerado a través de una diferencia de potencial V, a partir de la relación de energía

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = eV$$

Al sustituir $v = \sqrt{2Ve/m_e}$ en la relación de De Broglie se obtiene

$$\lambda = \frac{h}{m_e v} = \frac{h}{\sqrt{2Vem_e}} \tag{5.8}$$

Así, la longitud de onda de electrones a 54 V es

$$\lambda = \frac{6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{\sqrt{2(54\ \text{V})(1.60 \times 10^{-19}\ \text{C})(9.11 \times 10^{-31}\ \text{kg})}}$$

$$= 1.67 \times 10^{-10}\ \text{m} = 1.67\ \text{Å}$$

La longitud de onda experimental puede obtenerse si se considera que los átomos de níquel constituyen una rejilla de difracción por reflexión, como se muestra en la figura 5.6. Sólo se toma en cuenta la capa superficial de átomos porque los electrones a baja energía, a diferencia de los rayos X, no penetran profundamente en el cristal. Cuando la diferencia en la longitud de la trayectoria entre dos rayos adyacentes es un número entero de longitudes de onda ocurre interferencia constructiva, o bien,

$$d \operatorname{sen} \phi = n\lambda \tag{5.9}$$

Como se sabía que d era igual a 2.15 Å a partir de mediciones de difracción de rayos X, Davisson y Germer calcularon que λ era

$$\lambda = (2.15\ \text{Å})(\operatorname{sen} 50.0°) = 1.65\ \text{Å}$$

lo cual coincide perfectamente con la fórmula de De Broglie.

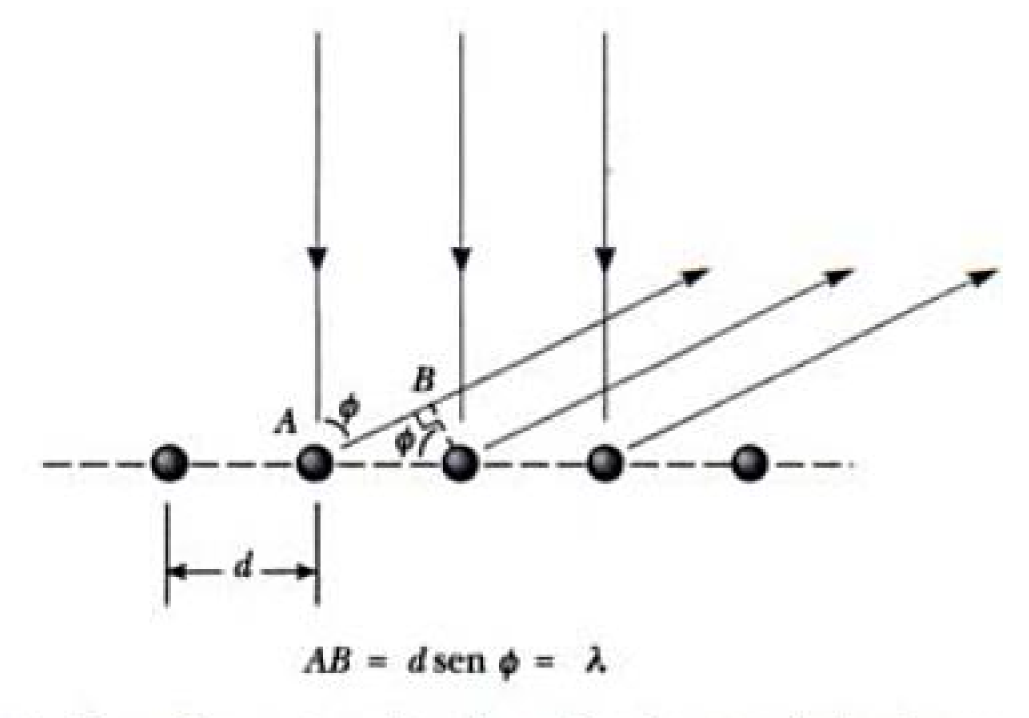


Figura 5.6 Interferencia constructiva de ondas de materia de electrones dispersados por una simple capa de átomos a un ángulo ϕ.



Figura 5.7 Difracción de electrones a 50 kV por una película de Cu_3Au. La película de esta aleación medía 400 Å de espesor. (*Cortesía del último Dr. L. H. Germer.*)

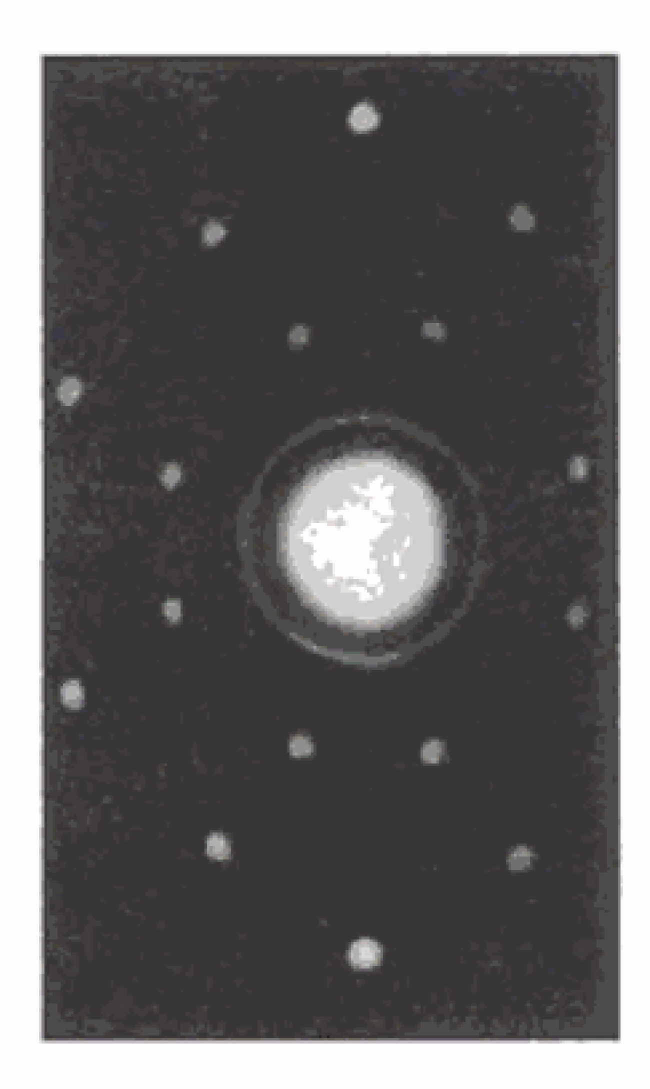


Figura 5.8 Patrón de difracción de neutrones producido por un simple cristal de NaCl. (*Cortesía del Dr. E. O. Wollan.*)

Resulta interesante observar que, mientras las líneas de difracción de electrones reflejados de baja energía son bastante anchas (vea la figura 5.5), las líneas de electrones de alta energía transmitidos a través de láminas metálicas son bastante definidas (vea la figura 5.6). Este efecto ocurre debido a que los electrones a alta energía penetran cientos de planos atómicos y, en consecuencia, la ecuación 5.9, que trata la difracción por una capa superficial, deja de ser válida. En vez de ello, la ley de Bragg, $2d \operatorname{sen} \theta = n\lambda$, se cumple para difracción de electrones de alta energía. En este caso los máximos se definen al extremo porque, si $2d \operatorname{sen} \theta$ no es exactamente igual a $n\lambda$, entonces no hay onda difractada. Esto ocurre porque hay contribuciones de dispersión provenientes de tantos planos atómicos que, finalmente, la diferencia en longitud de la trayectoria entre la onda desde el primer plano y algún plano más profundo *es un múltiplo impar de* $\lambda/2$, lo cual da por resultado la cancelación completa de estas ondas (vea el problema 13).

Si el postulado de De Broglie es válido para toda la materia, entonces cualquier objeto de masa m posee propiedades ondulatorias y una longitud de onda $\lambda = h/p$. En los años siguientes al descubrimiento de Davisson y Germer, algunos experimentalistas probaron el carácter universal del postulado de De Broglie al buscar difracción de otros haces de "partículas". En experimentos ulteriores, se observó difracción para átomos de helio (Estermann y Stern en Alemania) y de hidrógeno (Johnson en Estados Unidos). Luego del descubrimiento del neutrón en 1932, se demostró que haces de neutrones de energía idónea también presentan difracción cuando inciden sobre un blanco cristalino (figura 5.8).

EJEMPLO 5.3 Neutrones térmicos

Para que los neutrones puedan difractarse utilizando cristales, ¿cuál deberá ser su energía cinética (en electrón-volts)?

Solución Si la longitud de onda de De Broglie de los neutrones es del mismo orden de magnitud que la distancia interatómica, ocurre difracción observable. Al tomar $\lambda = 1$ Å, se encuentra

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6.63 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{1 \times 10^{-10}\ \text{m}} = 6.63 \times 10^{-24}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

La energía cinética está dada por

$$K = \frac{p^2}{2m_n} = \frac{(6.63 \times 10^{-24}\ \text{J}\cdot\text{s})^2}{2(1.66 \times 10^{-27}\ \text{kg})}$$
$$= 1.32 \times 10^{-20}\ \text{J} = 0.0825\ \text{eV}$$

Observe que estos neutrones no son relativistas porque K es mucho menor que la energía en reposo del neutrón, 940 MeV, de modo que se justifica el uso de la expresión clásica $K = p^2/2m_n$. Debido a que la energía térmica promedio de una partícula en equilibrio térmico es $\frac{1}{2}k_BT$ para cada dirección de movimiento independiente, los neutrones a temperatura ambiente (300 K) poseen una energía cinética de

$$K = \tfrac{3}{2}k_BT = (1.50)(8.62 \times 10^{-5}\ \text{eV/K})(300\ \text{K})$$
$$= 0.0388\ \text{eV}$$

Así, los "neutrones térmicos" o neutrones en equilibrio térmico con la materia a temperatura ambiente, poseen energías del orden de magnitud correcto para difractarse en forma observable por cristales simples. Los neutrones producidos en un reactor nuclear son demasiado energéticos para producir difracción desde cristales, por lo que es necesario disminuir su velocidad en una columna de grafito a medida que salen del reactor. En el moderador de grafito, repetidas colisiones con átomos de carbono terminan por reducir las energías promedio de los neutrones a la energía térmica promedio de los átomos de carbono. Cuando esto ocurre, los así denominados neutrones "termalizados" poseen una distribución de velocidades y una distribución correspondiente de las longitudes de onda de De Broglie con longitudes de onda promedio comparables a las separaciones en los cristales.

Ejercicio 2 *Neutrones monocromáticos.* Un haz de neutrones de una sola longitud de onda puede producirse por medio de un selector de velocidades mecánico como el que se muestra en la figura 5.9. a) Calcule la velocidad de los neutrones con una longitud de onda de 1 Å. b) ¿Qué velocidad rotacional (en rpm) debe tener la flecha para que pasen neutrones con una longitud de onda de 1 Å?

Respuestas a) 3.99×10^3 m/s. b) 13 300 rev/min.

Neutrones con un intervalo de velocidades

Disco A

0.5 m

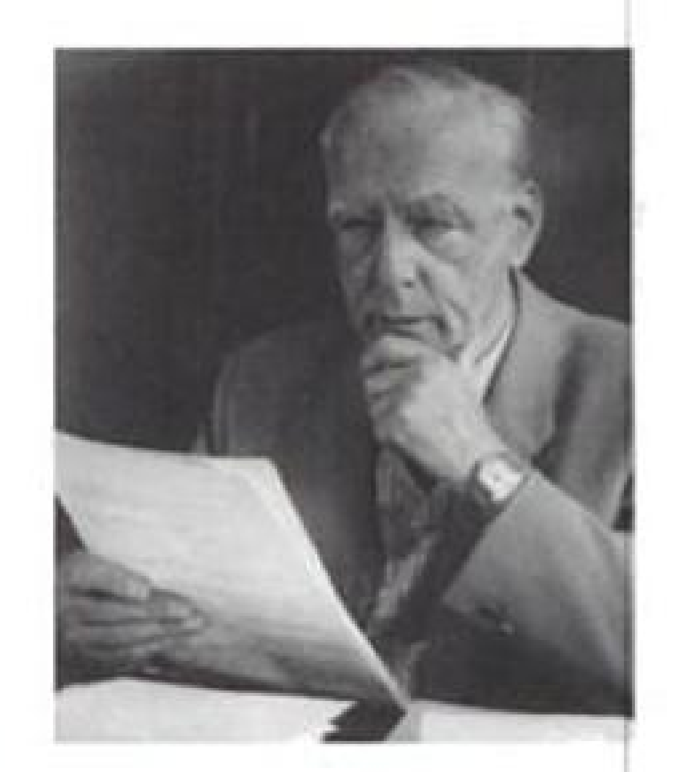
Disco B

ω

Figura 5.9 Selector de velocidad de neutrones. La rendija en el disco B está retrasada 10° con respecto a la rendija en el disco A.

Microscopio electrónico

La idea de que los electrones poseen una longitud de onda controlable que puede hacerse mucho más corta que las longitudes de onda de la luz y que, por consiguiente, poseen una habilidad mucho mejor para resolver detalles finos fue sólo uno de los factores que llevaron al desarrollo del microscopio electrónico. De hecho, ideas para este tipo de dispositivos se manejaban en los cafés y bares de París y Berlín en 1928. Lo que realmente hizo la diferencia fue la llegada conjunta de varias líneas de desarrollo: tubos y circuitos electrónicos, tecnología al vacío y control del haz de electrones, todas pioneras en el desarrollo del tubo de rayos catódicos (CRT, por sus iniciales en inglés). Estos factores condujeron a la construcción del primer microscopio de transmisión de electrones (TEM, por sus iniciales en inglés) con lentes magnéticas por los ingenieros eléctricos Max Knoll y Ernst Ruska en Berlín en 1931. El testamento a la fortaleza y brillantez de Knoll y Ruska para superar la "maldición de los objetos" y construir y obtener un dispositivo experimental tan complicado para trabajar por vez primera se muestra en la figura 5.10. Es extraordinario que, aunque el desempeño global del TEM ha sido mejorado miles de veces desde su invención, el principio es básicamente el mismo que el primero, diseñado por Knoll y Ruska: un dispositivo que enfoca haces de electrones con lentes magnéticas y crea un patrón de sombras plano y bidimensional en su pantalla, que es el resultado de variar los grados de transmisión de electrones a través del objeto. La figura 5.11a es un diagrama que muestra este diseño básico y en la figura 5.11b se presenta, para efectos de comparación, un microscopio de proyección óptica. Los mejores microscopios ópticos que usan luz ultravioleta poseen una amplificación aproximada de 2 000 y pueden distinguir dos objetos separados por 100 nm, pero un TEM que utiliza electrones acelerados a través de 100 kV tiene una amplificación hasta de 1 000 000 y una resolución máxima de 0.2 nm. En la práctica, es fácil utilizar amplificaciones desde 10 000 hasta 100 000. En la figura 5.12 se muestran micrográficas típicas TEM de microbios. La figura 5.12b muestra un microbio y sus líneas de DNA amplificadas 40 000 veces. Aunque podría parecer que aumentar la energía del electrón debe llevar a una longitud de onda más corta del electrón y a un aumento en la resolución, imperfecciones o aberraciones en las lentes magnéticas en realidad establecen el límite de resolución a aproximadamente 0.2 nm. Aumentar la energía del electrón por arriba de 100 keV no mejora la resolución: sólo permite



Ernst Ruska desempeñó un papel fundamental en la invención del TEM. Gracias a su trabajo, fue galardonado con el premio Nobel de física en 1986. (*AIP Emilio Segrè Visual Archives, W. F. Meggers Gallery of Nobel Laureates.*)



Figura 5.10 Microscopio electrónico de Ruska en 1934. (*Siemens Archives Munich.*)

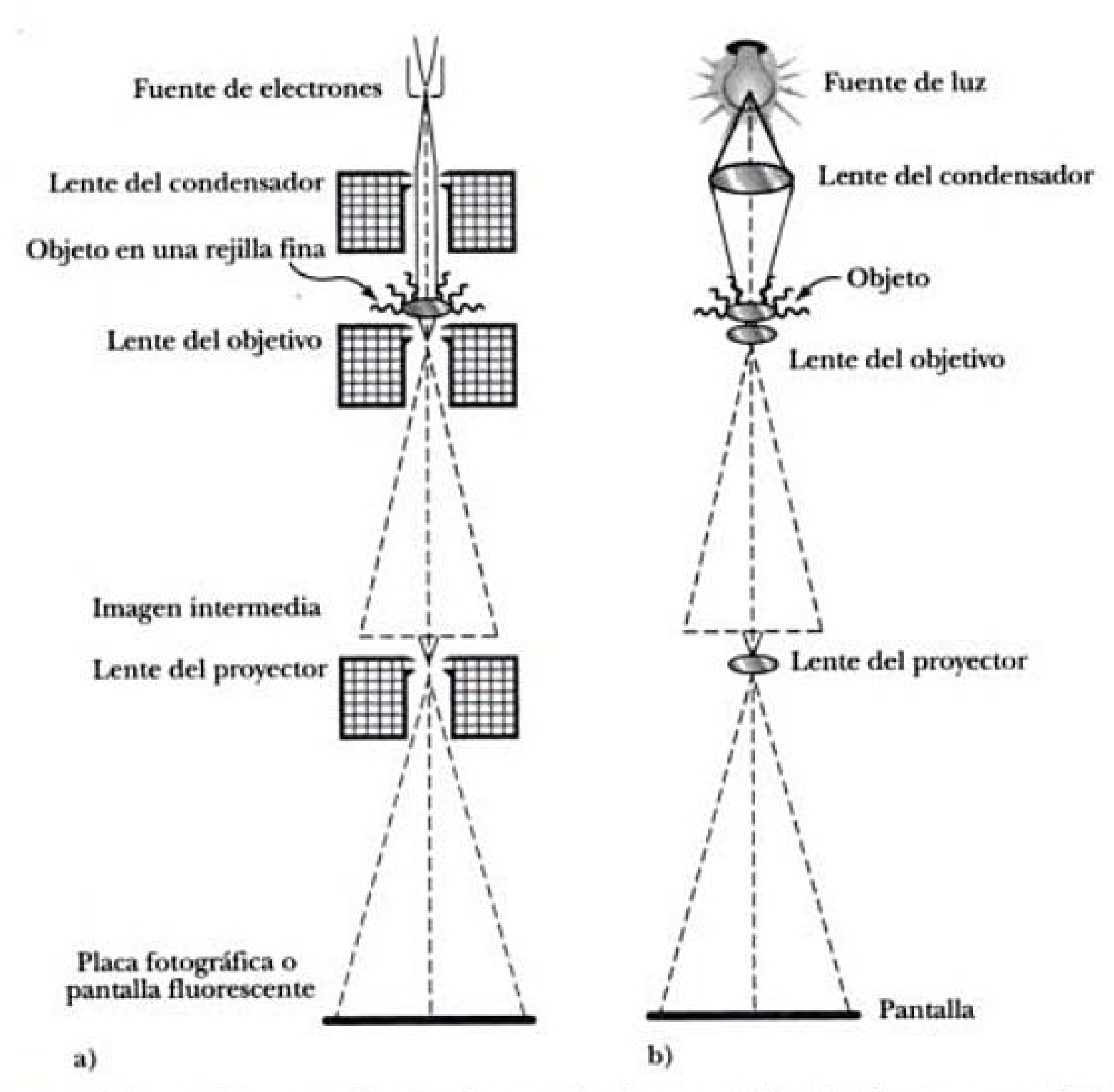


Figura 5.11 a) Diagrama de un microscopio de transmisión de electrones con lentes magnéticas. b) Esquema de un microscopio de proyección de luz.





a) b)

Figura 5.12 a) Falsa micrográfica TEM con falso-color de bacterias de tuberculosis. b) Micrográfica TEM de un microbio del que escapa ADN (× 40 000). (*CNRI/Photo Researchers, Inc., Dr. Gopal Murti/Photo Researchers, Inc.*)

que los electrones muestren regiones más profundas en el interior de un objeto. En las figuras 5.13a y 5.13b se muestran, respectivamente, un diagrama de un TEM moderno y una foto tomada con el mismo instrumento.

Un segundo tipo de microscopio electrónico con menos resolución y amplificación que el TEM, pero capaz de producir imágenes tridimensionales sorprendentes, es el microscopio de exploración de electrones (SEM, por sus iniciales en inglés). En la figura 5.14 se muestran espectaculares micrografías SEM tridimensionales, hechas posibles por el gran intervalo de foco (profundidad de campo) del SEM, que es cientos de veces mejor que el de un microscopio de luz. El SEM fue idea del mismo Max Knoll quien ayudó a inventar el TEM. Knoll había empezado a trabajar en el departamento de televisiones de Telefunken cuando concibió la idea en 1935. El SEM produce un tipo de imagen de televisión gigante al capturar electrones dispersados por un objeto, en vez de la luz. El primer microscopio en operación fue construido por M. von Ardenne en 1937, y fue ampliamente desarrollado y perfeccionado por Vladimir Zworykin y sus colaboradores en RCA Camden a principios de 1940.

En la figura 5.15 se muestra cómo funciona un SEM típico. Este dispositivo puede operar con electrones de 20 keV y tiene una resolución aproximada de 10 nm y una amplificación que varía desde 10 hasta 100 000. Como se muestra en la figura 5.15, un haz de electrones se enfoca nítidamente sobre un espécimen mediante lentes de amplificación y luego se explora (rastrea) a través de una pequeña región sobre su superficie. El haz primario de alta energía dispersa electrones secundarios de baja energía fuera del objeto, dependiendo de la composición del espécimen y de la topografía superficial. Estos electrones secundarios son detectados por un centelleador de plástico acoplado a un fotomultiplicador, amplificados y utilizados para modular la brillantez de una imagen rastreada en forma simultánea mediante un tubo de rayos catódicos.

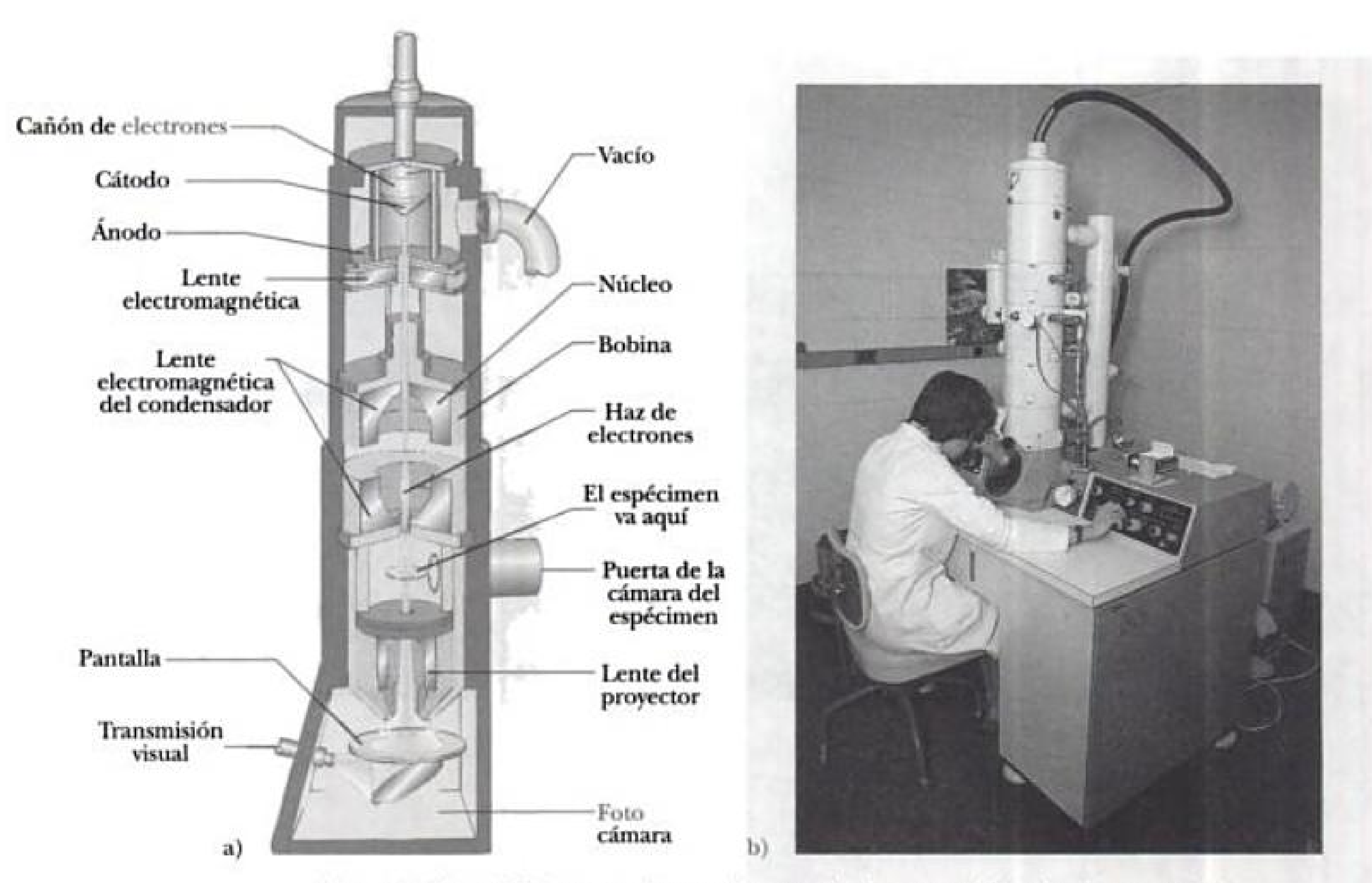


Figura 5.13 a) Diagrama de un microscopio de transmisión de electrones. b) Fotografía del mismo TEM. (*W. Ormerod/ Visual Unlimited.*)

La razón de la trama de la imagen a la trama del haz de electrones del microscopio determina la amplificación. SEMs modernos también pueden capturar rayos X y electrones de alta energía provenientes del espécimen a fin de detectar elementos químicos en ciertas ubicaciones sobre su superficie, respondiendo así la pregunta crucial: "El deshilvanado bollo en la bicapa, ¿es boro o bismuto?"

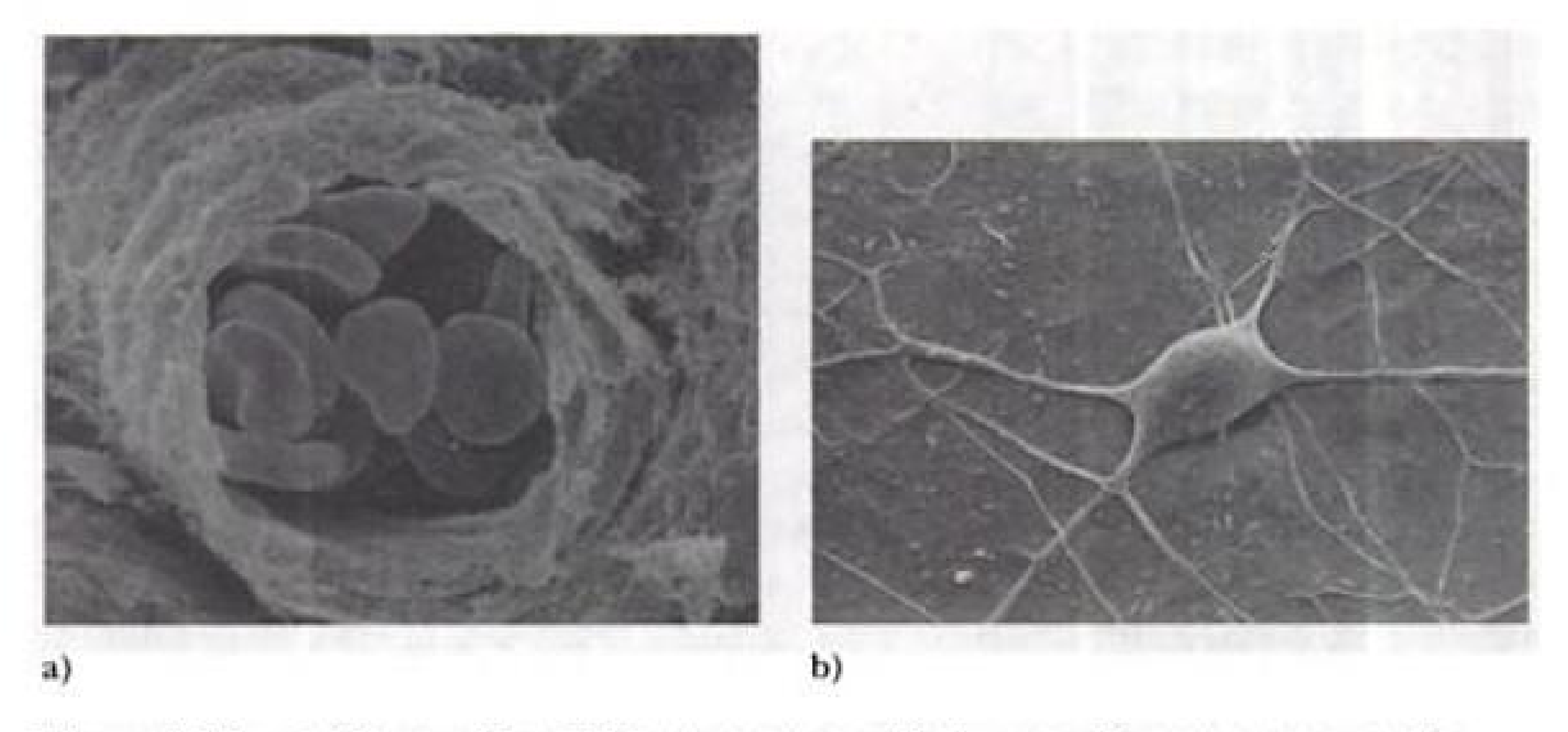


Figura 5.14 a) Micrográfica SEM que muestra células sanguíneas en una arteria delgada. b) Micrográfica SEM que muestra una simple neurona (× 4 000). (*P. Motta & S. Correr/ Photo Researchers, Inc., David McCarthy/ Photo Researchers, Inc.*)

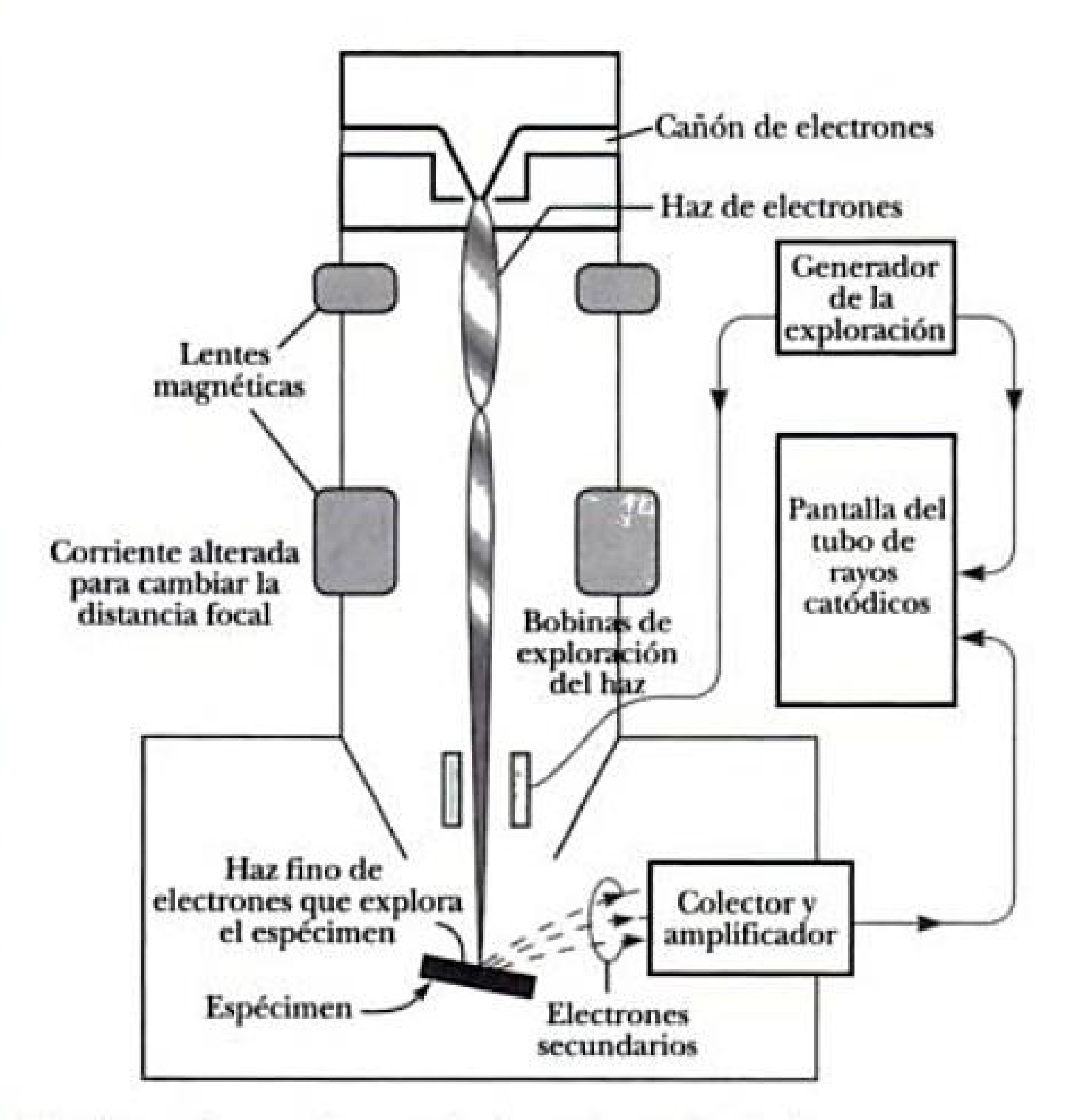


Figura 5.15 Partes de un microscopio de exploración de electrones.

Los más recientes microscopios de rastreo por tunelaje (STM, por sus iniciales en inglés) de resolución superior y el microscopio de fuerza atómica (AFM, por sus iniciales en inglés), que puede presentar las imágenes de átomos y moléculas individuales, se analizarán en el capítulo 7. Estos instrumentos son apasionantes no sólo por sus excelentes fotografías de la topografía superficial y de los átomos individuales (vea en la figura 5.16 una imagen obtenida con un AFM), sino también por su potencial como máquinas microscópicas capaces de detectar y mover unos cuantos átomos a la vez en circuitos con memorias del orden de los terabits y en espectrómetros de masa.

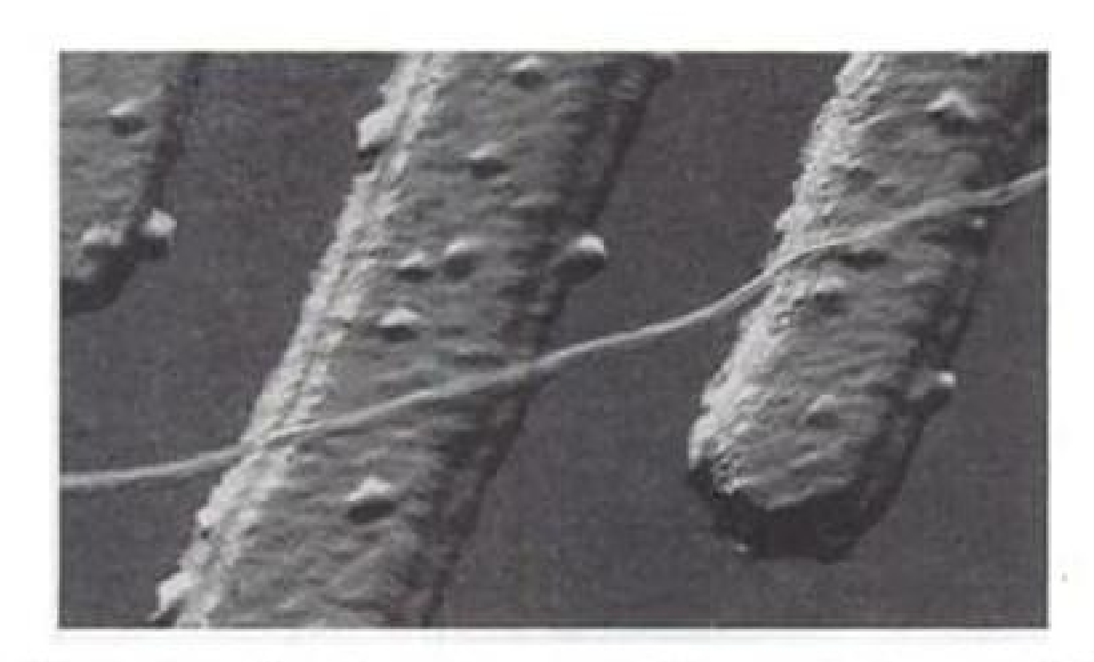


Figura 5.16 El alambre eléctrico más pequeño del mundo. Imagen AFM de un nanotubo de alambre de carbono sobre electrodos de platino. El alambre mide 1.5 nm de ancho, apenas la dimensión de 10 átomos juntos. La amplificación es de 120 000. (*Delft University of Technology/Photo Researchers, Inc.*)

5.3 GRUPOS DE ONDAS Y DISPERSIÓN

La onda de materia que representa a una partícula en movimiento debe reflejar el hecho de que ésta tiene una gran probabilidad de ser encontrada en una pequeña región del espacio sólo en un tiempo específico. Esto significa que una onda viajera de materia sinusoidal, de extensión infinita y amplitud constante, no puede representar apropiadamente a una partícula localizada en movimiento. Lo que se requiere es un pulso, o "grupo de ondas", de extensión espacial limitada. Este pulso puede formarse sumando ondas sinusoidales con longitudes de onda diferentes. Luego, puede demostrarse que el grupo de ondas resultante se mueve a una velocidad v_g (la velocidad del grupo) idéntica a la velocidad clásica de la partícula. Este razonamiento, que se muestra esquemáticamente en la figura 5.17, se abordará en detalle después de la introducción de algunas ideas generales sobre grupos de ondas.

En realidad, todas las ondas observadas están limitadas a regiones definidas del espacio y se denominan *pulsos, grupos de ondas* o, en el caso de ondas de materia, *paquetes de ondas.* Una onda plana con una longitud de onda exacta y extensión infinita es una abstracción. Las ondas acuáticas que se forman cuando se arroja una piedra a un estanque, las ondas de luz que salen de un obturador cuando se abre brevemente, la onda que se genera si se agita uno de los extremos de una cuerda tensa, y la onda sonora que emite un capacitor de descarga, todas deben ser modeladas por grupos de ondas. Un grupo de ondas consta de una superposición de ondas con *longitudes de onda diferentes,* con la amplitud y fase de cada una de ellas ajustadas de modo que las ondas interfieren en forma constructiva sobre una pequeña región del espacio. Fuera de esta región la combinación de ondas produce una amplitud neta que tiende a cero rápidamente como resultado de la interferencia destructiva. Tal vez el ejemplo físico más familiar en que se presentan grupos de ondas es el fenómeno de las pulsaciones. Éstas ocurren cuando se combinan dos ondas sonoras de longitud de onda ligeramente distintas (y, por tanto, de frecuencias diferentes). La onda sonora resultante tiene una frecuencia igual al promedio de las dos ondas que se

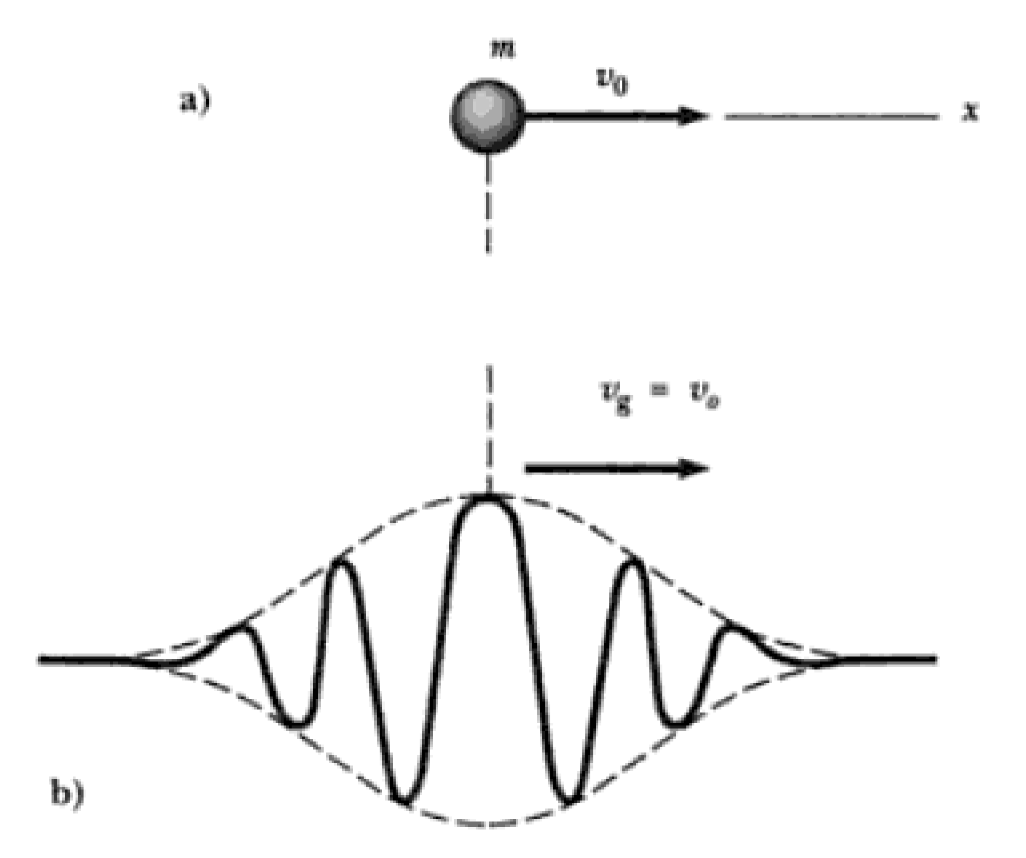


Figura 5.17 Representación de una partícula con ondas de materia: a) partícula de masa m y velocidad v_0; b) la superposición de muchas ondas de materia con una dispersión de longitudes de onda centrada en $\lambda_0 = mv_0$ representa correctamente una partícula.

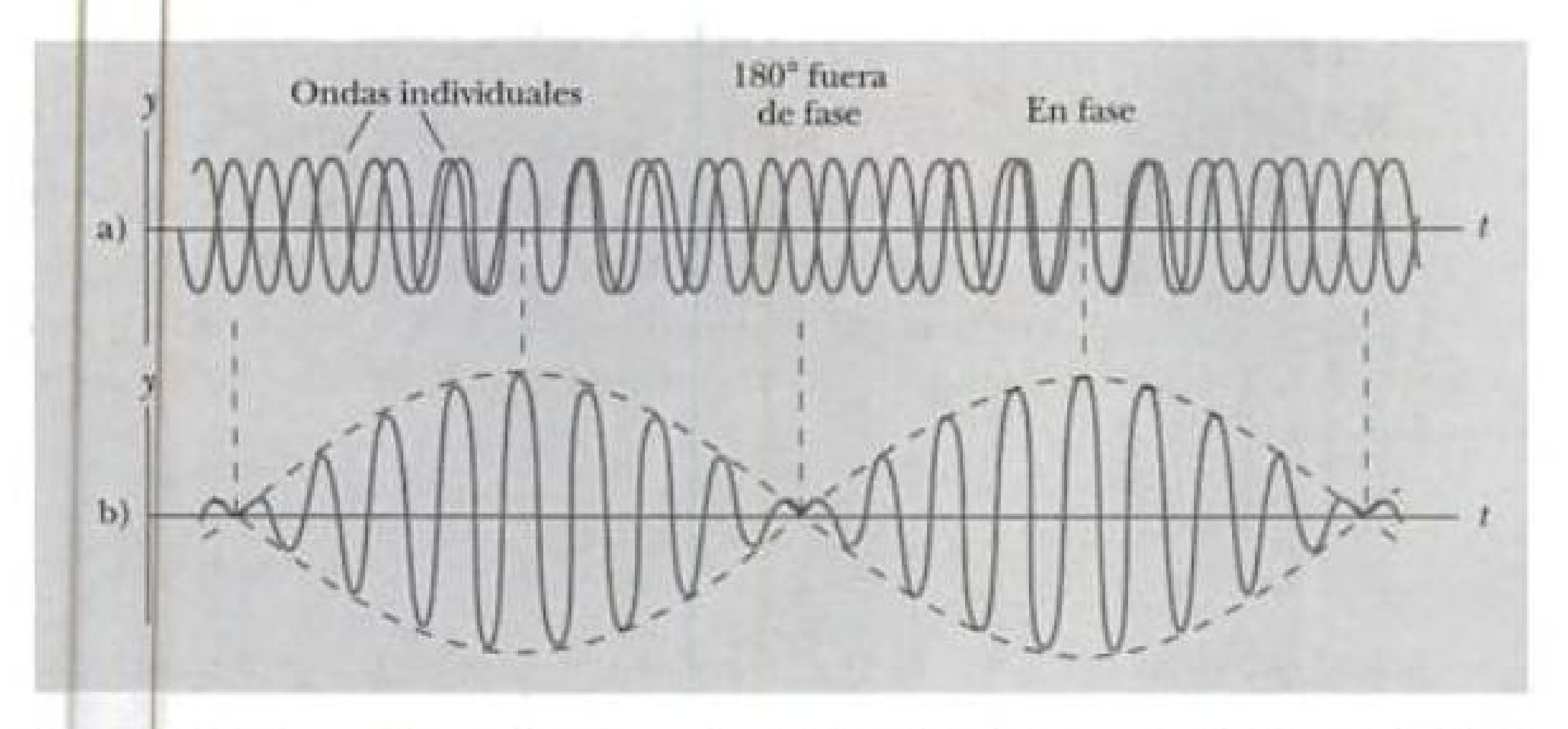


Figura 5.18 Los pulsos se forman por la combinación de dos ondas de frecuencia ligeramente distintas que se desplazan en la misma dirección. a) Ondas individuales. b) La onda combinada tiene una amplitud (línea discontinua) que oscila con el tiempo.

combinan y una amplitud que fluctúa, o "pulsa", a un ritmo dado por la diferencia de las dos frecuencias originales. Este caso se ilustra en la figura 5.18.

Ahora, esta situación se analizará matemáticamente. Considere una onda unidimensional que se propaga en la dirección x positiva con una *velocidad de fase* v_p. Observe que v_p es la velocidad de un punto de fase constante sobre la onda, como una cresta o un valle. Esta onda viajera con longitud de onda λ, frecuencia f y amplitud A puede describirse por

$$y = A\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - 2\pi f t\right) \tag{5.10}$$

donde λ y f están relacionadas por

$$v_p = \lambda f \tag{5.11}$$

Una forma abreviada de la ecuación 5.10 se obtiene si se toma $\omega = 2\pi f$ (donde ω es la *frecuencia angular*) y $k = 2\pi/\lambda$ (donde k es el *número de onda*). Con estas sustituciones, la onda infinita se vuelve

$$y = A\cos(kx - \omega t) \tag{5.12}$$

con

$$v_p = \frac{\omega}{k} \tag{5.13}$$

Velocidad de fase

A continuación se forma la superposición de dos ondas de la misma amplitud, ambas desplazándose en la dirección x positiva pero con longitudes de onda, frecuencias y velocidades de fase ligeramente distintas. La amplitud resultante y está dada por

$$y = y_1 + y_2 = A\cos(k_1x - \omega_1 t) + A\cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

Usando la identidad trigonométrica

$$\cos a + \cos b = 2\cos\tfrac{1}{2}(a - b)\cdot\cos\tfrac{1}{2}(a + b)$$

se encuentra

$$y = 2A\cos\tfrac{1}{2}\{(k_2 - k_1)x - (\omega_2 - \omega_1)t\}\cdot\cos\tfrac{1}{2}\{(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t\} \quad (5.14)$$

Para el caso de dos ondas con valores de k y ω, ligeramente diferentes, se observa que $\Delta k = k_2 - k_1$ y $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ son pequeños, pero $(k_1 + k_2)$ y $(\omega_1 + \omega_2)$ son grandes. Así, la ecuación 5.14 puede interpretarse como una envolvente sinusoidal ancha

$$2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$

que limita o modula una onda de alta frecuencia dentro de la envolvente

$$\cos[\tfrac{1}{2}(k_1 + k_2)x - \tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t]$$

Esta superposición de dos ondas se muestra en la figura 5.19.

Aunque nuestro modelo es muy sencillo y no representa un pulso limitado a una pequeña región del espacio, muestra varias características interesantes comunes a modelos más complicados. Por ejemplo, la envolvente y la onda en su interior se mueven a velocidades diferentes. La velocidad, ya sea de la onda o de la envolvente a alta frecuencia, se obtiene al dividir el coeficiente del término t entre el coeficiente del término x, como se hizo en las ecuaciones 5.12 y 5.13. Para la onda *dentro de la envolvente,*

$$v_p = \frac{(\omega_1 + \omega_2)/2}{(k_1 + k_2)/2} \approx \frac{\omega_1}{k_1} = v_1$$

Así, la onda de alta frecuencia se mueve a la velocidad de fase v_1 de una de las ondas o a v_2, porque $v_1 \approx v_2$. La envolvente (o grupo) descrita por $2a\cos[(\Delta k/2)x - (\Delta\omega/2)t]$ se mueve con una velocidad diferente; no obstante, la velocidad de grupo está dada por

$$v_g = \frac{(\omega_2 - \omega_1)/2}{(k_2 - k_1)/2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad (5.15)$$

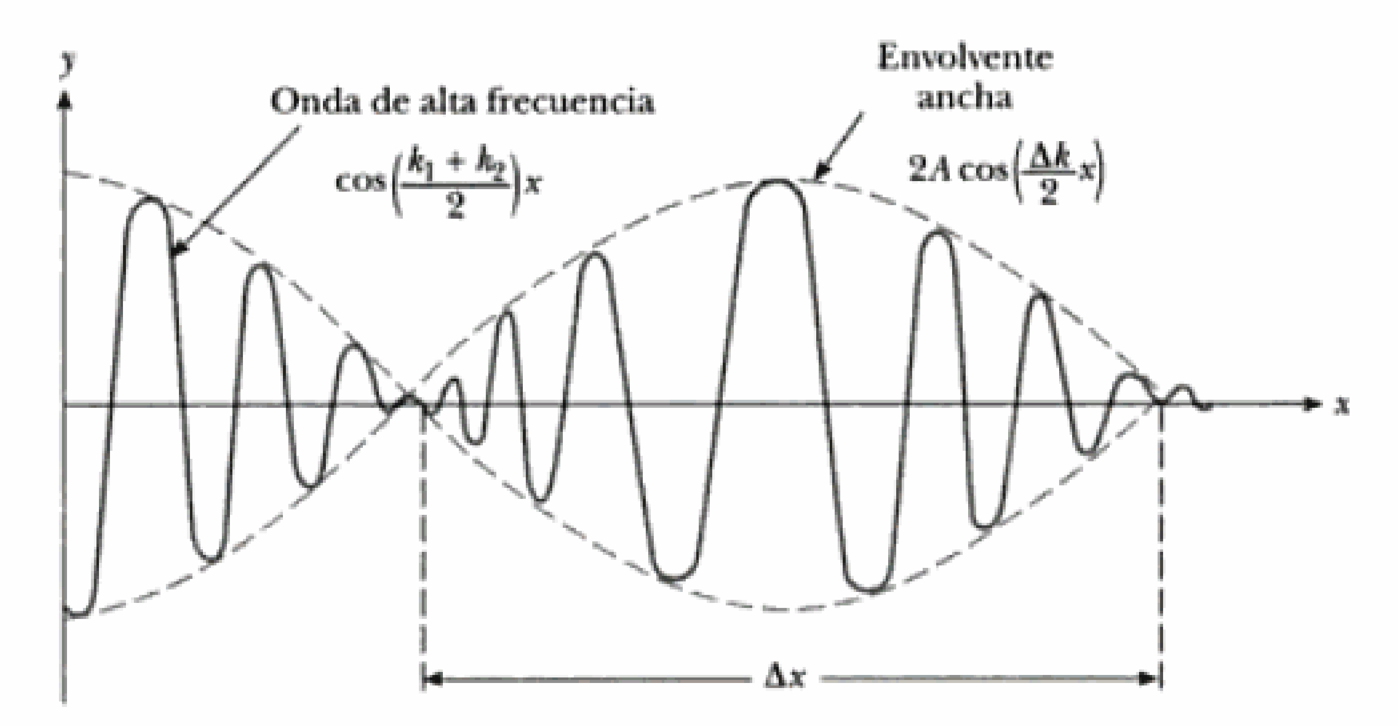


Figura 5.19 Superposición de dos ondas de longitudes de onda ligeramente distintas que resulta en grupos de ondas primitivas; t se ha igualado a cero en la ecuación 5.14.

Otras características generales de los grupos de ondas para ondas de cualquier tipo son tanto una duración temporal limitada, Δt, como una extensión espacial limitada, Δx. Mientras más pequeño es el ancho espacial del pulso, Δx,

mayor es el intervalo de longitudes de onda o números de onda, Δk, necesario para formar el pulso. Lo anterior puede plantearse matemáticamente como

$$\Delta x \, \Delta k \approx 1 \tag{5.16}$$

De manera semejante, si la duración temporal, Δt, del pulso es pequeña, se requiere una amplia distribución de frecuencias, $\Delta\omega$, para formar el grupo. Es decir,

$$\Delta t \, \Delta\omega \approx 1 \tag{5.17}$$

En electrónica de pulsos, esta condición se conoce como "fórmula de respuesta tiempo-ancho de banda".[3] En esta situación, la ecuación 5.17 muestra que, para amplificar sin distorsión un pulso de voltaje de anchura temporal Δt, un amplificador de pulsos debe amplificar por igual todas las frecuencias en una banda de frecuencia de ancho $\Delta\omega$.

Las ecuaciones 5.16 y 5.17 son importantes porque constituyen "relaciones de incertidumbre" o "relaciones de reciprocidad" para pulsos de cualquier tipo: electromagnéticos, sonoros e, incluso, ondas de materia. En particular, la ecuación 5.16 muestra que Δx, la incertidumbre en la extensión espacial de un pulso, es inversamente proporcional a Δk, el intervalo de números de onda que integran el pulso; **no es posible que tanto Δx como Δk se vuelvan arbitrariamente pequeños, ya que cuando uno disminuye el otro debe aumentar.**

Es interesante que nuestro sencillo modelo de dos ondas también muestra los principios generales proporcionados por las ecuaciones 5.16 y 5.17. Si la extensión espacial de nuestro grupo se denomina (de manera más bien artificial) distancia entre mínimos adyacentes (identificada por Δx en la figura 5.12), a partir del término de la envolvente $2a\cos(\frac{1}{2}\Delta k x)$ se encuentra la condición $\frac{1}{2}\Delta k\,\Delta x = \pi$, o bien,

$$\Delta k \, \Delta x = 2\pi \tag{5.18}$$

Aquí, $\Delta k = k_2 - k_1$ es el intervalo de números de onda presentes. De manera semejante, si x se mantiene constante y se permite que t varíe en parte de la envolvente de la ecuación 5.14, el resultado es $\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)\,\Delta t = \pi$, o bien,

$$\Delta\omega \, \Delta t = 2\pi \tag{5.19}$$

En consecuencia, las ecuaciones 5.18 y 5.19 coinciden con los principios generales, respectivamente, de $\Delta k\,\Delta x \approx 1$ y $\Delta\omega\,\Delta t \approx 1$.

Agregar sólo dos ondas con frecuencias discretas puede resultar útil, pero produce una onda infinita en vez de un pulso. En el caso general, muchas ondas que poseen una distribución continua de longitudes de onda deben sumarse para formar un paquete, que es finito sobre un intervalo limitado, cero en cualquier otra parte. En este caso, la ecuación 5.15 para la **velocidad de grupo,** v_g, se vuelve

$$v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} \tag{5.20}$$

Velocidad de grupo

[3] Debe recalcarse que las ecuaciones 5.16 y 5.17 son válidas en general, y que las cantidades Δx, Δk, Δt y $\Delta\omega$ representan la distribución en valores en un pulso *arbitrario* formado a partir de la superposición de dos o *más* ondas.

donde la derivada debe evaluarse en k_0, el número de onda central de las muchas ondas presentes. La conexión entre la velocidad de grupo y la velocidad de fase de las ondas compuestas se obtiene con facilidad. Debido a que $\omega = kv_p$, se encuentra

$$v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} = v_p\Big|_{k_0} + k\left.\frac{dv_p}{dk}\right|_{k_0} \tag{5.21}$$

donde v_p es la velocidad de fase, la cual es, en general, una función de k o de λ. Se dice que los materiales en los que la velocidad de fase varía con la longitud de onda presentan **dispersión.** Un ejemplo de medio dispersivo es el cristal, donde el índice de refracción varía con la longitud de onda y los diferentes colores de la luz se desplazan a velocidades distintas. Los medios en los que la velocidad de fase no varía con la longitud de onda (como el vacío, en el caso de ondas electromagnéticas) se denominan *no dispersivos.* El término *dispersión* surge por el hecho de que las ondas armónicas individuales que constituyen un pulso se desplazan a diferentes velocidades de fase y hacen que un pulso originalmente nítido cambie de forma y se distribuya o disperse. Como ejemplo, en la figura 5.20 se muestra la dispersión de un pulso láser después de recorrer 1 km a través de una fibra óptica. En un medio no dispersivo, donde todas las ondas tienen la misma velocidad, la velocidad de grupo es igual a la velocidad de fase. En un medio dispersivo, la velocidad de grupo puede ser menor o mayor que la velocidad de fase, dependiendo del signo de dv_p/dk, como se observa en la ecuación 5.21.

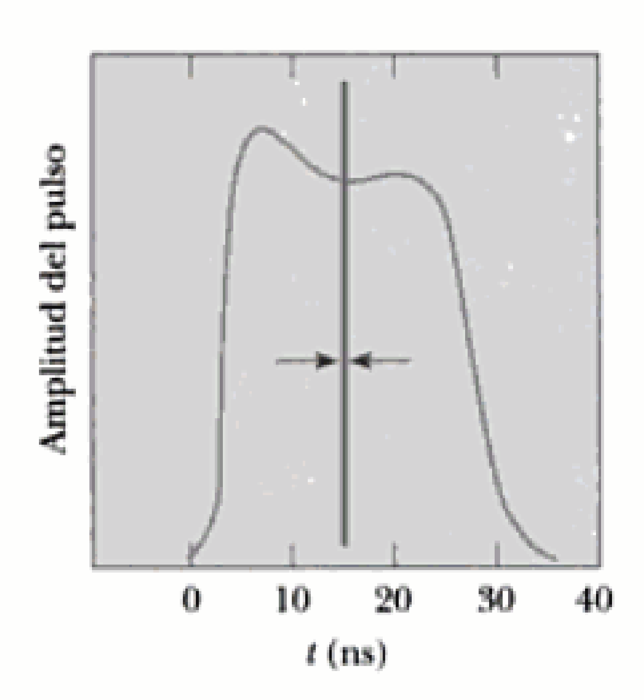


Figura 5.20 Dispersión en un pulso láser de 1 ns. Un pulso que inicia con el ancho que se muestra con las líneas verticales tiene un ancho temporal aproximado de 30 ns después de recorrer 1 km a lo largo de una fibra óptica.

EJEMPLO 5.4 Velocidad de grupo en un medio dispersivo

En una sustancia particular, la velocidad de fase de las ondas se duplica cuando la longitud de onda se reduce a la mitad. Demuestre que los grupos de ondas en este sistema se mueven al doble de la velocidad de fase *central.*

Solución A partir de la información proporcionada, la dependencia de la velocidad de fase con respecto a la longitud de onda debe ser

$$v_p = \frac{A'}{\lambda} = Ak$$

para algunas constantes A' y A. A partir de la ecuación 5.21 se obtiene

$$v_g = v_p\Big|_{k_0} + k\left.\frac{dv_p}{dk}\right|_{k_0} = Ak_0 + Ak_0 = 2Ak_0$$

Así,

$$v_g = 2v_p\Big|_{k_0}$$

EJEMPLO 5.5 Velocidad de grupo en ondas acuáticas profundas

Newton demostró que la velocidad de ondas acuáticas profundas con longitud de onda λ está dada por

$$v_p = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

donde g es la aceleración de la gravedad y donde se ignora la minúscula contribución de la tensión superficial. Demuestre que, en este caso, la velocidad de un grupo de estas ondas es la mitad de la velocidad de fase de la longitud de onda central.

Solución Debido a que $k = 2\pi/\lambda$, v_p puede escribirse como

$$v_p = \left(\frac{g}{k}\right)^{1/2}$$

En consecuencia, se encuentra

$$v_g = v_p\Big|_{k_0} + k\left.\frac{dv_p}{dk}\right|_{k_0} = \left(\frac{g}{k_0}\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\left(\frac{g}{k_0}\right)^{1/2}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{g}{k_0}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}v_p\Big|_{k_0}$$

Paquetes de ondas de materia

Ahora ya es posible aplicar nuestra teoría general de grupos de ondas a los electrones. Mostraremos tanto la dispersión de las ondas de De Broglie como el resultado satisfactorio de que el paquete de ondas y la partícula se mueven a la misma velocidad. Según De Broglie, las ondas de materia *individuales* poseen una frecuencia f y una longitud de onda λ dadas por

$$f = \frac{E}{h} \qquad \text{y} \qquad \lambda = \frac{h}{p}$$

donde E y p son la energía relativista y la cantidad de movimiento de la partícula, respectivamente. La velocidad de fase de estas ondas de materia está dada por

$$v_{\text{p}} = f\lambda = \frac{E}{p} \tag{5.22}$$

La velocidad de fase puede expresarse como una función sólo de p o k, sustituyendo $E = (p^2c^2 + m^2c^4)^{1/2}$ en la ecuación 5.22:

$$v_{\text{p}} = c\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p}\right)^2} \tag{5.23}$$

La relación de dispersión para las ondas de De Broglie puede obtenerse como una función de k al sustituir $p = h/\lambda = \hbar k$ en la ecuación 5.23. Así, se obtiene

$$v_{\text{p}} = c\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{\hbar k}\right)^2} \tag{5.24}$$

Velocidad de fase de las ondas de materia

La ecuación 5.24 muestra que las ondas de De Broglie individuales que representan una partícula de masa m muestran dispersión incluso en el *espacio vacío* y siempre se desplazan a una *velocidad mayor que,* o por lo menos igual a, c. Debido a que estas ondas componentes se desplazan a velocidades distintas, el ancho del paquete de ondas, Δx, se distribuye o dispersa con el transcurso del tiempo, como se verá en detalle en el capítulo 6. Para obtener la velocidad de grupo se usa

$$v_{\text{g}} = \left[v_{\text{p}} + k\,\frac{dv_{\text{p}}}{dk}\right]_{k_0}$$

y la ecuación 5.24. Luego de algunos pasos algebraicos, se encuentra

$$v_{\text{g}} = \frac{c}{\left[1 + \left(\dfrac{mc}{\hbar k_0}\right)^2\right]^{1/2}} = \frac{c^2}{v_{\text{p}}\Big|_{k_0}} \tag{5.25}$$

Al despejar la velocidad de fase de la ecuación 5.22, se encuentra

$$v_{\text{p}} = \frac{E}{p} = \frac{\gamma mc^2}{\gamma mv} = \frac{c^2}{v}$$

donde v es la velocidad de la partícula. Por último, al sustituir $v_{\text{p}} = c^2/v$ en la ecuación 5.25 para v_{g}, se demuestra que la velocidad de grupo del paquete de ondas de materia es la misma que la velocidad de la partícula. Esto coincide con nuestra intuición de que la envolvente de ondas de materia debe moverse a la misma velocidad que la partícula.

O P C I O N A L

5.4 INTEGRALES DE FOURIER

En esta sección se muestra en detalle cómo construir grupos de ondas, o pulsos, que estén verdaderamente localizados en el espacio o en el tiempo, y también se muestra que para estos pulsos se cumplen relaciones de reciprocidad muy generales del tipo $\Delta k \Delta x \approx 1$ y $\Delta\omega\Delta t \approx 1$.

Para formar un pulso que sea cero en todas partes fuera de un intervalo espacial finito Δx se requiere sumar un número infinito de ondas armónicas cuyas longitudes de onda y amplitudes varíen de manera continua. Esta suma puede efectuarse con una integral de Fourier, que se define como

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a(k) e^{ikx} dk \tag{5.26}$$

Aquí, $f(x)$ es un grupo de ondas localizado espacialmente, $a(k)$ proporciona la cantidad o amplitud de la onda con número de onda $k = (2\pi/\lambda)$ que debe sumarse, y $e^{ikx} = \cos kx + i \operatorname{sen} kx$ es la expresión abreviada de Euler para una onda armónica. Si se conoce $f(x)$, la función de distribución de amplitud $a(k)$ puede obtenerse al utilizar la fórmula simétrica

$$a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dk \tag{5.27}$$

Las ecuaciones 5.26 y 5.27 son válidas para el caso de un pulso espacial en un tiempo fijo, aunque es importante observar que son matemáticamente idénticas al caso de un pulso de tiempo que pasa por una posición fija. Este caso es común en ingeniería eléctrica, e implica sumar entre sí un conjunto de frecuencias que varía de manera continua:

$$V(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega \tag{5.28}$$

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} V(t) e^{-i\omega t} dt \tag{5.29}$$

donde $V(t)$ es la intensidad de una señal como una función del tiempo y $g(\omega)$ es el *contenido espectral* de la señal y proporciona la cantidad de la onda armónica con frecuencia ω presente.

A continuación se consideran varios ejemplos de cómo utilizar las ecuaciones 5.26 a 5.29 y cómo éstas conducen a relaciones de incertidumbre del tipo $\Delta\omega\, \Delta t \approx 1$ y $\Delta k\, \Delta x \approx 1$.

EJEMPLO 5.6

En este ejemplo se comparan los contenidos espectrales entre ondas sinusoidales infinitas y truncadas. Una onda sinusoidal truncada es una onda cortada por un obturador, como se muestra en la figura 5.21. a) ¿Cuál es el contenido espectral de una onda sinusoidal infinita $e^{i\omega_0 t}$? b) Encuentre y grafique el contenido espectral de una onda sinusoidal truncada dada por

$$V(t) = e^{i\omega_0 t} \qquad -T < t < +T$$

$$V(t) = 0 \qquad \text{de otro modo}$$

c) Demuestre que, para este sinusoide truncado, $\Delta t\, \Delta\omega = \pi$, donde Δt y $\Delta\omega$ son los semianchos de $v(t)$ y $g(\omega)$, respectivamente.

Solución a) El contenido espectral consta de una fuerte contribución simple a la frecuencia ω_0.

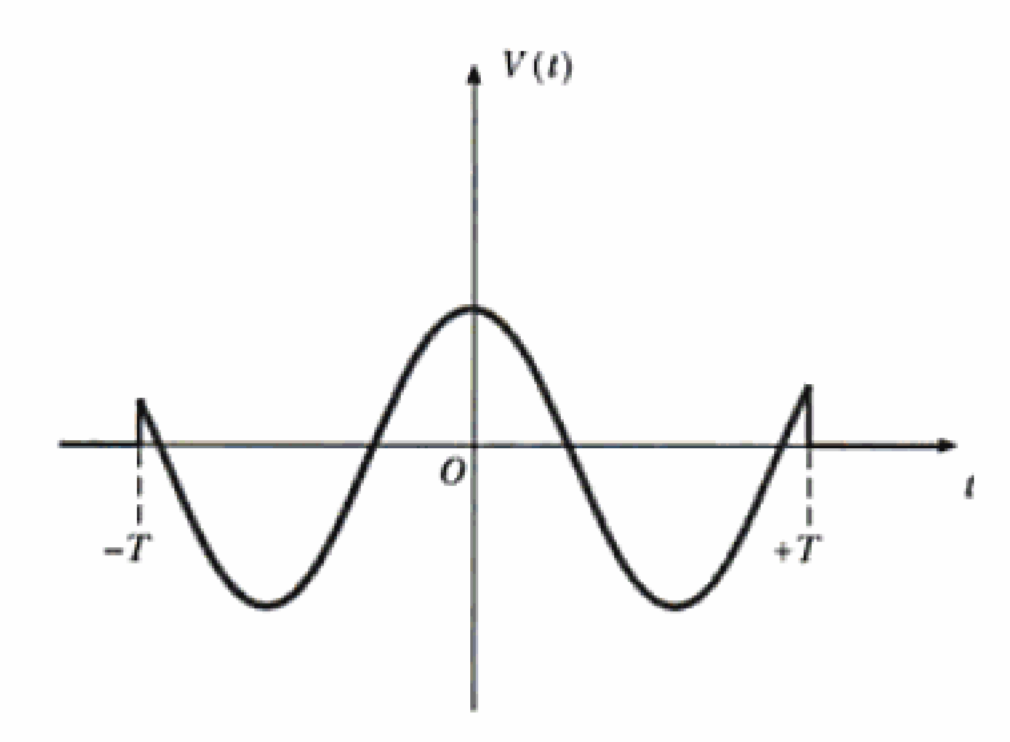


Figura 5.21 (Ejemplo 5.6.) Parte real de una onda sinusoidal truncada.

b)
$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} V(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^{+T} e^{i(\omega_0 - \omega)t}\, dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^{+T} [\cos(\omega_0 - \omega)t + i \operatorname{sen}(\omega_0 - \omega)t]\, dt$$

Debido a que el término seno es una función impar y el coseno es par, la integral se reduce a

$$g(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^T \cos(\omega_0 - \omega)t\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\operatorname{sen}(\omega_0 - \omega)T}{(\omega_0 - \omega)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(T)\, \frac{\operatorname{sen}(\omega_0 - \omega)T}{(\omega_0 - \omega)T}$$

Un bosquejo de $g(\omega)$ (figura 5.22) muestra un típico perfil sen Z/Z centrado en ω_0. Observe que para obtener el sinusoide truncado es necesario sumar cantidades positivas y negativas de frecuencias diferentes. Además, la contribución de la frecuencia más fuerte proviene de la región de frecuencia próxima a $\omega = \omega_0$, como era de esperarse.

c) Resulta evidente que $\Delta t = T$ y $\Delta\omega$ puede tomarse como la mitad del ancho del lóbulo principal de $g(\omega)$, $\Delta\omega = \pi/T$. Así, se obtiene

$$\Delta\omega\, \Delta t = \frac{\pi}{T} \times T = \pi$$

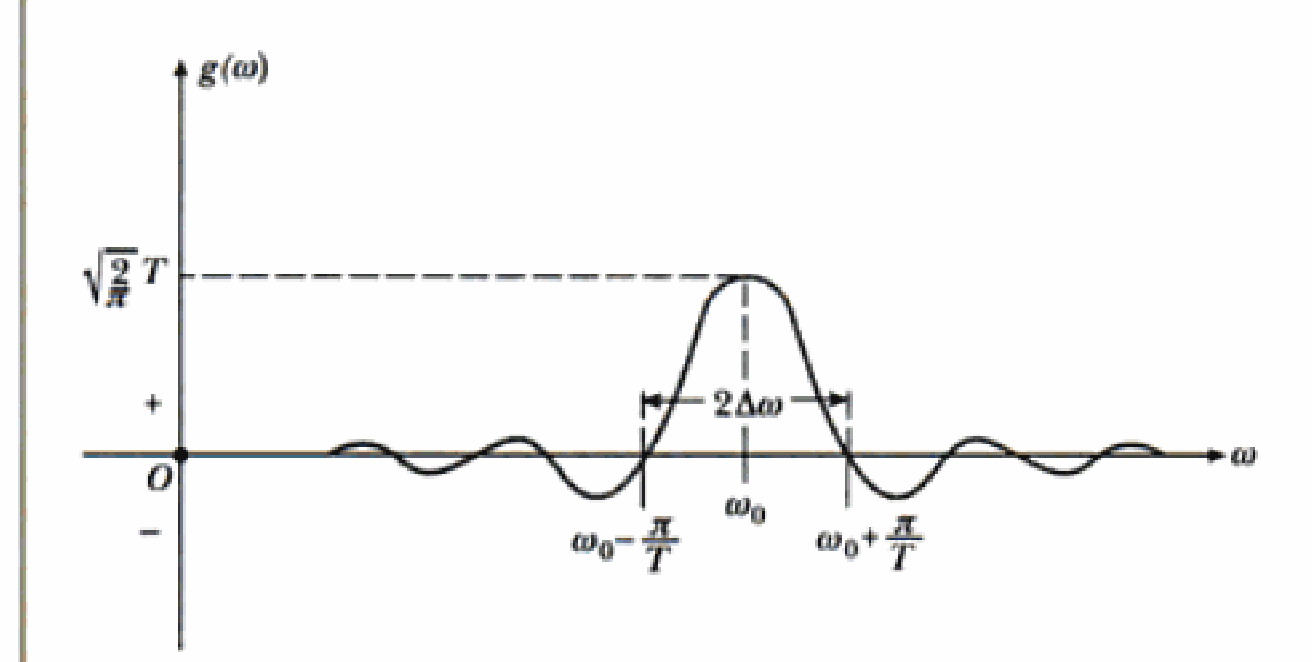


Figura 5.22 (Ejemplo 5.6.) Transformada de Fourier de una onda sinusoidal truncada. La curva muestra la cantidad de una frecuencia dada que debe sumarse para obtener la onda truncada.

Se observa que el producto del ancho en frecuencia, $\Delta\omega$, y el ancho en el tiempo, Δt, es una constante independiente de T.

EJEMPLO 5.7 Un paquete de ondas de materia

a) Demuestre que el paquete de ondas de materia, cuya distribución de amplitud $a(k)$ es un pulso rectangular de altura igual a la unidad, ancho Δk y centrado en k_0 (figura 5.23), tiene la forma

$$f(x) = \frac{\Delta k}{\sqrt{2\pi}} \frac{\operatorname{sen}(\Delta k \cdot x/2)}{(\Delta k \cdot x/2)} e^{ik_0 x}$$

Solución

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a(k) e^{ikx}\, dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k_0-(\Delta k/2)}^{k_0+(\Delta k/2)} e^{ikx}\, dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ik_0 x}}{x} 2 \operatorname{sen}(\Delta k \cdot x/2)$$

$$= \frac{\Delta k}{\sqrt{2\pi}} \frac{\operatorname{sen}(\Delta k \cdot x/2)}{(\Delta k \cdot x/2)} e^{ik_0 x}$$

b) Observe que este paquete de ondas es una función compleja. Más tarde en este capítulo se verá cómo la definición de densidad de probabilidad resulta en una función real, aunque por el momento sólo se considerará la parte real de $f(x)$ y se hará una gráfica de su comportamiento, mostrando su envolvente y la función coseno en su interior. Determine Δx y demuestre que se cumple una relación de incertidumbre de la forma $\Delta x \Delta k \approx 1$.

Solución La parte real del paquete de ondas se muestra en la figura 5.24, donde todo el ancho del lóbulo principal es $\Delta x = 4\pi/\Delta k$. Esto proporciona de inmediato la relación de incertidumbre $\Delta x \Delta k = 4\pi$. Observe que la constante en el miembro derecho de la relación de incertidumbre depende de la forma elegida para $a(k)$ y de la definición precisa de Δx y Δk.

Ejercicio 3 Suponga que en algún tipo de sistema de radar surge un pulso de voltaje triangular estrecho $V(t)$ (vea la figura 5.25). a) Encuentre y grafique el contenido espectral $g(\omega)$. b) Demuestre que se cumple una relación del tipo $\Delta\omega\, \Delta t \approx 1$. c) Si el ancho del pulso es $2\tau = 10^{-9}$ s, ¿qué intervalo de frecuencias debe pasar

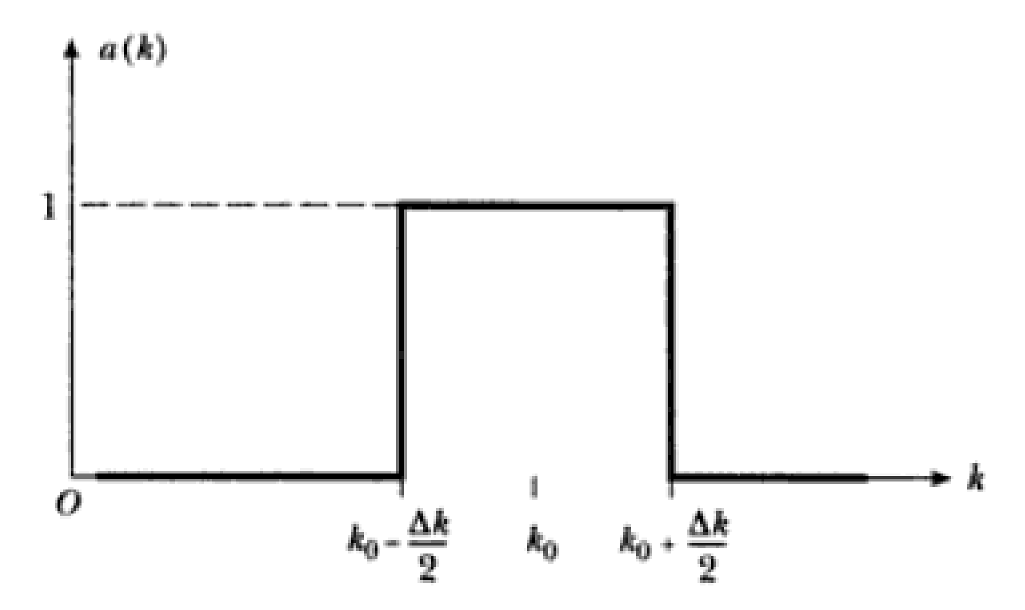


Figura 5.23 (Ejemplo 5.7.) Distribución de amplitud simple que especifica una contribución uniforme de todos los números de onda desde $k_0 - \Delta k/2$ hasta $k_0 + \Delta k/2$. Aunque aquí sólo se han utilizado k positivas, para k se permiten valores tanto positivos como negativos, que en general corresponden a ondas que se desplazan hacia la derecha ($k > 0$) o hacia la izquierda ($k < 0$).

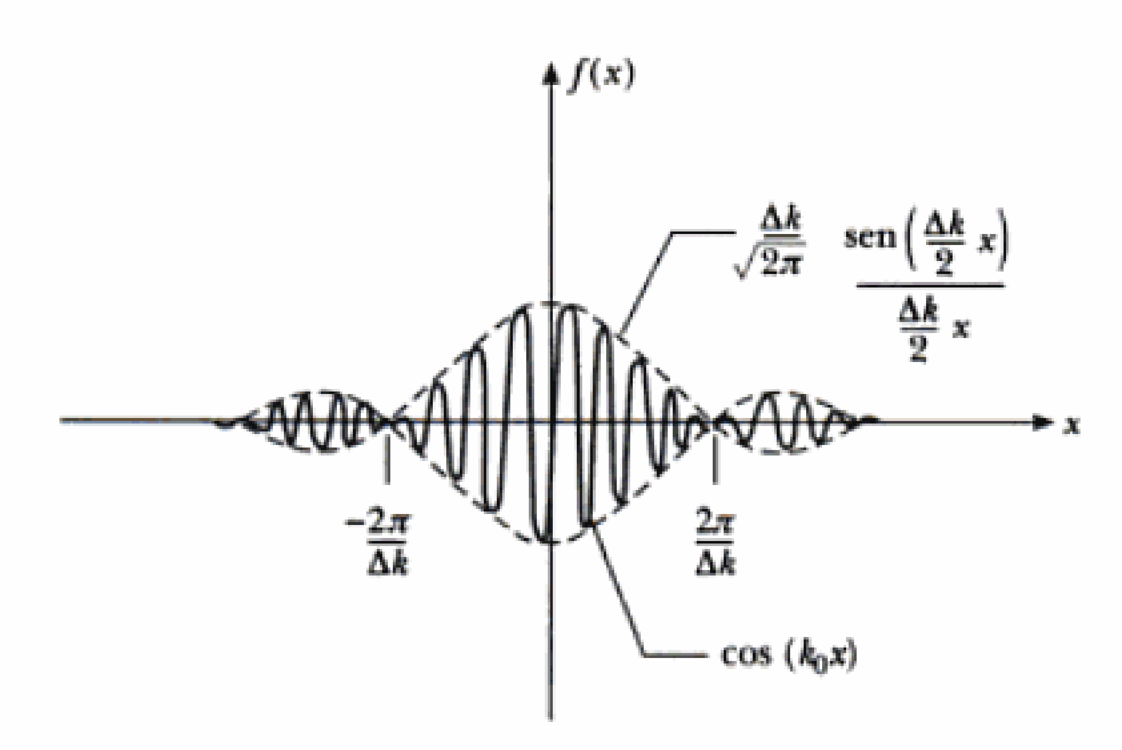


Figura 5.24 (Ejemplo 5.7.) Parte real del paquete de ondas formado por la distribución de amplitud uniforme que se muestra en la figura 5.23.

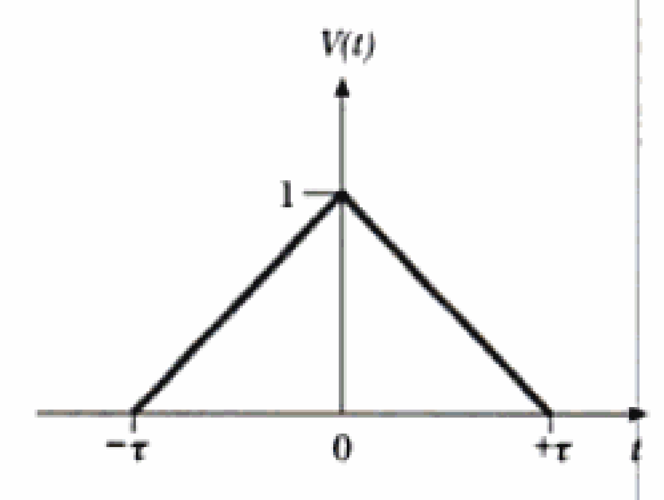


Figura 5.25 (Ejercicio 3.)

este sistema para que el pulso no se distorsione? Tome $\Delta t = \tau$ y defina $\Delta\omega$ de igual forma.

Respuesta a) $g(\omega) = (\sqrt{2/\pi})(1/\omega^2\tau)(1 - \cos\omega\tau)$. b) $\Delta\omega\,\Delta t = 2\pi$. c) $2\Delta f = 4 \times 10^9$ Hz.

Construcción de paquetes de ondas en movimiento

La figura 5.24 representa una instantánea del paquete de ondas en $t = 0$. Para construir un paquete de ondas en movimiento que represente a una partícula que se desplaza, sustituimos kx con $(kx - \omega t)$ en la ecuación 5.26. Así, la representación del paquete de ondas en movimiento se vuelve

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a(k)\, e^{i(kx - \omega t)}\, dk \tag{5.30}$$

Es importante observar que aquí $\omega = \omega(k)$; es decir, que ω es una función de k y, en consecuencia, depende del tipo de onda y del medio por el que atraviesa. En general, es difícil resolver analíticamente esta integral. Para ondas de materia, el software QMTools, disponible en nuestro sitio en la red (http://info.brookscole.com/mp3e), genera el mismo resultado al resolver numéricamente la ecuación diferencial que rige el comportamiento de tales ondas. Este método se abordará con mayor detalle en el próximo capítulo.

5.5 PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE DE HEISENBERG

En el periodo de 1924-25, Werner Heisenberg, hijo de un profesor de griego y latín en la Universidad de Munich, inventó una teoría completa de la mecánica cuántica denominada mecánica matricial. Esta teoría superó algunos de los problemas generados con la teoría del átomo de Bohr, como el postulado de órbitas "no observables" de los electrones. El planteamiento de Heisenberg se basaba principalmente en cantidades mensurables como las probabilidades de transición para saltos de los electrones entre estados cuánticos. Debido a que estas probabilidades de transición dependen de los estados inicial y final, Heisenberg utilizó en su mecánica variables identificadas con dos subíndices. Aunque al principio Heisenberg presentó su teoría en forma de álgebra no conmutativa, Max Born pronto se dio cuenta que esta teoría podía describirse de una manera más elegante utilizando matrices. En consecuencia, Born, Heisenberg y Pascual Jordan

se dieron a la tarea de elaborar una teoría detallada de la mecánica matricial. Aunque el planteamiento matricial era sumamente elegante, atrajo poca atención (con excepción de un pequeño grupo de científicos dotados) debido a que era difícil de aplicar en casos específicos, implicaba conocimientos matemáticos que los físicos ignoraban y se basaba en conceptos físicos más bien inciertos.

Aunque aquí ya no investigaremos más esta extraordinaria forma de la mecánica cuántica, se analizará otro de los descubrimientos de Heisenberg, el **principio de incertidumbre,** aclarado en un famoso artículo en 1927. En este artículo Heisenberg introdujo el concepto de que **es imposible determinar de manera simultánea y con exactitud ilimitada la posición y la cantidad de movimiento de una partícula.** Coloquialmente, este principio puede plantearse como sigue:

Si se realizan una medición de la posición con una precisión Δx y una medición simultánea de la cantidad de movimiento en la dirección x con una precisión Δp_x, entonces el producto de las dos incertidumbres nunca puede ser menor que $\hbar/2$. Es decir,

Principio de incertidumbre cantidad de movimiento-posición

$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \tag{5.31}$$

En su artículo de 1927, Heisenberg tuvo cuidado en indicar que las incertidumbres ineludibles Δp_x y Δx no surgen debido a imperfecciones en los instrumentos de medición. En vez de ello, se deben a la necesidad de utilizar un gran intervalo de números de onda, Δk, para representar un paquete de ondas de materia localizado en una pequeña región, Δx. El principio de incertidumbre constituye una ruptura acusada con las ideas de la física clásica, donde se supone que, con ingenio y capacidad suficientes, es posible medir simultáneamente la posición y la cantidad de movimiento de una partícula hasta el grado de exactitud que se quiera. Como se muestra en el ejemplo 5.8, sin embargo, no hay contradicción entre el principio de incertidumbre y las leyes clásicas para sistemas macroscópicos, debido al pequeño valor de $\hbar$.

Es posible demostrar que $\Delta p_x \, \Delta x \geq \hbar/2$ proviene de la relación de incertidumbre que rige cualquier tipo de pulso ondulatorio formado por la superposición de ondas con distintas longitudes de onda. En la sección 5.3 se vio que para construir un grupo de ondas localizado en una pequeña región Δx fue necesario sumar un gran intervalo de números de onda Δk, donde $\Delta k \Delta x \approx 1$ (ecuación 5.16). El valor exacto del número del miembro derecho de la ecuación 5.16 depende de la forma funcional $f(x)$ del grupo de ondas, así como de la definición específica de Δx y Δk. Una elección distinta de $f(x)$ o una regla de definición diferente de Δx y Δk (o de ambas) proporciona un número ligeramente diferente. Con la definición de Δx y Δk como desviaciones estándar, es posible demostrar que, para una función de onda gaussiana, se obtiene el número menor, $\frac{1}{2}$.[4] En este caso de incertidumbre mínima se tiene

$$\Delta x \Delta k = \tfrac{1}{2}$$

[4]Consulte la sección 6.7 para una definición de la desviación estándar y el problema 6.34 para una demostración matemática completa de esta afirmación.



BIOGRAFÍA

WERNER HEISENBERG
(1901–1976)

Esta fotografía de Werner Heisenberg fue tomada alrededor de 1924. Heisenberg obtuvo su doctorado (Ph. D.) en 1923 en la Universidad de Munich, donde estudió bajo la dirección de Arnold Sommerfeld y se volvió un entusiasta aficionado al montañismo y al esquí. Después, trabajó como asistente de Max Born en Gotinga y de Niels Bohr en Copenhague. Mientras físicos como De Broglie y Schrödinger intentaban desarrollar modelos previsibles del átomo, Heisenberg, con ayuda de Born y Pascual Jordan, desarrolló un modelo matemático abstracto, denominado mecánica matricial, para explicar las longitudes de onda de las líneas espectrales. Se demostró que la más exitosa mecánica ondulatoria de Schrödinger, anunciada unos meses después, era equivalente al enfoque de Heisenberg. Éste realizó muchas otras contribuciones importantes a la física, incluyendo su famoso principio de incertidumbre, por el cual fue galardonado con el premio Nobel en 1932, la predicción de dos formas de hidrógeno molecular, y modelos teóricos del núcleo. Durante la Segunda Guerra Mundial fue director del Instituto Max Planck en Berlín, donde estuvo a cargo de la investigación alemana de armas atómicas. Después de la guerra se trasladó a Alemania Occidental y fue director del Instituto Max Planck de Física en Gotinga.

(Foto cortesía de la Universidad de Hamburgo.)

Para cualquier otra elección de $f(x)$,

$$\Delta x \Delta k \geq \tfrac{1}{2} \tag{5.32}$$

y usando $\Delta p_x = \hbar \Delta k$, $\Delta x\, \Delta k \geq \frac{1}{2}$ de inmediato se vuelve

$$\Delta p_x\, \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \tag{5.33}$$

El significado fundamental de $\Delta p\, \Delta x \geq \hbar/2$ es que a medida que crece una incertidumbre, la otra disminuye. En el caso extremo, cuando una incertidumbre tiende a ∞, la otra debe tender a cero. Este caso se ilustra mediante una onda plana e^{ik_0x} que tiene una cantidad de movimiento precisa $\hbar k_0$ y una extensión infinita; es decir, la función de onda no está concentrada en ningún segmento del eje x.

Otra relación de incertidumbre importante implica la incertidumbre en energía de un paquete de ondas, ΔE, y el tiempo, Δt, necesario para medir esta energía. Empezando con $\Delta\omega\, \Delta t \geq \frac{1}{2}$ como la forma mínima del principio de incertidumbre tiempo-frecuencia y usando la relación de De Broglie para la conexión entre la energía de la onda de materia y la frecuencia, $E = \hbar\omega$, de inmediato se encuentra el **principio de incertidumbre energía-tiempo.**

Principio de incertidumbre energía-tiempo

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \tag{5.34}$$

La ecuación 5.34 establece que la precisión con la cual es posible conocer la energía de algún sistema está limitada por el tiempo disponible para medirla. Una aplicación común de la incertidumbre energía-tiempo es en el cálculo del tiempo de vida de partículas subatómicas de muy corta vida, las cuales no pueden medirse directamente, pero cuya incertidumbre en energía o masa sí puede medirse. (vea el problema 26.)

Otra perspectiva del principio de incertidumbre

Aunque ya se indicó que $\Delta p_x \Delta x \geq \hbar/2$ surge de la teoría de la construcción de pulsos o grupos de ondas, hay una forma más física de considerar el origen

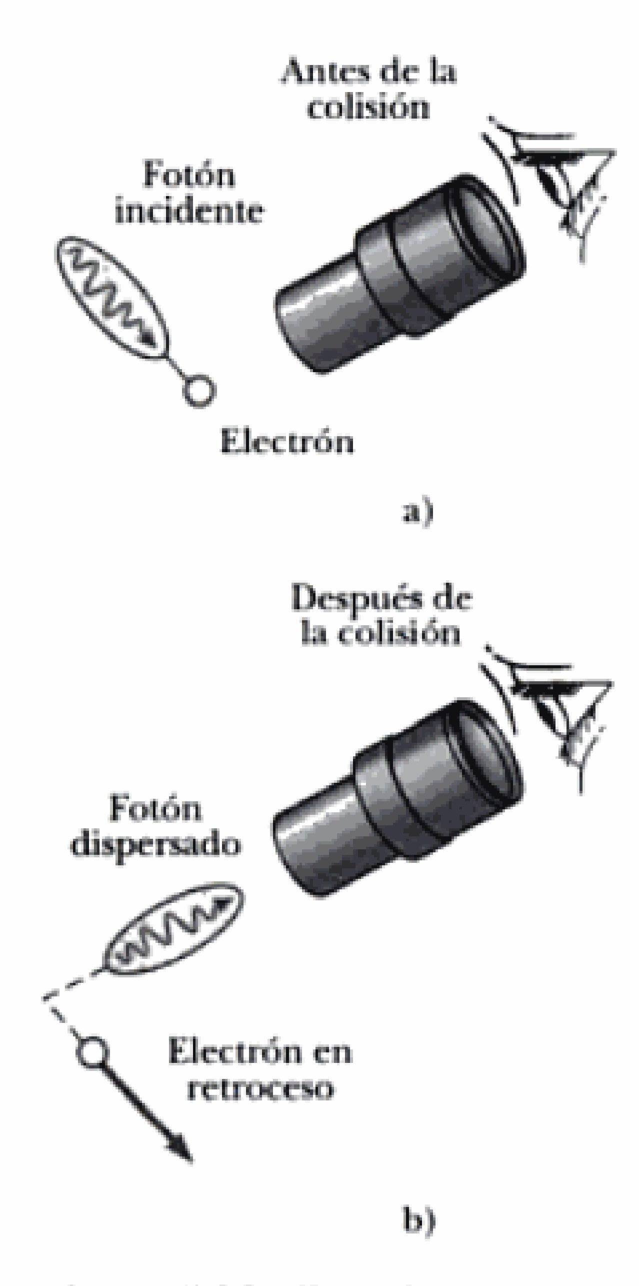


Figura 5.26 Experimento conceptual para observar un electrón con un potente microscopio. a) El electrón antes de colisionar con el fotón. b) El electrón retrocede (es perturbado) como resultado del choque.

del principio de incertidumbre. Se considerarán algunos experimentos idealizados (denominados *experimentos conceptuales*) y se demostrará que es imposible realizar un experimento que permita medir en forma simultánea la posición y la cantidad de movimiento de una partícula con una exactitud tal, que se viole el principio de incertidumbre. El experimento conceptual más conocido en esta línea fue introducido por el mismo Heisenberg e implica la medición de la posición de un electrón por medio de un microscopio (figura 5.26), que forma una imagen del electrón sobre una pantalla o en la retina del ojo.

Debido a que la luz puede ser dispersada por un electrón y perturbarlo, este efecto será minimizado al considerar la dispersión de un simple cuanto de luz por un electrón que inicialmente está en reposo (figura 5.27). Para ser capturado en la lente, el fotón debe dispersarse un ángulo que varía desde $-\theta$ hasta $+\theta$, lo que imparte al electrón, en consecuencia, una componente x de su cantidad de movimiento que va desde $+(h \operatorname{sen} \theta)/\lambda$ hasta $-(h \operatorname{sen} \theta)/\lambda$. Así, la incertidumbre en la cantidad de movimiento del electrón es $\Delta p_x = (2h \operatorname{sen} \theta)/\lambda$. Después de pasar a través de la lente, el fotón llega a cualquier sitio sobre la pantalla, aunque la imagen y, por consiguiente, la posición del electrón son "borrosas", porque el fotón se difracta al pasar por la abertura de la lente. Según la óptica física, la resolución de un microscopio o la incertidumbre en la imagen del electrón, Δx, está dada por $\Delta x = \lambda/(2 \operatorname{sen} \theta)$. Aquí, 2θ es el ángulo subtendido por el objetivo de la lente, como se muestra en la figura 5.27.[5] Al multiplicar las expresiones para Δp_x y Δx, se encuentra para el electrón

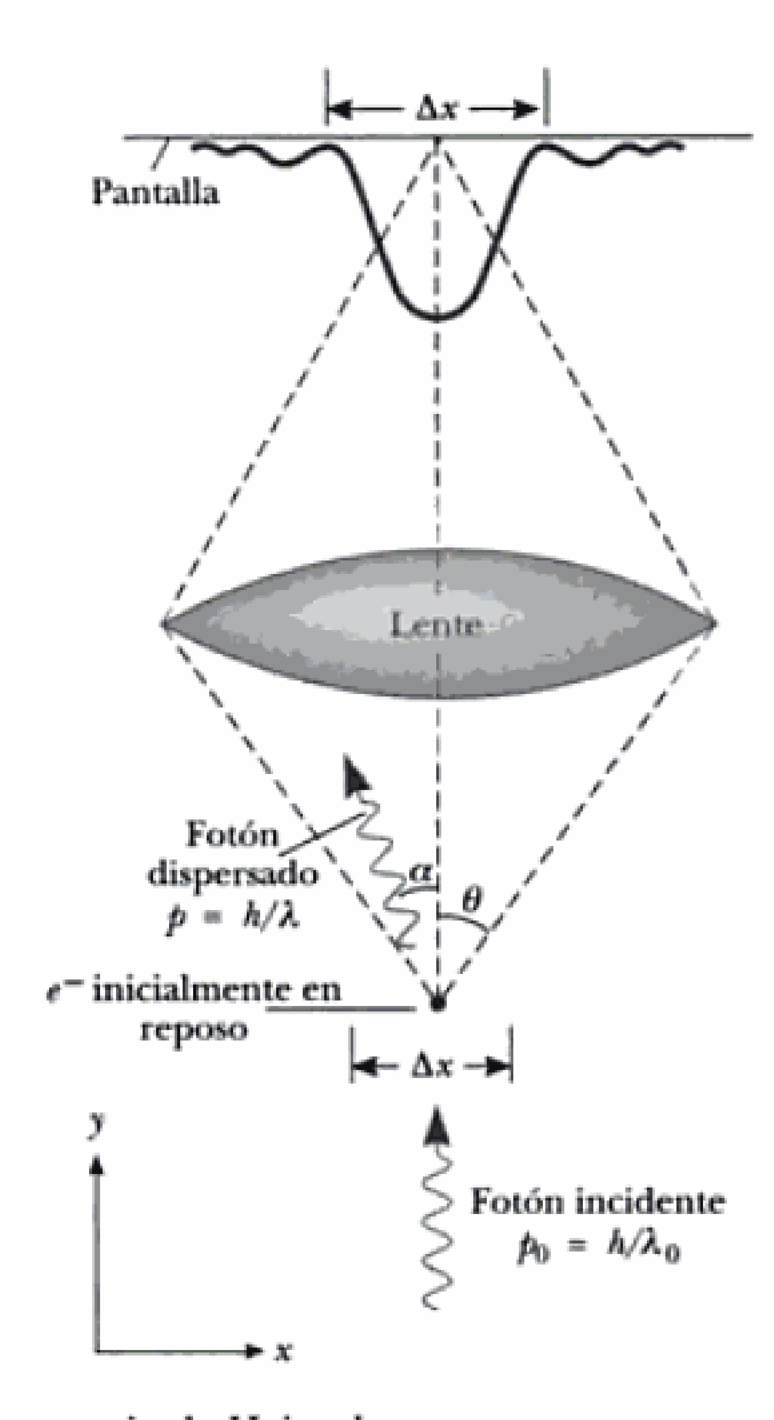


Figura 5.27 Microscopio de Heisenberg.

[5]El poder de resolución del microscopio se aborda con claridad en el libro de F.A. Jenkins y H.E. White, *Fundamentals of Optics*. 4a. edición, Nueva York, McGraw-Hill Book Co., 1976, pp. 332-334.

$$\Delta p_x \Delta x \approx \left(\frac{2h}{\lambda} \text{ sen } \theta\right)\left(\frac{\lambda}{2 \text{ sen } \theta}\right) = h$$

lo cual coincide con la relación de incertidumbre. ¡Observe también que este principio es ineludible e implacable! Si Δx se reduce aumentando θ o el tamaño de la lente, se obtiene un incremento equivalente en la incertidumbre de la cantidad de movimiento del electrón.

Un análisis de este simple experimento muestra varias propiedades físicas clave que conducen al principio de incertidumbre:

- La naturaleza indivisible de las partículas o los cuantos de luz (¡no puede usarse nada menor que un simple fotón!).
- La propiedad ondulatoria de la luz, como se demuestra en la difracción.
- La imposibilidad de predecir o medir la trayectoria clásica exacta de un solo fotón dispersado y, por tanto, de conocer la cantidad de movimiento exacta transferida al electrón.[6]

Esta sección concluye con algunos ejemplos de los tipos de cálculos que pueden realizarse con el principio de incertidumbre. En el espíritu de Fermi o Heisenberg, estos cálculos son sorprendentes por su sencillez y descripción esencial de los sistemas cuánticos, de los cuales se ignoran los detalles.

EJEMPLO 5.8 El principio de incertidumbre no cambia nada para objetos macroscópicos

a) Demuestre que la incertidumbre de velocidades provocada por el principio de incertidumbre no tiene consecuencias mensurables para objetos macroscópicos (objetos grandes en comparación con los átomos) al considerar una pelota de frontenis de 100 g confinada a una habitación de 15 m por lado. Suponga que la pelota se desplaza a 2 m/s a lo largo del eje *x*.

Solución

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2\,\Delta x} = \frac{1.05 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}}{2 \times 15\text{ m}} = 3.5 \times 10^{-36}\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$$

Así, la incertidumbre mínima en la velocidad está dada por

$$\Delta v_x = \frac{\Delta p_x}{m} = \frac{3.05 \times 10^{-36}\,\text{kg}\cdot\text{m/s}}{0.100\text{ kg}} = 3.5 \times 10^{-35}\text{ m/s}$$

Esto proporciona una incertidumbre relativa de

$$\frac{\Delta v_x}{v_x} = \frac{3.5 \times 10^{-35}}{2} = 1.8 \times 10^{-35}$$

que ciertamente no es mensurable.

b) Si la pelota se moviese de pronto a lo largo del eje *y* en dirección perpendicular a su bien definida trayectoria clásica a lo largo del eje *x*, ¿qué distancia recorrería en 1 s? Suponga que la pelota se mueve en la dirección *y* con la velocidad máxima en la distribución Δv_y producida por el principio de incertidumbre.

Solución Es importante darse cuenta que las relaciones de incertidumbre se cumplen en las direcciones *y* y *z*, así como en la dirección *x*. Esto significa que $\Delta p_x\, \Delta x \geq \hbar/2$, $\Delta p_y\, \Delta y \geq \hbar/2$ y $\Delta p_z\, \Delta z \geq \hbar/2$, y, como todas las incertidumbres de posición son iguales, todas las incertidumbres en la velocidad son iguales. En consecuencia, se tiene $\Delta v_y = 3.5 \times 10^{-35}$ m/s y la pelota se mueve 3.5×10^{-35} m en la dirección *y* en 1 s. De nuevo, esta distancia es inconmensurablemente pequeña, ¡equivalente a 10^{-20} veces el tamaño del núcleo!

Ejercicio 4 ¿En cuánto tiempo la pelota se desplazará 50 cm en la dirección *y*? (Se considera que la antigüedad del universo es de 15 billones de años; más o menos un billón de años).

[6] Los intentos para medir la posición del fotón utilizando electrones dispersados en un proceso de Compton sólo provocan que la trayectoria del electrón sea aún más incierta para la lente.

EJEMPLO 5.9 ¿Hay electrones dentro del núcleo?

Aplique el principio de incertidumbre para calcular la energía cinética de un electrón confinado dentro de un núcleo con un tamaño de 1×10^{-14} m.

Solución Al tomar Δx como el semiancho de la longitud de confinamiento en la ecuación $\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2\,\Delta x}$, se tiene

$$\Delta p_x \geq \frac{6.58 \times 10^{-16}\,\text{eV}\cdot\text{s}}{1 \times 10^{-14}\,\text{m}} \times \frac{3 \times 10^{8}\,\text{m/s}}{c}$$

o bien,

$$\Delta p_x \geq 2 \times 10^{7}\,\frac{\text{eV}}{c}$$

Esto significa que las mediciones de la componente de la cantidad de movimiento de los electrones atrapados dentro de un núcleo variarían desde menos de -20 MeV/c hasta más de 20 MeV/c, y que algunos electrones tendrían cantidades de movimiento por lo menos tan grandes como 20 MeV/c. Debido a que esto parece ser una cantidad de movimiento grande, para estar seguros se calcula la energía del electrón desde un punto de vista relativista.

$$\begin{aligned} E^2 &= p^2c^2 + (m_ec^2)^2 \\ &= (20\,\text{MeV}/c)^2c^2 + (0.511\,\text{MeV})^2 \\ &= 400(\text{MeV})^2 \end{aligned}$$

o bien,

$$E \geq 20\,\text{MeV}$$

Por último, la energía cinética de un electrón intranuclear es

$$K = E - m_ec^2 \geq 19.5\,\text{MeV}$$

Debido a que los electrones emitidos en una desintegración radiactiva del núcleo (desintegración beta) poseen energías mucho menores que 19.5 MeV (alrededor de 1 MeV o menos) y se sabe que ningún otro mecanismo puede llevarse la energía de un electrón intranuclear durante el proceso de desintegración, se concluye que los electrones observados en una desintegración beta no provienen del interior del núcleo, sino que en realidad aparecen en el instante de la desintegración.

EJEMPLO 5.10 El ancho de las líneas espectrales

Aunque un átomo excitado es capaz de radiar en cualquier momento desde $t = 0$ hasta $t = \infty$, el tiempo medio después de la excitación al que un grupo de átomos radía se denomina **vida** (tiempo de vida), τ, de un estado excitado particular. a) Si $\tau = 1 \times 10^{-8}$ s (un valor típico), use el principio de incertidumbre para calcular el ancho de línea Δf de luz emitida por el decaimiento de este estado excitado.

Solución Se usa $\Delta E\,\Delta t \approx \hbar/2$, donde ΔE es la incertidumbre en energía del estado excitado, y $\Delta t = 1 \times 10^{-8}$ s es el tiempo medio disponible para medir el estado excitado. Así,

$$\Delta E \approx \hbar/2\,\Delta t = \hbar/(2 \times 10^{-8}\,\text{s})$$

Debido a que ΔE también es la incertidumbre en energía de un fotón emitido cuando el estado excitado decae, y $\Delta E \approx h\Delta f$ para un fotón,

$$h\,\Delta f = \hbar/(2 \times 10^{-8}\,\text{s})$$

o bien,

$$\Delta f = \frac{1}{4\pi \times 10^{-8}\,\text{s}} = 8 \times 10^{6}\,\text{Hz}$$

b) Si la longitud de onda de la línea espectral implicada en este proceso es de 500 nm, encuentre el ensanchamiento fraccionario $\Delta f/f$.

Solución Primero, la frecuencia central de esta línea se encuentra como sigue:

$$f_0 = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^{8}\,\text{m/s}}{500 \times 10^{-9}\,\text{m}} = 6 \times 10^{14}\,\text{Hz}$$

Por tanto,

$$\frac{\Delta f}{f_0} = \frac{8 \times 10^{6}\,\text{Hz}}{6 \times 10^{14}\,\text{Hz}} = 1.3 \times 10^{-8}$$

El estrecho ancho natural de esta línea puede verse con un interferómetro sensible. Por lo general, no obstante, los efectos de temperatura y presión eclipsan el ancho natural de la línea y ensanchan la línea a través de mecanismos asociados con el efecto Doppler y colisiones atómicas.

Ejercicio 5 Use la fórmula Doppler no relativista para calcular el ensanchamiento Doppler de una línea de 500 nm emitida por un átomo de hidrógeno a 1 000 K. Considere que el átomo se mueve ya sea directamente hacia un observador, o en sentido opuesto, con una energía de $\frac{3}{2}k_BT$.

Respuesta 0.0083 nm, o bien 0.083 Å.

5.6 SI LOS ELECTRONES SON ONDAS, ¿QUÉ ES LO QUE OSCILA?

Aunque ya se analizó con cierto detalle el concepto de De Broglie sobre las ondas de materia, aún no se aborda la naturaleza exacta del campo $\Psi(x, y, z, t)$, o **función de onda,** que representa las ondas de materia. Este análisis se ha

postergado debido a que Ψ es más bien abstracta. En definitiva, Ψ *no es* una perturbación mensurable que requiera un medio de propagación como una onda acuática o una onda sonora. En vez de ello, lo que está oscilando no requiere de ningún medio. Además, Ψ suele representarse por un número complejo y se usa para calcular la probabilidad de encontrar a la partícula en un instante dado en un pequeño volumen del espacio. Si algo de esto le parece confuso, no se sienta descorazonado, ya que la naturaleza de la función de onda ha confundido a la gente desde su invención. Incluso, confundió a su inventor, Erwin Schrödinger, quien, de manera incorrecta, interpretó $\Psi^*\Psi$ como la densidad de carga eléctrica.[7] El gran filósofo de la teoría cuántica, Bohr, se opuso de inmediato a esta interpretación. Luego, a fines de 1926, Max Born ofreció el enfoque estadístico actualmente aceptado de $\Psi^*\Psi$. El estado confuso respecto a Ψ en esa época fue correctamente descrito en un poema por Walter Huckel:

Erwin with his psi can do
Calculations quite a few.
But one thing has not been seen
Just what does psi really mean?
(*Traducción al inglés de Felix Bloch*)

La opinión aceptada hoy día es que una partícula se describe por medio de una función $\Psi(x, y, z, t)$, denominada **función de onda.** La cantidad $\Psi^*\Psi = |\Psi|^2$ representa la probabilidad por unidad de volumen de encontrar a la partícula en un tiempo t en un pequeño volumen del espacio, centrado en (x, y, z). Los métodos para encontrar Ψ se abordarán con mucho mayor detalle en el capítulo 6; por el momento, se requiere la idea de que **la probabilidad de encontrar una partícula es directamente proporcional a $|\Psi|^2$.**

5.7 DUALIDAD ONDA-PARTÍCULA

Descripción de la difracción de electrones en términos de Ψ

En este capítulo y en capítulos previos se ha presentado evidencia tanto de las propiedades ondulatorias como de las propiedades corpusculares de los electrones. Históricamente, primero se conocieron las propiedades de las partículas y se relacionaron con una masa definida, una carga discreta y con la detección o localización del electrón en una pequeña región del espacio. Luego de estos descubrimientos se confirmó la naturaleza ondulatoria de los electrones en su dispersión a baja energía por cristales metálicos. En vista de tales resultados, y debido a la experiencia cotidiana de ver el mundo en términos *ya sea* de granos de arena *o* de ondas acuáticas difusas, es normal tener la tentación de simplificar el asunto y preguntar: "Bien, ¿el electrón es una onda o una partícula?". La respuesta es que **los electrones son muy delicados y más bien plásticos: se comportan ya sea como partículas o como ondas, dependiendo del tipo de experimento realizado con ellos. En cualquier caso, es imposible medir simultáneamente sus propiedades ondulatorias y corpusculares.**[8] La opinión de Bohr fue expresada en una idea denominada **complementariedad.** A pesar de ser tan distintos los puntos de vista ondulatorio y corpuscular, son necesa-

Complementariedad

[7] Ψ^* representa el complejo conjugado de Ψ. Por tanto, si $\Psi = a + ib$, entonces $\Psi^* = a - ib$. En forma exponencial, si $\Psi = Ae^{i\theta}$, entonces $\Psi^* = Ae^{-i\theta}$. Observe que $\Psi^*\Psi = |\Psi|^2$, a, b, A y θ son, todas, cantidades reales.

[8] Muchas personas sienten que la observación del mayor de los Bragg, originalmente hecha en relación con la luz, constituye una respuesta más satisfactoria: los electrones se comportan como ondas lunes, miércoles y viernes, como partículas martes, jueves y sábados, y como nada en absoluto los domingos.

rios y se complementan mutuamente para describir por completo al electrón. El punto de vista de Feynman[9] era que tanto los electrones como los fotones se comportan de una forma inimitable. Esto es como algo nunca antes visto, porque no vivimos a la muy pequeña escala de los átomos, los electrones y los fotones.

Quizá la mejor forma de cristalizar nuestras ideas respecto a la dualidad onda-partícula es considerar el experimento de difracción de electrones en una rendija doble. Este simple experimento aclara mucho el misterio de la paradoja onda-partícula; muestra la imposibilidad de medir *simultáneamente* las propiedades ondulatorias y corpusculares, e ilustra el uso de la función de onda, Ψ, al determinar efectos de interferencia. En la figura 5.28 se muestra un esquema del experimento con electrones monoenergéticos (de una sola longitud de onda). Un haz paralelo de electrones incide sobre una rendija doble, que tiene aberturas individuales mucho más pequeñas que D, de modo que los efectos de difracción en una sola rendija son despreciables. A una distancia de las rendijas mucho mayor que D se encuentra un detector de electrones capaz de detectar electrones individuales. Es importante observar que el detector siempre registra partículas discretas localizadas en el espacio y el tiempo. En un experimento real lo anterior puede lograrse si la fuente de electrones es suficientemente débil (vea la figura 5.29): **si el detector captura electrones en posiciones diferentes durante un tiempo lo bastante largo, en todos los casos se encuentra un típico patrón de interferencia de ondas para los conteos por minuto o la probabilidad de llegada de los electrones** (vea la figura 5.28). Si uno se imagina que un solo electrón produce "ondas" en fase en las rendijas, es posible aplicar la teoría ondulatoria normal para encontrar la separación

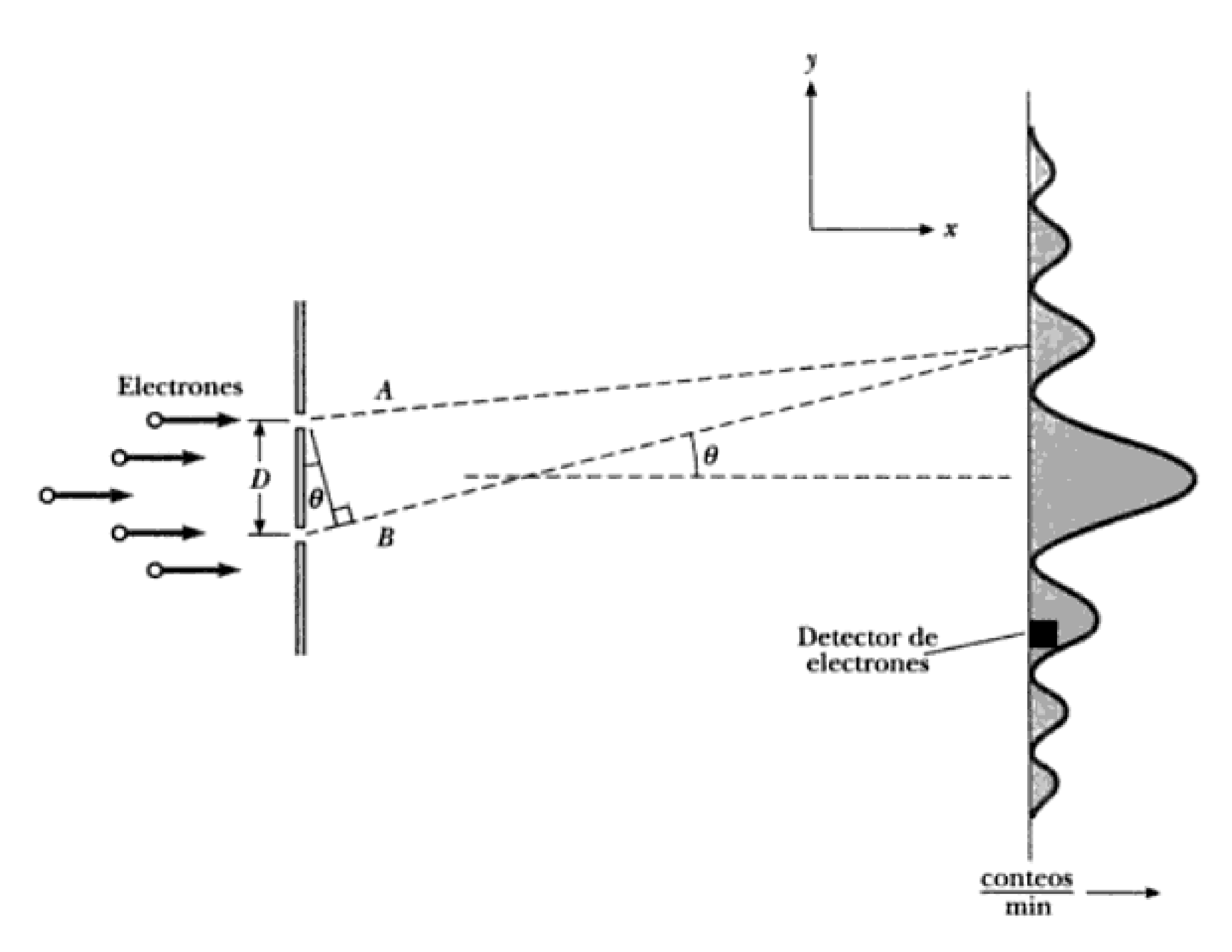


Figura 5.28 Difracción de un electrón. D es mucho mayor que los anchos individuales de las rendijas y mucho menor que la distancia entre las rendijas y el detector.

[9]R. Feynman, *The Character of Physical Law*, Cambridge, MA, MIT Press, 1982.

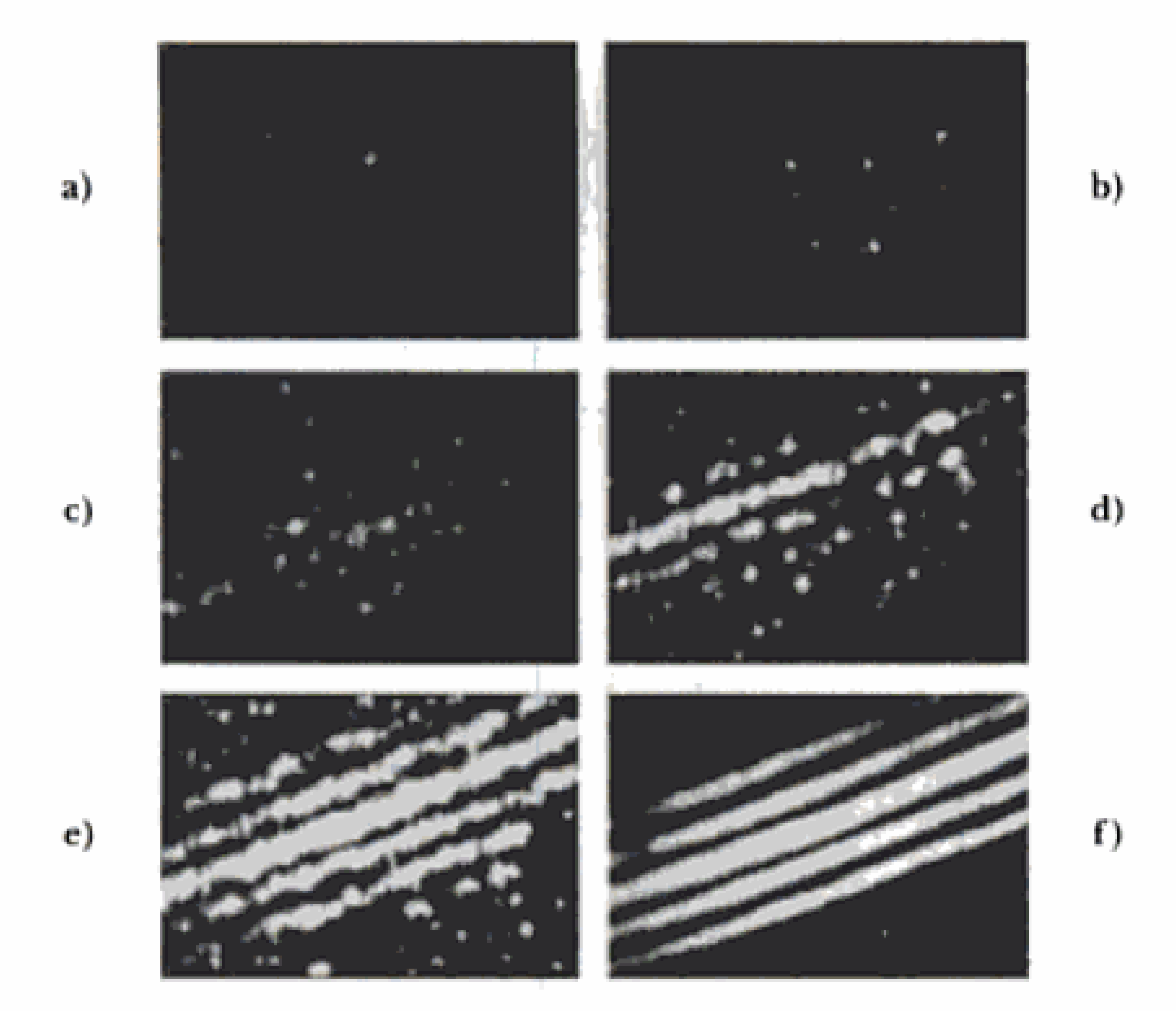


Figura 5.29 Acumulación gradual de franjas de interferencia después de la difracción de un número creciente de electrones. (*Tomado de P. G. Medi, G. F. Missiroli y G. Pozzi,* Am. J. of Phys. *44:306, 1976.*)

angular, θ, del máximo de probabilidad central desde su mínimo vecino. El mínimo ocurre cuando la diferencia en longitud de la trayectoria entre A y B en la figura 5.28 es la mitad de una longitud de onda, o bien,

$$D \operatorname{sen} \theta = \lambda/2$$

Ya que la longitud de onda de un electrón está dada por $\lambda = h/p_x$, se observa que

$$\operatorname{sen} \theta \approx \theta = \frac{h}{2p_x D} \qquad (5.35)$$

para θ pequeño. Así, puede verse que este experimento muestra claramente la naturaleza dual del electrón: **aunque los electrones son detectados como partículas en un punto localizado en algún instante dado, la probabilidad de llegar a ese punto está determinada por el hecho de encontrar la intensidad de dos ondas de materia que interfieren.**

Pero aún hay más. ¿Qué ocurre si durante el experimento se cubre una rendija? En este caso se obtiene una curva simétrica con un pico alrededor del centro de la rendija abierta, muy semejante al patrón que se forma al disparar balas a través de un orificio en una placa blindada. En la figura 5.30 se muestran gráficas de los conteos por minuto o de la probabilidad de llegada de los electrones con la rendija inferior o superior *cerrada*. Lo anterior se expresa como el cuadrado del valor absoluto de alguna función de onda, $|\Psi_1|^2 = \Psi_1{}^*\Psi_1$ o $|\Psi_2|^2 = \Psi_2{}^*\Psi_2$, donde Ψ_1 y Ψ_2 representan los casos del electrón que pasa por la rendija 1 y la rendija 2, respectivamente. Si ahora se realiza un experimento con la rendija 1 abierta y la rendija 2 cerrada durante el tiempo T y luego con la rendija 1 bloqueada y la rendija 2 abierta durante el tiempo T, el patrón de conteos acumulados por minuto es completamente diferente a

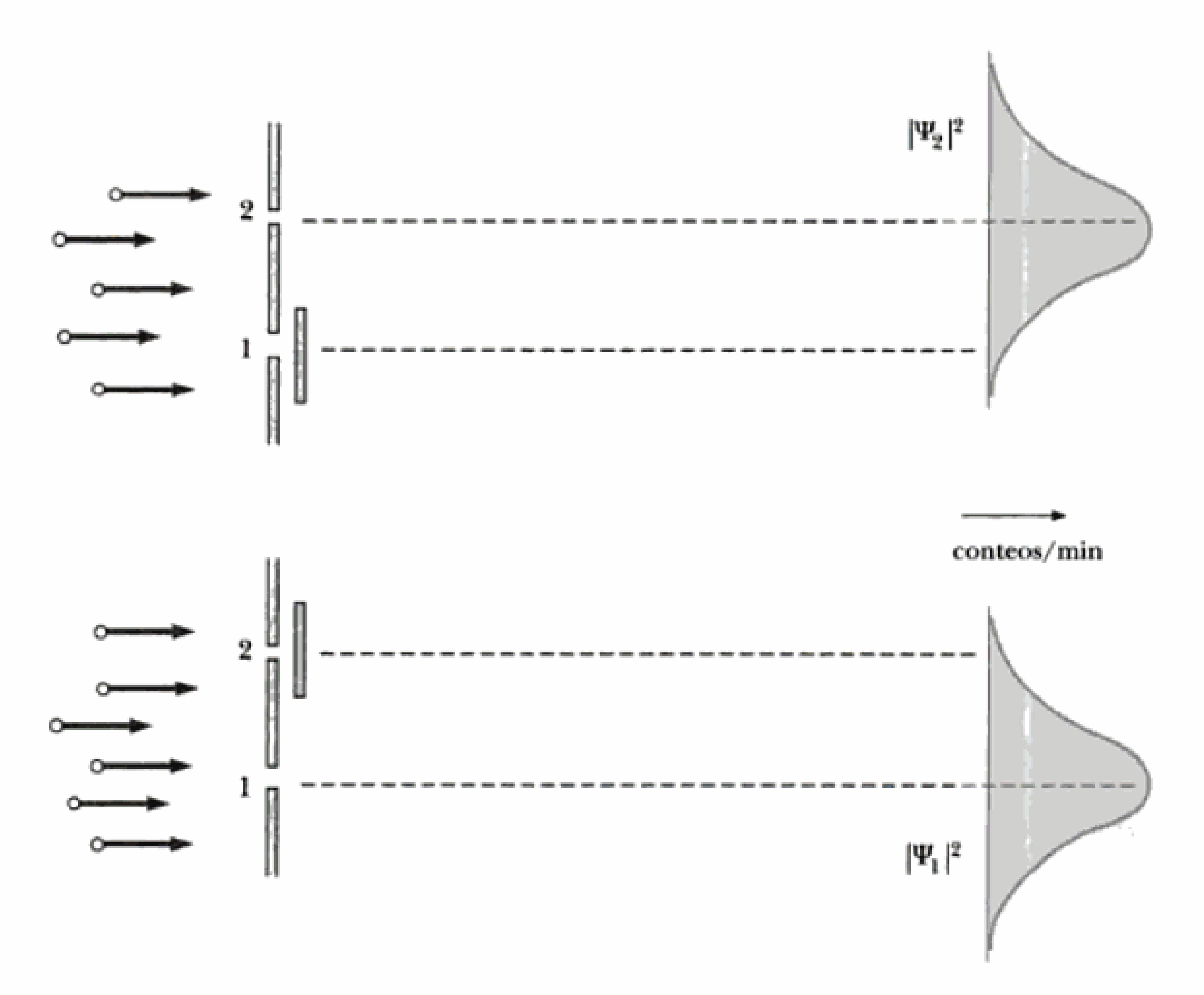


Figura 5.30 Probabilidad de encontrar electrones en la pantalla, ya sea con la rendija inferior o con la rendija superior cerradas.

cuando se tienen ambas rendijas abiertas. Observe en la figura 5.31 que ya no hay ninguna probabilidad máxima de llegada de un electrón en $\theta = 0$. De hecho, **se ha perdido el patrón de interferencia y el resultado acumulado es simplemente la suma de los resultados individuales.** Los resultados que se indican mediante las curvas negras en la figura 5.31 son más fáciles de comprender y más razonables que los efectos de interferencia que se observan cuando ambas rendijas están abiertas (curva gris). Cuando sólo está abierta una rendija a la vez, se sabe que el electrón posee la misma localizabilidad e indivisibilidad en las rendijas que como se mide en el detector, debido a que es claro que el electrón pasa por la rendija 1 o por la rendija 2. Así, es necesario analizar el total como la suma de aquellos electrones que pasan por la rendija 1, $|\Psi_1|^2$, y aquellos que pasan por la rendija 2, $|\Psi_2|^2$. Cuando ambas rendijas están abiertas, es tentador suponer que el electrón pasa por la rendija 1 o por la rendija 2 y que, de nuevo, los conteos por minuto están dados por $|\Psi_1|^2 = |\Psi_2|^2$. Se sabe, no obstante, que los resultados experimentales contradicen esto. Así, suponer que el electrón está localizado y que pasa sólo por una rendija cuando ambas están abiertas debe ser errónea (¡una conclusión dolorosa!). De alguna manera, para que el electrón muestre interferencia, debe estar presente simultáneamente en ambas rendijas.

Para encontrar la probabilidad de detectar al electrón en un punto particular sobre la pantalla con ambas rendijas abiertas, puede decirse que el electrón se encuentra en un *estado de superposición* dado por

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$$

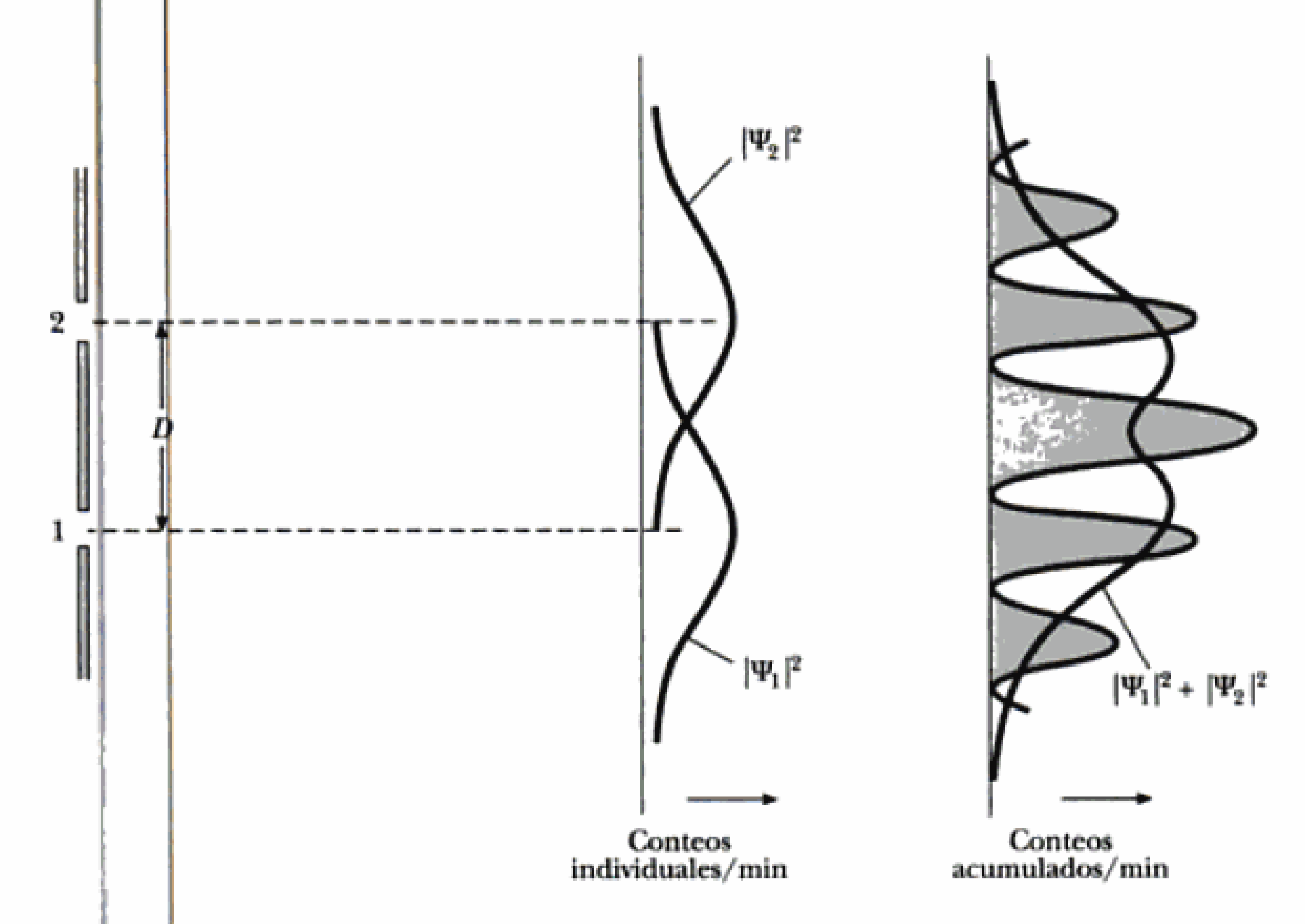


Figura 5.31 Resultados acumulados del experimento de difracción del electrón con doble rendija, donde cada rendija permanece cerrada la mitad del tiempo. Para efectos de comparación, se muestran grises los resultados con ambas rendijas abiertas.

Así, la probabilidad de detectar el electrón en la pantalla es igual a la cantidad $|\Psi_1 + \Psi_2|^2$ y no a $|\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2$. Debido a que, en general, las ondas de materia que empiezan fuera de fase en las rendijas recorren distancias diferentes hasta la pantalla (vea la figura 5.28), Ψ_1 y Ψ_2 poseen una diferencia de fase relativa ϕ en la pantalla. Usando un diagrama de fase (figura 5.32) para encontrar $|\Psi_1 + \Psi_2|^2$, de inmediato se llega a

$$|\Psi|^2 = |\Psi_1 + \Psi_2|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + 2|\Psi_1||\Psi_2| \cos\phi$$

Observe que el término $2|\Psi_1||\Psi_2| \cos \phi$ es un término de interferencia que predice el patrón de interferencia que se observa realmente en este caso. Para facilitar la comparación, en la tabla 5.1 se proporciona un resumen de los resultados que se encuentran en ambos casos.

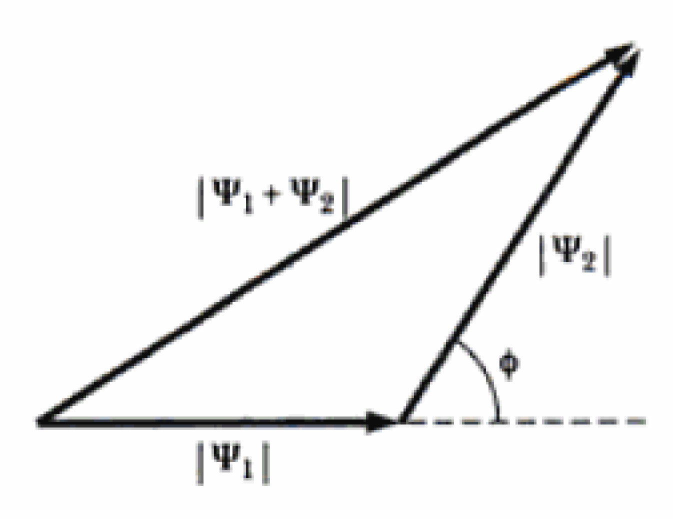


Figura 5.32 Diagrama de fase para representar la suma de dos funciones de onda complejas, Ψ_1 y Ψ_2, cuya diferencia de fase es ϕ.

Tabla 5.1

Caso	Función de onda	Conteos/min en la pantalla
El electrón se mide al pasar por la rendija 1 o por la rendija 2	Ψ_1 o Ψ_2	$\|\Psi_1\|^2 + \|\Psi_2\|^2$
No se hace ninguna medición del electrón en las rendijas	$\Psi_1 + \Psi_2$	$\|\Psi_1\|^2 + \|\Psi_2\|^2 + 2\|\Psi_1\|\|\Psi_2\| \cos\phi$

Experimento conceptual: medición de la rendija por la cual pasa el electrón

Otra forma de considerar el experimento de doble rendija del electrón es decir que el electrón pasa por la rendija superior o inferior sólo cuando *uno mide* que lo hace. Una vez que se mide sin ambigüedad por cuál rendija pasa el electrón (sí, adivinó, . . . aquí viene de nuevo el principio de incertidumbre . . .), el acto mismo de medir perturba lo suficiente la trayectoria del electrón como para destruir el delicado patrón de interferencia.

A continuación se considerará de nuevo el experimento de doble rendija para ver en detalle cómo se destruye el patrón de interferencia.[10] Para determinar por cuál rendija pasa el electrón, imagine que justo detrás de las rendijas se coloca un grupo de partículas, como se muestra en la figura 5.33. Si se utiliza el retroceso de una pequeña partícula para determinar la rendija por la que pasa el electrón, debe tenerse la incertidumbre en la detección de la

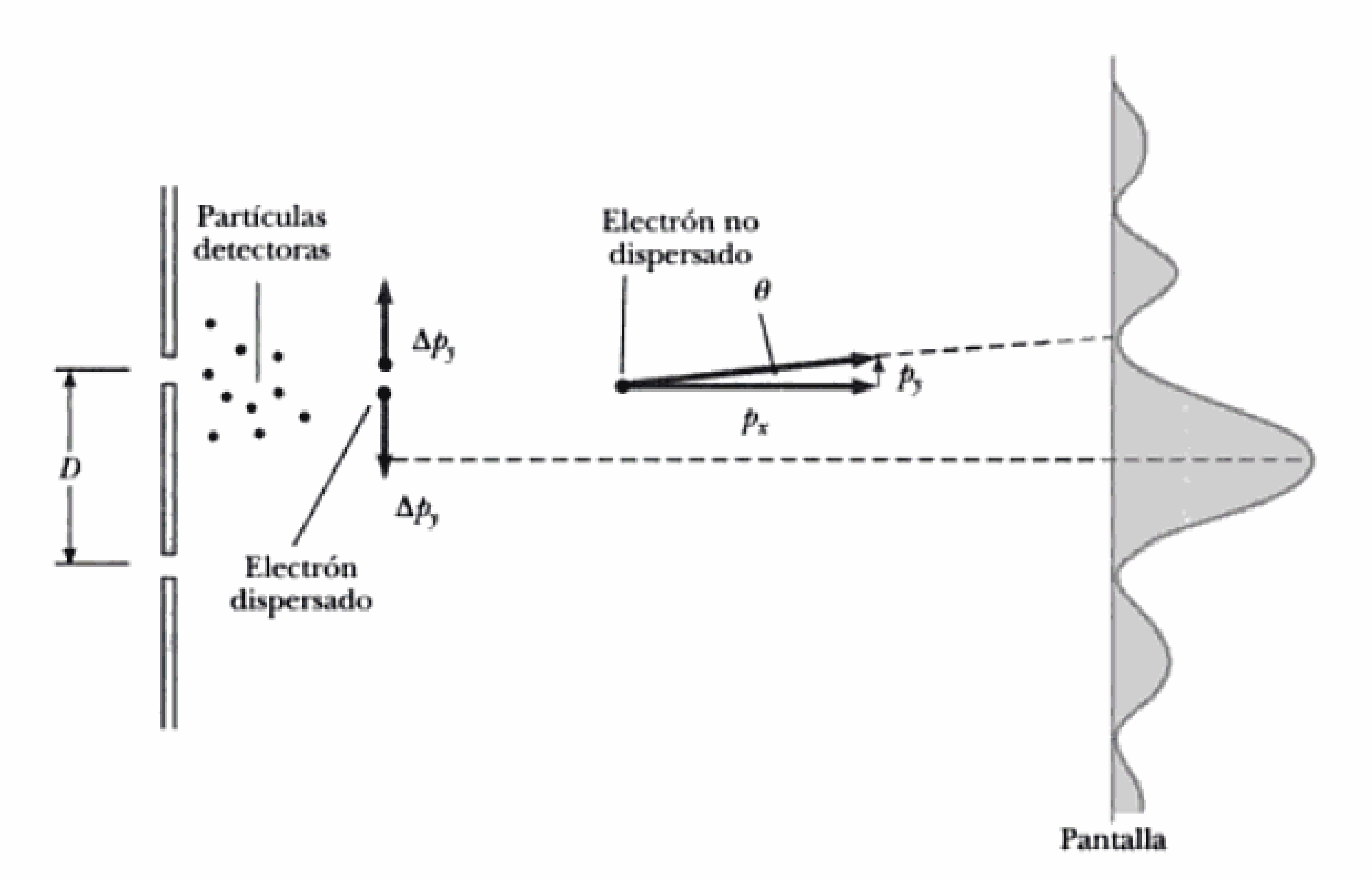


Figura 5.33 Experimento conceptual para determinar cuál es la rendija por la que pasa el electrón.

[10]Aunque aquí el principio de incertidumbre se usará en su forma normal, merece la pena señalar que un planteamiento alternativo de dicho principio implica el crucial experimento de la rendija doble: *Es imposible diseñar cualquier dispositivo para determinar por cuál rendija pasa el electrón sin que aquél perturbe al mismo tiempo al electrón y destruya el patrón de interferencia.*

posición de la partícula, $\Delta y \ll D$. También, durante la colisión la partícula detectora sufre un cambio en su cantidad de movimiento, Δp_y, igual y opuesto al cambio en la cantidad de movimiento experimentado por el electrón, como se muestra en la figura 5.33. A partir de la ecuación 5.35, un electrón no desviado que llega al primer mínimo *y produce un patrón de interferencia* cumple

$$\tan\theta \approx \theta = \frac{p_y}{p_x} = \frac{h}{2p_x D}$$

Así, para que el patrón de interferencia no esté distorsionado se requiere que un electrón dispersado por una partícula detectora tenga

$$\frac{\Delta p_y}{p_x} \ll \theta = \frac{h}{2p_x D}$$

o bien

$$\Delta p_y \ll \frac{h}{2D}$$

Debido a que el cambio en la cantidad de movimiento del electrón dispersado es igual al cambio en la cantidad de movimiento de la partícula detectora, $\Delta p_y \ll h/2D$ también es válida para la partícula detectora. Así, para esta partícula se tiene

$$\Delta p_y \Delta y \ll \frac{h}{2D} \cdot D$$

o bien

$$\Delta p_y \Delta y \ll \frac{h}{2}$$

Lo anterior es una violación evidente del principio de incertidumbre. Por tanto, se ve que **las pequeñas incertidumbres necesarias, tanto para observar interferencia como para saber por cuál rendija pasa el electrón, son imposibles, ya que violan el principio de incertidumbre.** Si Δy es suficientemente pequeño para determinar por cuál rendija pasa el electrón, Δp_y es tan grande que los electrones dirigidos hacia el primer mínimo se dispersan en máximos adyacentes y el patrón de interferencia se destruye.

Ejercicio 6 En un experimento real es probable que algunos electrones escapen a las partículas detectoras. Así, en realidad se tendrían dos categorías de electrones que llegan al detector: aquellos que son medidos pasando por una rendija definida y los que no es posible observar, o simplemente que no se registran, en las rendijas. En este caso, ¿qué tipo de patrón de conteos por minuto debe acumularse en el detector?

Respuesta Se obtiene una mezcla de un patrón de interferencia $|\Psi_1 + \Psi_2|^2$ (los no medidos) y $|\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2$ (los medidos).

5.8 NOTA FINAL

Alguna vez los científicos consideraron que el mundo estaba constituido de partes distintas e inmutables interactuando de acuerdo con las leyes de causa y efecto estrictamente deterministas. En el límite clásico, lo anterior es fundamentalmente correcto porque los procesos clásicos implican tal cantidad de cuantos que las desviaciones con respecto al promedio son imperceptibles. A nivel atómico, no obstante, se ha visto que una pieza de materia dada (un electrón, por ejemplo) no es una parte distinta e inmutable del universo que se rige por completo por leyes deterministas. Esta partícula presenta propiedades ondulatorias cuando interactúa con un cristal metálico y propiedades corpusculares poco después, cuando se registra en un contador Geiger. Así, en vez de considerar al electrón como una parte distinta y separada del universo con una naturaleza corpuscular intrínseca, se llegó a considerar que el electrón y, de hecho, todas las partículas son entidades amorfas que poseen el potencial de realizar ciclos interminables entre un comportamiento ondulatorio y uno corpuscular. También se encuentra que a nivel atómico es mucho más difícil separar el objeto medido del instrumento de medición, ya que el tipo de instrumento de medición determina si se observan propiedades ondulatorias o propiedades de partícula.

RESUMEN

Todo terrón de materia de masa m y cantidad de movimiento p posee propiedades ondulatorias con una longitud de onda dada por la relación de De Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{5.1}$$

Al aplicar esta teoría ondulatoria de la materia a electrones en los átomos, De Broglie pudo explicar la aparición de enteros en ciertas órbitas de Bohr como una consecuencia natural de la interferencia de ondas electrónicas. En 1927, Davisson y Germer demostraron directamente la naturaleza ondulatoria de los electrones al probar que, a baja energía, los electrones eran difractados por cristales simples de níquel. Además, confirmaron la ecuación 5.1.

Aunque la longitud de onda de las ondas de materia puede determinarse en forma experimental, es importante comprender que éstas no son justamente como otras ondas porque su frecuencia y velocidad de fase no pueden medirse de manera directa. En particular, la velocidad de fase de una onda de materia individual es mayor que la velocidad de la luz y varía con la longitud de onda o con los números de onda según

$$v_{\text{p}} = f\lambda = \left(\frac{E}{h}\right)\left(\frac{h}{p}\right) = c\left[1 + \left(\frac{mc}{\hbar k}\right)^2\right]^{1/2} \tag{5.24}$$

Para representar adecuadamente una partícula, es necesario elegir una superposición de ondas de materia con diferentes longitudes de onda, amplitudes y fases que interfiera en forma constructiva sobre una región limitada del espacio. Luego, puede demostrarse que el paquete o grupo de ondas resultante se desplaza a la misma velocidad que la partícula clásica. Además, un paquete de ondas localizado en una región Δx contiene un intervalo de números de onda Δk, donde $\Delta x\, \Delta k \geq \frac{1}{2}$. Debido a que $p_x = \hbar k$, lo anterior implica que existe un principio de incertidumbre para la posición y la cantidad de movimiento:

$$\Delta p_x\, \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \tag{5.31}$$

De manera semejante puede demostrarse que existe una relación de incertidumbre energía-tiempo, dada por

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \tag{5.34}$$

En mecánica cuántica las ondas de materia se representan por una función de onda $\Psi(x, y, z, t)$. La probabilidad de encontrar una partícula representada por Ψ en un pequeño volumen centrado en (x, y, z) en el tiempo t es proporcional a $|\Psi|^2$. La dualidad onda-partícula de los electrones puede verse al considerar el paso de éstos por rendijas estrechas y su llegada a una pantalla de observación. Se encuentra que, aunque los electrones son detectados como partículas en un punto localizado sobre la pantalla, la probabilidad de llegada a ese punto está determinada por el hecho de encontrar la intensidad de dos ondas de materia que interfieren.

Aunque en este capítulo se abordó la importancia de las ondas de materia o de las funciones de onda, no se proporcionó ningún método para encontrar Ψ para un sistema físico dado. En el capítulo siguiente se introduce la ecuación de onda de Schrödinger. Las soluciones de esta importante ecuación diferencial constituyen las funciones de onda de un sistema dado.

BIBLIOGRAFÍA ADICIONAL SUGERIDA

1. D. Bohm, *Quantum Theory*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1951. En los capítulos 3 y 6 de este libro se proporciona una explicación excelente de los paquetes de ondas y de la dualidad onda-partícula de la materia a un nivel más avanzado.
2. R. Feynman, *The Character of Physical Law*, Cambridge, MA, The MIT Press, 1982, capítulo 6. Esta monografía, presentada en el estilo inimitable de Feynman, trata de una manera increíblemente amena e interesante el experimento de la rendija doble.
3. B. Hoffman, *The Strange Story of the Quantum*, Nueva York, Dover Publications, 1959. Este breve libro presenta un análisis no matemático, elegantemente escrito, de la historia de la mecánica cuántica.

PREGUNTAS

1. La luz, ¿es una onda o una partícula? Sustente su respuesta presentando evidencia experimental específica.
2. Un electrón, ¿es una partícula o una onda? Sustente su respuesta presentando algunos resultados experimentales.
3. Un electrón y un protón son acelerados desde el reposo a través de la misma diferencia de potencial. ¿Qué partícula posee la longitud de onda más larga?
4. Si la materia posee una naturaleza ondulatoria, ¿por qué ésta no es observable en nuestras experiencias cotidianas?
5. ¿De qué formas el modelo del hidrógeno de Bohr viola el principio de incertidumbre?
6. ¿Por qué es imposible medir en forma simultánea la posición y la velocidad de una partícula con una precisión infinita?
7. Suponga que un haz de electrones incide sobre tres o más rendijas. ¿Cómo afecta este hecho al patrón de interferencia? El estado del electrón, ¿depende del número de rendijas? Explique su respuesta.
8. Al describir el paso de electrones, a través de una rendija, hasta llegar a una pantalla, Feynman afirmó que "los electrones llegan en terrones, como partículas, pero la probabilidad de su llegada es determinada al igual que la intensidad de las ondas. Es en este sentido que algunas veces el electrón se comporta como una partícula y algunas veces lo hace como una onda". Detalle este punto con sus propias palabras. (Para un análisis más profundo sobre esta cuestión, vea el libro de R. Feynman, *The Character of Physical Law*, Cambridge, MA, MIT Press, 1982, capítulo 6.)
9. ¿Considera usted que la mayor parte de los descubrimientos experimentales más importantes han ocurrido debido a una planificación cuidadosa o por accidente? Cite ejemplos.
10. En el caso de descubrimientos por accidente, ¿qué características debe tener quien experimenta para capitalizar su descubrimiento?
11. Las partículas, ¿son cosas uniformes? Una opinión extrema de la plasticidad de los electrones y otras partículas

se expresa en esta famosa cita de Heisenberg: "La partícula elemental invisible de la física moderna no posee más la propiedad de ocupar algún espacio que de tener propiedades como color o solidez. Fundamentalmente, no es una estructura material en el espacio y el tiempo, sino sólo un símbolo que permite expresar las leyes de la naturaleza en una forma especialmente sencilla".

¿Está usted satisfecho al considerar la ciencia como un conjunto de reglas productivas o prefiere considerarla como la descripción de un mundo objetivo de cosas: en el caso de la física de partículas, de cosas pequeñas y a pequeña escala? ¿Qué problemas se asocian con cada punto de vista?

PROBLEMAS

5.1 Ondas piloto de De Broglie

1. Calcule la longitud de onda de De Broglie para un protón que se mueve a una velocidad de 10^6 m/s.
2. Calcule la longitud de onda de De Broglie para un electrón con una energía cinética de a) 50 eV y b) 50 keV.
3. Calcule la longitud de onda de De Broglie para una persona de 74 kg que corre a una velocidad de 5 m/s.
4. La capacidad de "ver", o resolución, de la radiación es determinada por su longitud de onda. Si un átomo tiene un tamaño de 0.1 nm, ¿cuán rápido debe moverse un electrón a fin de tener una longitud de onda lo suficientemente pequeña como para "ver" un átomo?
5. Para "observar" objetos pequeños se mide la difracción de partículas cuya longitud de onda de De Broglie es aproximadamente igual al tamaño del objeto. Encuentre la energía cinética (en electrón-volts) necesaria para que los electrones resuelvan a) una gran molécula orgánica con un tamaño de 10 nm, b) particularidades atómicas de 0.01 nm de tamaño y c) un núcleo de 10 fm de tamaño. Repita estos cálculos usando partículas alfa en vez de electrones.
6. Un electrón y un fotón poseen, cada uno, una energía cinética igual a 50 keV. ¿Cuáles son sus longitudes de onda de De Broglie?
7. Calcule la longitud de onda de De Broglie de un protón que es acelerado a través de una diferencia de potencial de 10 MV.
8. Demuestre que la longitud de onda de De Broglie de un electrón acelerado desde el reposo a través de una pequeña diferencia de potencial V está dada por $\lambda = 1.226/\sqrt{V}$, donde λ está en nanómetros y V está en volts.
9. Encuentre la longitud de onda de De Broglie de una pelota de 0.20 kg de masa justo antes de chocar contra la Tierra, luego de dejarla caer desde un edificio de 50 m de altura.
10. La longitud de onda de De Broglie de un electrón es igual al diámetro de un átomo de hidrógeno. ¿Cuál es la energía cinética del electrón? ¿Cómo se compara esta energía con la energía del estado fundamental del átomo de hidrógeno?
11. Para confinar un electrón en un núcleo, su longitud de onda de De Broglie debe ser menor que 10^{-14} m. a) Cuál debe ser la energía cinética de un electrón confinado en esta región? b) Con base en este resultado, ¿esperaría encontrar un electrón en un núcleo? Explique su respuesta.
12. ¿Qué diferencia de potencial es necesaria para acelerar un electrón para que adquiera una longitud de onda de De Broglie igual a 1×10^{-10} m?

5.2 Experimento de Davisson-Germer

13. En la figura P5.13 se muestran los tres planos superiores de un cristal, con una separación entre planos igual a d. Si $2d \text{ sen } \theta = 1.01\lambda$ para las dos ondas que se muestran y electrones de alta energía y longitud de onda λ penetran muchos planos de profundidad en el cristal, ¿qué plano atómico produce una onda que cancela la reflexión superficial? Éste es un ejemplo de cómo, en el caso de difracción de electrones de alta energía, se forman máximos extremadamente estrechos; es decir, no hay haces difractados a menos que $2d \text{ sen } \theta$ sea igual a un número entero de longitudes de onda.

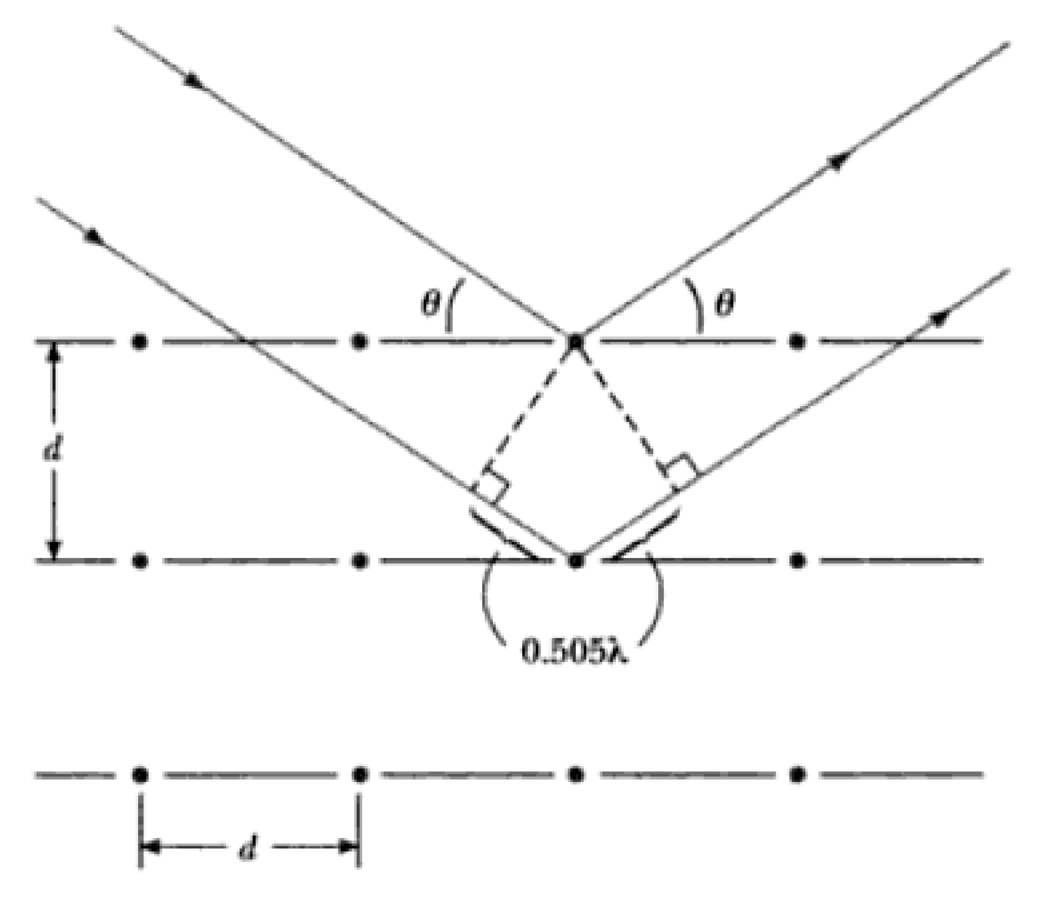


Figura P5.13

14. a) Demuestre que la fórmula para la difracción de electrones de baja energía (LEED, por sus siglas en inglés), cuando éstos inciden perpendicularmente contra una superficie cristalina, puede escribirse como

$$\text{sen}\phi = \frac{nhc}{d(2m_e c^2 K)^{1/2}}$$

donde n es el orden del máximo, d es la separación atómica, m_e es la masa del electrón, K es la energía cinética del electrón y ϕ es el ángulo entre los haces incidente y refractado. b) Calcule la separación atómica en un

cristal que tiene máximos de difracción consecutivos a $\phi = 24.1°$ y $\phi = 54.9°$ para electrones a 100 eV.

5.3 Grupos de ondas y dispersión

15. Demuestre que la velocidad de grupo para un electrón libre no relativista también está dada por $v_g = p/m_e = v_0$, donde v_0 es la velocidad del electrón.

16. Cuando se arroja un guijarro a un estanque, un pulso de onda circular se propaga hacia afuera de la perturbación. Si usted está alerta, verá una estructura fina en el pulso, que consta de rizos superficiales que se mueven hacia adentro a través de la perturbación circular. Explique este efecto en términos de fase y de las velocidades de grupo y de fase si la velocidad de fase de los rizos está dada por $v_p = \sqrt{2\pi S/\lambda\rho}$, donde S es la tensión superficial y ρ es la densidad del líquido.

17. La relación de dispersión para ondas de un electrón libre relativista es

$$\omega(k) = \sqrt{c^2k^2 + (m_ec^2/\hbar)^2}$$

Obtenga expresiones para la velocidad de fase v_p y la velocidad de grupo v_g de estas ondas y demuestre que su producto es una constante independiente de k. A partir de su resultado, ¿qué puede concluir respecto a v_g si $v_p > c$?

5.5 Principio de incertidumbre de Heisenberg

18. Una pelota de 50 g de masa se mueve con una velocidad de 30 m/s. Si su velocidad se mide con una exactitud hasta de 0.1%, ¿cuál es la incertidumbre mínima en su posición?

19. La energía cinética de un protón es 1 MeV. Si su cantidad de movimiento se mide con una incertidumbre del 5.0%, ¿cuál es la incertidumbre mínima en su posición?

20. Se desea medir simultáneamente la longitud de onda y la posición de un fotón. Suponga que la medición de la longitud de onda proporciona $\lambda = 6\,000$ Å con una exactitud de una parte en un millón; es decir, $\Delta\lambda/\lambda = 10^{-6}$. ¿Cuál es la incertidumbre mínima en la posición del fotón?

21. Una mujer en una escalera deja caer perdigones pequeños hacia un punto en el piso. a) Demuestre que, según el principio de incertidumbre, la distancia de fallo debe ser por lo menos

$$\Delta x = \left(\frac{\hbar}{2m}\right)^{1/2}\left(\frac{H}{2g}\right)^{1/4}$$

donde H es la altura inicial de cada perdigón por arriba del nivel del piso y m es la masa de cada perdigón. b) Si $H = 2$ m y $m = 0.50$ g, ¿cuál es Δx?

22. Un haz de electrones incide sobre una rendija de ancho variable. Si es posible medir una diferencia de 1% en la cantidad de movimiento, ¿qué ancho de rendija es necesario para resolver el patrón de interferencia de los electrones si la energía cinética de éstos es a) 0.010 MeV, b) 1 MeV y c) 100 MeV?

23. Suponga que Fuzzy, un pato mecánico cuántico, vive en un mundo donde $h = 2\pi$ J·s. Fuzzy tiene una masa de 2 kg y se sabe que inicialmente está en el interior de una región que mide 1 m de ancho. a) ¿Cuál es la incertidumbre mínima en su velocidad? b) Suponiendo que esta incertidumbre en cuanto a la velocidad prevalece durante 5 s, determine la incertidumbre en la posición después de este tiempo.

24. Un electrón cuya cantidad de movimiento es p está a una distancia r de un protón estacionario. La energía cinética del sistema es $K = p^2/2m_e$, y su energía potencial es $U = -ke^2/r$. Su energía total es $E = K + U$. Si el electrón está ligado al protón formando un átomo de hidrógeno, su posición media está en el protón, pero la incertidumbre en su posición es aproximadamente igual al radio, r, de su órbita. La cantidad de movimiento media del electrón será cero, pero la incertidumbre en su cantidad de movimiento estará dada por el principio de incertidumbre. Considere al átomo como un sistema unidimensional en lo siguiente: a) Calcule la incertidumbre en la cantidad de movimiento del electrón en términos de r. b) Calcule las energías cinética, potencial y total en términos de r. c) El valor real de r es el que minimiza la energía total, lo que resulta en un átomo estable. Encuentre el valor de r y la energía total resultante. Compare su respuesta con las predicciones de la teoría de Bohr.

25. Un núcleo excitado con una vida de 0.100 ns emite un rayo γ con una energía de 2 MeV. ¿Es posible medir directamente el ancho de energía (incertidumbre en la energía, ΔE) de esta línea de emisión γ de 2 MeV si los mejores detectores gamma son capaces de medir energías hasta de ± 5 eV?

26. En la figura P5.26 se muestran mediciones típicas de la masa de una partícula delta subatómica ($m \approx 1\,230$ MeV/c^2). Aunque la vida de la partícula delta es demasiado breve para medirla directamente, es posible calcularla a partir del principio de incertidumbre energía-tiempo. Calcule el tiempo de vida a partir del ancho completo a la mitad del máximo de la distribución de la medición de masa que se muestra.

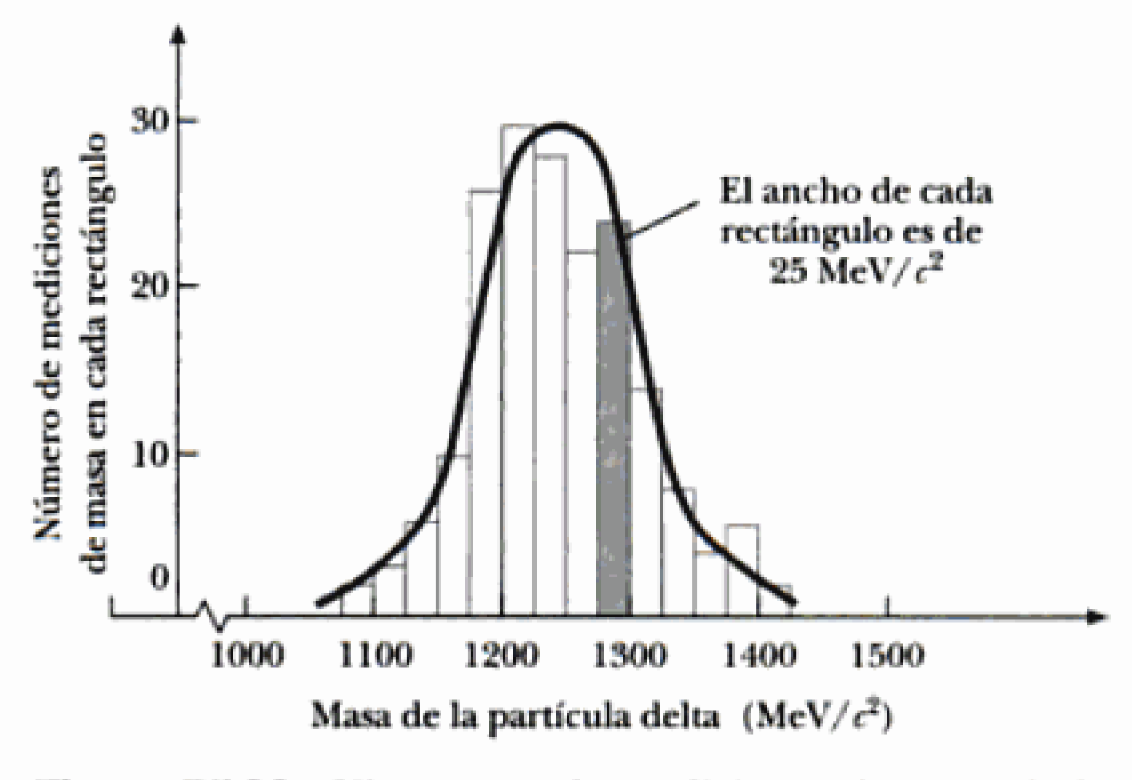


Figura P5.26 Histograma de mediciones de masa de la partícula delta.

5.7 Dualidad onda-partícula

27. Un haz de electrones monoenergético incide sobre una sola rendija de 0.50 nm de ancho. Un patrón de di-

fracción se forma sobre una pantalla que está a 20 cm de la rendija. Si la distancia entre mínimos consecutivos del patrón de difracción es 2.1 cm, ¿cuál es la energía de los electrones incidentes?

28. Un haz de neutrones con una velocidad seleccionada de 0.40 m/s se hace pasar a través de una rendija doble con una separación de 1 mm. A 10 cm de la rendija se coloca un arreglo de detectores. a) ¿Cuál es la longitud de onda de De Broglie de los neutrones? b) ¿Cuán lejos del eje se encuentra el primer punto de intensidad cero sobre el arreglo de los detectores? c) ¿Es posible decir por cuál rendija pasa cualquier neutrón en particular? Explique su respuesta.

29. Se realiza un experimento de difracción de electrones con doble rendija con rendijas de anchos *distintos*. Cuando sólo está abierta la rendija 1, el número de electrones por segundo que llega a la pantalla es 25 veces el número de electrones por segundo que llega a la pantalla cuando sólo está abierta la rendija 2. Cuando ambas rendijas están abiertas, se obtiene un patrón de interferencia donde la interferencia destructiva no está completa. Encuentre la razón de la probabilidad de que un electrón llegue a un máximo de interferencia a la probabilidad de que un electrón llegue a un mínimo de interferencia adyacente. (*Sugerencia*: Aplique el principio de superposición.)

PROBLEMAS ADICIONALES

30. Robert Hofstadter ganó el premio Nobel de física en 1961 por su trabajo pionero sobre la dispersión de electrones de 20 GeV por núcleos. a) ¿Cuál es el factor γ para un electrón a 20 GeV, donde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$? ¿Cuál es la cantidad de movimiento del electrón en $\text{kg} \cdot \text{m/s}$? b) ¿Cuál es la longitud de onda de un electrón a 20 GeV y cómo se compara con el tamaño de un núcleo?

31. Se utiliza un rifle de aire para disparar partículas de 1 g a 100 m/s a través de un orificio de 2 mm de diámetro. ¿A qué distancia del rifle debe estar un observador para ver que el haz se dispersa 1 cm debido al principio de incertidumbre? Compare esta respuesta con el diámetro del universo (2×10^{26} m).

32. Un átomo en un estado excitado 1.8 eV por arriba del estado fundamental permanece así durante 2 μs antes de pasar este último. Encuentre a) la frecuencia del fotón emitido, b) su longitud de onda y c) su incertidumbre en energía aproximada.

33. Un mesón π^0 es una partícula inestable que se produce en colisiones de partículas a alta energía. Posee un equivalente masa-energía de alrededor de 135 MeV, y su vida media es de sólo 8.7×10^{-17} s antes de desintegrarse en dos rayos γ. Use el principio de incertidumbre para calcular la incertidumbre fraccionaria $\Delta m/m$ en la determinación de su masa.

34. a) Encuentre y grafique el contenido espectral del pulso rectangular de ancho 2τ que se muestra en la figura

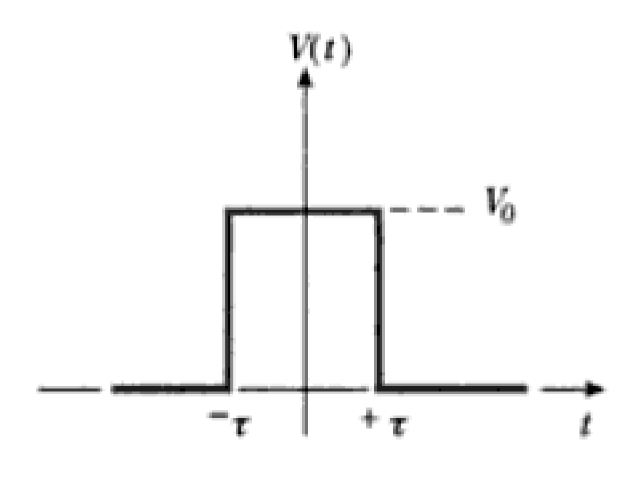


Figura P5.34

P5.34. b) Demuestre que en este caso se cumple una relación de reciprocidad $\Delta\omega\, \Delta t \approx \pi$. Tome $\Delta t = \tau$ y defina $\Delta\omega$ de manera semejante. c) ¿Qué intervalo de frecuencias se requiere para componer un pulso de ancho $2\tau = 1$ μs? ¿Y un pulso de ancho $2\tau = 1$ ns?

35. *Un paquete de ondas de materia.* a) Encuentre y grafique la parte real de la forma del pulso de ondas de materia $f(x)$ para una amplitud de distribución gaussiana $a(k)$, donde

$$a(k) = Ae^{-\alpha^2(k-k_0)^2}$$

Observe que $a(k)$ tiene un pico en k_0 y que su ancho disminuye cuando α aumenta. (*Sugerencia*: A fin de escribir $f(x) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} a(k)e^{ikx}\, dk$ en forma estándar $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-az^2}\, dz$, complete al cuadrado en k). b) Compare el resultado de la parte real de $f(x)$ con la forma estándar de una función gaussiana de ancho Δx, $f(x) \propto Ae^{-(x/2\Delta x)^2}$, para demostrar que el ancho del pulso de ondas de materia es $\Delta x = \alpha$. c) Encuentre el ancho Δk de $a(k)$, escribiendo $a(k)$ en su forma gaussiana estándar, y demuestre que $\Delta x\, \Delta k = \frac{1}{2}$, independientemente de α.

36. Considere una partícula cuántica de masa m que se desplaza libremente a una velocidad v. Su energía es $E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + 0$. Determine la velocidad de fase de la onda cuántica que representa la partícula y demuestre que es diferente a la velocidad a la cual la partícula transporta masa y energía.

37. En un tubo al vacío, se hacen hervir electrones en un cátodo caliente a un ritmo lento y estable, y se aceleran a partir del reposo a través de una diferencia de potencial de 45 V. Luego, todos los electrones se desplazan 28 cm a medida que pasan por un arreglo de rendijas y llegan a una pantalla para producir un patrón de interferencia. Si sólo un electrón se mueve a la vez en el tubo, ¿por debajo de qué valor debemos suponer que está la corriente del haz? En esta situación sigue apareciendo el patrón de interferencia, mostrando que cada electrón individual puede interferir consigo mismo.

6

Mecánica cuántica en una dimensión

Contenido del capítulo

Se ha visto que toda partícula tiene asociada una onda de materia denominada **función de onda.** La **mecánica cuántica,** o mecánica ondulatoria, estudia cómo esta función de onda afecta la descripción y el comportamiento de una partícula. Este esquema, desarrollado de 1925 a 1926 por Schrödinger, Heisenberg y otros, hace posible comprender una gran cantidad de fenómenos que involucran partículas elementales, átomos, moléculas y sólidos. En este y en subsecuentes capítulos se describirán las características básicas de la mecánica ondulatoria y su aplicación a sistemas simples. Este capítulo desarrolla los conceptos relevantes en el caso de partículas confinadas a desplazarse a lo largo de una línea recta (el eje x).

6.1 INTERPRETACIÓN DE BORN

La función de onda Ψ contiene toda la información que puede conocerse sobre la partícula. Esta premisa básica constituye la piedra angular de nuestra investigación: uno de nuestros objetivos es descubrir cómo puede obtenerse información a partir de la función de onda; el otro, aprender cómo obtener esta función de onda para un sistema dado.

El punto de vista actualmente aceptado relaciona a la función de onda Ψ con una *probabilidad,* en la forma original propuesta por Max Born en 1925:



BIOGRAFÍA

MAX BORN
(1882–1970)

Max Born fue un físico teórico alemán que realizó contribuciones importantes en muchas áreas de la física, incluyendo la relatividad, la física atómica y del estado sólido, la mecánica matricial, el tratamiento mecánico cuántico de la dispersión de partículas ("aproximación de Born"), los cimientos de la mecánica cuántica (interpretación de Born de Ψ), la óptica y la teoría cinética de los líquidos. Born se doctoró en Física en la Universidad de Gotinga en 1907, y adquirió un gran conocimiento de las matemáticas como asistente privado del gran matemático alemán David Hilbert. Este fuerte contexto matemático fue decisivo para reformular rápidamente la teoría cuántica de Heisenberg de manera más consistente por medio de matrices.

En 1921, Born aceptó un puesto en la Universidad de Gotinga, donde ayudó a construir uno de los centros de física más importantes del siglo XX. Ese grupo estuvo integrado, en un momento o en otro, por los matemáticos Hilbert, Courant, Klein y Runge, y los físicos Born, Jordan, Heisenberg, Franck, Pohl, Heitler, Herzberg, Nordheim y Wigner, entre otros. En 1926, poco después de la publicación de la mecánica ondulatoria de Schrödinger, Born aplicó los métodos de éste a la dispersión atómica y desarrolló el método de aproximación de Born para calcular la probabilidad de dispersión de una partícula en un ángulo sólido dado. Este trabajo constituyó la base para la sorprendente interpretación de Born (en 1926) de $|\Psi|^2$ como la densidad de probabilidad. Gracias a esta interpretación estadística fue galardonado con el premio Nobel en 1954.

Expulsado por los nazis, Born abandonó Alemania en 1933, para dirigirse a Cambridge y, finalmente, a la Universidad de Edimburgo, donde nuevamente se volvió el líder de un gran grupo que investigaba la mecánica estadística de la materia condensada. Durante los últimos años de su vida, Born hizo campañas contra las armas atómicas, escribió una autobiografía y tradujo al inglés la obra de ciertos humoristas alemanes.

(AIP Emilio Segrè Visual Archives.)

Interpretación de Born de Ψ

La probabilidad de que una partícula se encuentre en el intervalo infinitesimal dx alrededor del punto x, denotada por $P(x)\,dx$, es

$$P(x)\,dx = |\Psi(x,t)|^2\,dx \tag{6.1}$$

En consecuencia, aunque no es posible especificar exactamente la posición de una partícula, sí lo es asignar probabilidades para observarla en cualquier posición dada. La cantidad $|\Psi|^2$, el cuadrado del valor absoluto de Ψ, representa la intensidad de la onda de materia y se calcula como el producto de Ψ con su complejo conjugado; es decir, $|\Psi|^2 = \Psi^*\Psi$. Observe que Ψ misma no es una cantidad mensurable; no obstante, $|\Psi|^2$ sí es mensurable y es justo la probabilidad por unidad de longitud, o **densidad de probabilidad** $P(x)$, de encontrar a la partícula en el punto x en el tiempo t. Por ejemplo, la distribución de intensidad en un patrón de difracción de luz es una medida de la probabilidad de que un fotón choque en un punto dado dentro del patrón. Debido a su relación con las probabilidades, insistimos en que $\Psi(x, t)$ *es una función monovaluada y continua de* x y t, de modo que no puede haber ambigüedades en las predicciones de la teoría. La función de onda Ψ también debe ser *suave*, una condición que será desarrollada más adelante, conforme sea necesario.

Debido a que la partícula debe de estar en algún sitio a lo largo del eje x, la suma de las probabilidades sobre todos los valores de x debe ser igual a 1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 \, dx = 1 \tag{6.2}$$

Cualquier función de onda que cumpla con la ecuación 6.2 se dice que está **normalizada.** Normalización es simplemente establecer el hecho de que la partícula puede encontrarse con certidumbre en alguna parte. La probabilidad de encontrar a la partícula en cualquier intervalo finito $a \leq x \leq b$ es

$$P = \int_a^b |\Psi(x, t)|^2 \, dx \tag{6.3}$$

Es decir, la probabilidad es justamente el área bajo la curva de densidad de probabilidad entre los puntos $x = a$ y $x = b$ (figura 6.1).

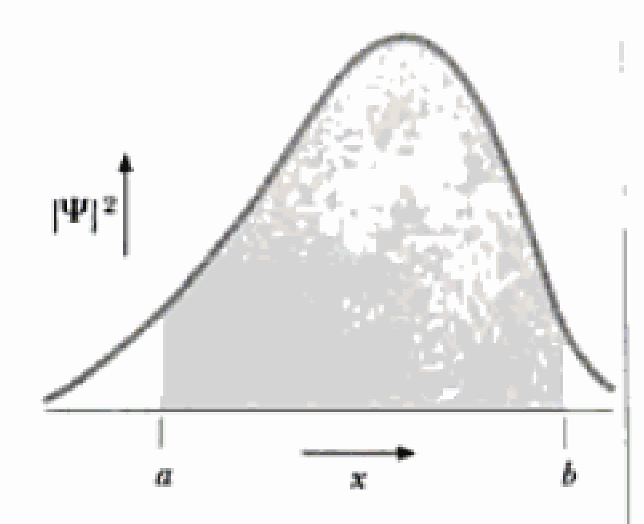


Figura 6.1 La probabilidad de que una partícula esté en el intervalo $a \leq x \leq b$ es el área bajo la curva desde a hasta b de la función de densidad de probabilidad $|\Psi(x, t)|^2$.

EJEMPLO 6.1 Normalización de la función de onda

La función de onda inicial de una partícula está dada como $\Psi(x, 0) = C\exp(-|x|/x_0)$, donde C y x_0 son constantes. Dibuje esta función. Encuentre C en términos de x_0, de modo que $\Psi(x, 0)$ se encuentre normalizada.

Solución La función de onda dada es simétrica y decae exponencialmente en cualquier dirección, como se muestra en la figura 6.2. La longitud de decaimiento x_0 representa la distancia sobre la cual la amplitud de onda disminuye por el factor $1/e$ desde su valor máximo $\Psi(0, 0) = C$.

La condición de normalización es

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, 0)|^2 \, dx = C^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x|/x_0} \, dx$$

Debido a que el integrando permanece igual cuando x cambia de signo (es una función par), es posible evaluar la integral sobre el eje completo como el doble de la integral sobre el semieje $x > 0$, donde $|x| = x$. Así,

$$1 = 2C^2 \int_0^{\infty} e^{-2x/x_0} \, dx = 2C^2 \left(\frac{x_0}{2}\right) = C^2 x_0$$

De esta manera, para que la función de onda esté normalizada es necesario tomar $C = 1/\sqrt{x_0}$.

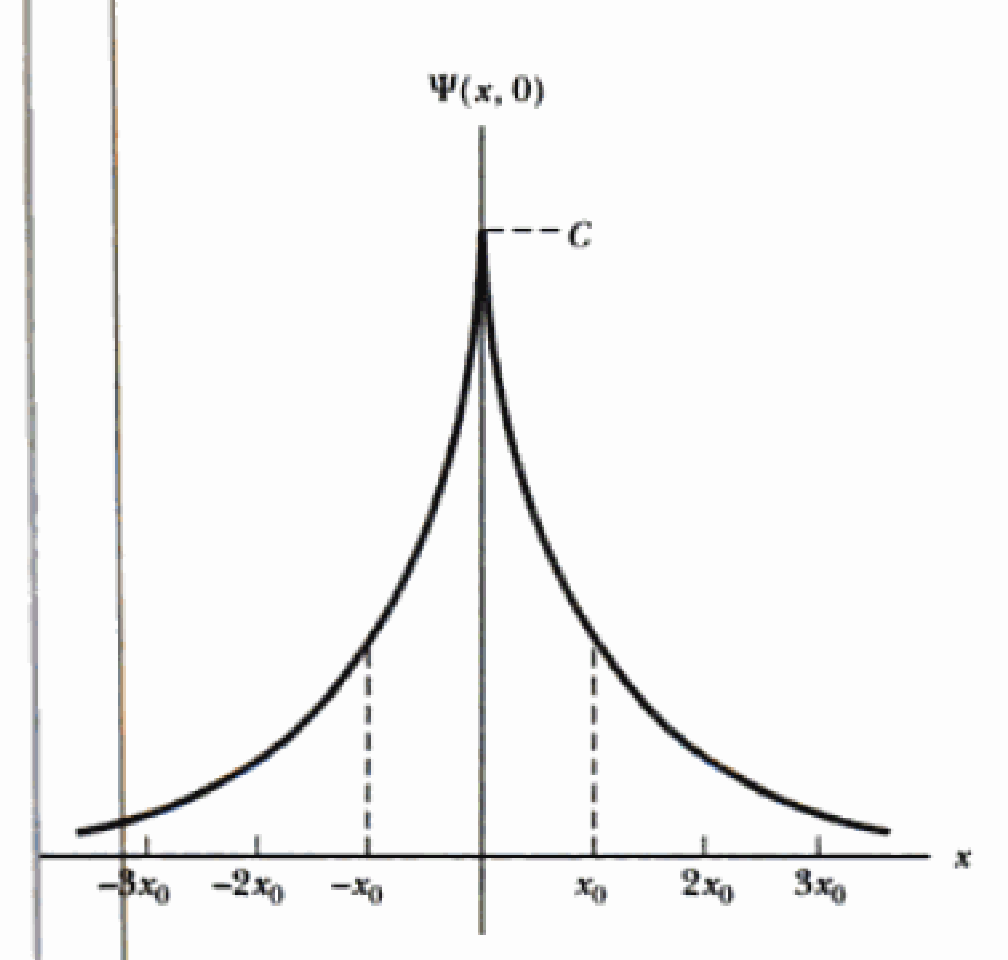


Figura 6.2 (Ejemplo 6.1) La función de onda simétrica $\Psi(x, 0) = C\exp(-|x|/x_0)$. En $x = \pm x_0$, la amplitud de onda se reduce por el factor $1/e$ con respecto a su valor pico $\Psi(0, 0) = C$. C es una constante de normalización cuyo valor propio es $C = 1/\sqrt{x_0}$.

EJEMPLO 6.2 Cálculo de probabilidades

Calcule la probabilidad de que la partícula en el ejemplo anterior se encuentre en el intervalo $-x_0 \leq x \leq x_0$.

Solución La probabilidad es el área bajo la curva $|\Psi(x, 0)|^2$ desde $-x_0$ hasta x_0 y se obtiene al integrar la densidad de probabilidad sobre el intervalo especificado:

$$P = \int_{-x_0}^{x_0} |\Psi(x, 0)|^2 \, dx = 2\int_0^{x_0} |\Psi(x, 0)|^2 \, dx$$

donde el segundo paso se basa en que el integrando es una función par, como se analizó en el ejemplo 6.1. Así,

$$P = 2C^2 \int_0^{x_0} e^{-2x/x_0} \, dx = 2C^2(x_0/2)(1 - e^{-2})$$

Al sustituir $C = 1/\sqrt{x_0}$ en esta expresión se obtiene la probabilidad $P = 1 - e^{-2} = 0.8647$, o alrededor de 86.5%, independientemente de x_0.

El problema fundamental de la mecánica cuántica es el siguiente: encontrar la función de onda en cualquier tiempo t, dada la función de onda en algún instante inicial, por ejemplo $t = 0$. La función de onda $\Psi(x, 0)$ representa la información inicial que debemos especificar; una vez que ésta se conoce, la onda se propaga según las leyes de la naturaleza.

Debido a que describe la manera en que evoluciona un sistema dado, la mecánica cuántica es una teoría dinámica muy semejante a la mecánica newtoniana. Por supuesto, existen diferencias importantes. En la mecánica newtoniana, el estado de una partícula en $t = 0$ se especifica al proporcionar su posición y velocidad iniciales, $x(0)$ y $v(0)$, respectivamente —apenas dos números; la mecánica cuántica exige toda una función de onda $\Psi(x, 0)$— un conjunto infinito de números que corresponde al valor de la función de onda en todo punto x. Sin embargo ambas teorías describen cómo este estado cambia con el tiempo cuando se conocen las fuerzas que actúan sobre la partícula. En la mecánica newtoniana, $x(t)$ y $v(t)$se calculan a partir de la segunda ley de Newton; en la mecánica cuántica, $\Psi(x, 0)$ debe calcularse a partir de otra ley: *la ecuación de Schrödinger.*

6.2 FUNCIÓN DE ONDA PARA UNA PARTÍCULA LIBRE

Una partícula libre es aquella que no está sujeta a ninguna fuerza. Este caso especial puede estudiarse usando suposiciones previas sin recurrir a la ecuación de Schrödinger. El desarrollo subraya el papel de las condiciones iniciales en física cuántica.

El número de onda k y la frecuencia ω de las ondas de materia de partículas libres están dados por las relaciones de De Broglie

$$k = \frac{p}{\hbar} \qquad \text{y} \qquad \omega = \frac{E}{\hbar} \tag{6.4}$$

Para partículas no relativistas, la relación de ω con k está dada como

$$\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m} \tag{6.5}$$

que se concluye a partir de la relación clásica $E = p^2/2m$ entre la energía E y la cantidad de movimiento p para una partícula libre.[1]

Para la función de onda misma, debe tomarse

Representación de onda plana para una partícula

$$\Psi_k(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} = A\{\cos(kx - \omega t) + i\,\text{sen}(kx - \omega t)\} \tag{6.6}$$

donde $i = \sqrt{-1}$ es la unidad imaginaria. Ésta es una oscilación con número de onda k, frecuencia ω y amplitud A. Debido a que las variables x y y sólo aparecen en la combinación $kx - \omega t$, la oscilación es una onda viajera, como corresponde a una partícula libre en movimiento. Además, la combinación específica expresada por la ecuación 6.6 es la de una onda plana,[2] para la cual la densidad de probabilidad $|\Psi|^2$ $(= A^2)$ es *uniforme.* Es decir, la probabilidad de encontrar a esta partícula en cualquier intervalo del eje x es la misma que para cualquier otro intervalo de la misma longitud y no cambia con el tiempo. La onda plana es la

[1]La forma funcional para $\omega(x)$ se analizó en la sección 5.3 para partículas relativistas, donde $E = \sqrt{(cp)^2 + (mc^2)^2}$. En el caso no relativista ($v \ll c$), lo anterior se reduce a $E = p^2/2m + mc^2$. En este caso puede descartarse la energía en reposo $E_0 = mc^2$ si se establece que E_0 sea la energía de referencia. Al medir todas las energías a partir de este nivel, E_0 se hace, en efecto, igual a cero.

[2]Para una onda plana, los frentes de onda (puntos de fase constante) constituyen planos perpendiculares a la dirección de propagación de las ondas. En este caso el requisito de fase constante $kx - \omega t =$ *constante* exige sólo que x esté fija, de modo que los frentes de onda ocupan los planos y-z.

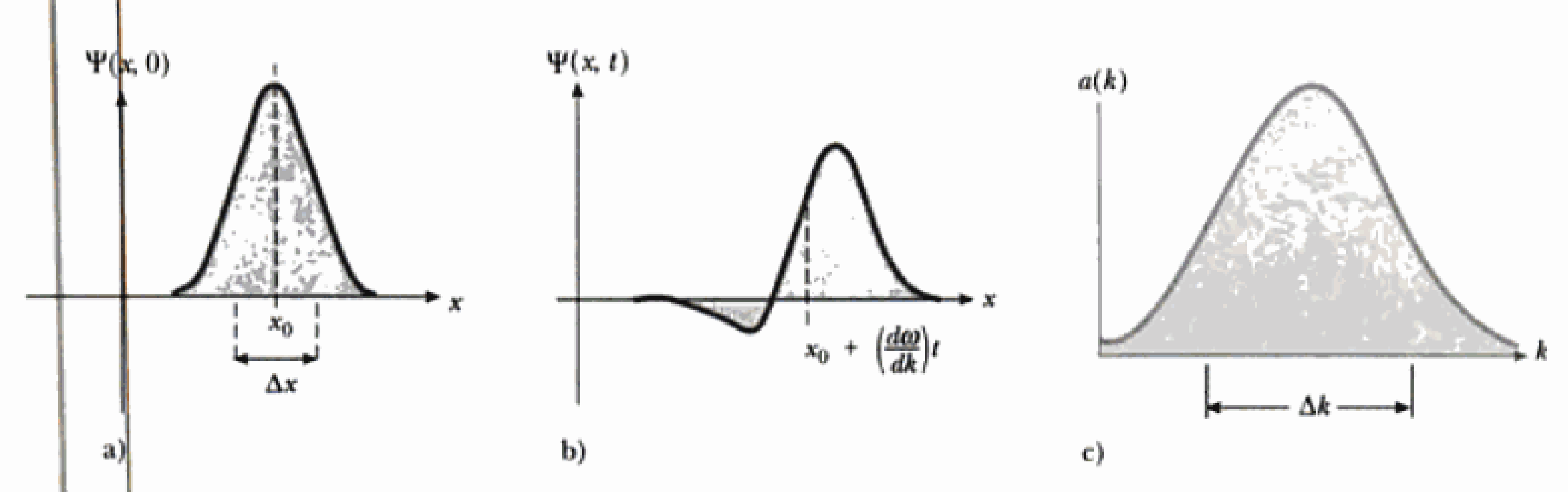


Figura 6.3 a) Paquete de ondas $\Psi(x, 0)$, formado a partir de la superposición de ondas planas. b) El mismo paquete de ondas después de un tiempo t (sólo la parte real). Debido a que $v_p = \omega/k = \hbar k/2m$, las ondas planas con menor número de onda se mueven a velocidades más bajas, y el paquete se distorsiona. El cuerpo del paquete se propaga con la velocidad de grupo $d\omega/dk$ de las ondas planas. c) Función de distribución de amplitud $a(k)$ para este paquete, que indica la amplitud de cada onda plana en la superposición. Un paquete de ondas estrecho requiere un contenido espectral amplio, y viceversa. Es decir, los anchos Δx y Δk están relacionados de manera inversa como $\Delta x \Delta k \approx 1$.

forma de onda viajera más simple con esta propiedad: expresa el concepto razonable de que no existen sitios especiales dónde encontrar a una partícula libre. La posición de la partícula se desconoce por completo en $t = 0$, y así permanece durante todo el tiempo; no obstante, su cantidad de movimiento y energía se conocen con exactitud como $p = \hbar k$ y $E = \hbar\omega$, respectivamente.

Pero la ecuación 6.6 no describe a todas las partículas libres. Por ejemplo, es posible establecer (midiéndolo) que nuestra partícula está inicialmente en algún intervalo Δx alrededor de x_0. En este caso, $\Psi(x, 0)$ debe ser un *paquete de ondas* concentrado en este intervalo, como se muestra en la figura 6.3a. Ahora resulta inadecuada la descripción de onda plana porque la forma de la onda inicial no está dada en forma correcta por $\Psi_k(x, 0) = e^{ikx}$. En vez de ello, para representar al paquete es necesario usar una suma de ondas planas con diferentes números de onda. Debido a que k no está restringido, la sumatoria en realidad es aquí una integral y se escribe

Representación de una partícula con un grupo de ondas

$$\Psi(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{ikx}\, dk \qquad (6.7)$$

Los coeficientes $a(k)$ especifican la amplitud de la onda plana con número de onda k en la mezcla y se eligen para reproducir la forma de la onda inicial. Para una $\Psi(x, 0)$ dada, la $a(k)$ necesaria puede encontrarse a partir de la teoría de las integrales de Fourier. Aquí no abordaremos con detalle este análisis; el punto esencial es que esto puede hacerse para un paquete de cualquier forma (vea la sección opcional 5.4). Si se supone que cada onda plana del paquete se propaga independientemente de las otras, según la ecuación 6.6, el paquete es, en cualquier tiempo t,

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{i[kx - \omega(k)t]}\, dk \qquad (6.8)$$

Observe que los datos iniciales sólo se utilizan para establecer las amplitudes $a(k)$; luego, el paquete se desarrolla según la evolución de sus ondas planas constituyentes. Debido a que cada uno de estos constituyentes se mueve a una velocidad diferente $v_p = \omega/k$ (la velocidad de fase), el paquete de ondas experimenta dispersión (vea la sección 5.3) y **el paquete cambia de forma a medida que se propaga** (figura 6.3b). La velocidad de propagación del paquete de ondas como un todo está dada por la velocidad del grupo $d\omega/dk$ de las ondas

planas que integran el paquete. La ecuación 6.8 ya no describe a una partícula con valores exactos de momento y energía. Para construir un paquete de ondas (es decir, para localizar la partícula) se necesita una mezcla de números de onda (y, por tanto, de cantidades de movimiento de la partícula), como indican las diferentes $a(k)$. Las amplitudes $a(k)$ proporcionan el denominado *contenido espectral* del paquete, que podría verse como el que se dibuja en la figura 6.3c. Mientras más estrecho sea el paquete $\Psi(x, 0)$ que se busca, más ancha será la función $a(k)$ que lo representa. Si Δx denota el ancho del paquete y Δk denota la extensión de la $a(k)$ correspondiente, se tiene que el producto siempre es un número de orden igual a la unidad; es decir, $\Delta x \Delta k \approx 1$. Junto con $p = \hbar k$, lo anterior implica un principio de incertidumbre:

$$\Delta x\, \Delta p \sim \hbar \tag{6.9}$$

EJEMPLO 6.3 Construyendo un paquete de ondas

Encuentre la función de onda $\Psi(x, 0)$ que resulta de tomar la función $a(k) = (C\alpha/\sqrt{\pi})\exp(-\alpha^2 k^2)$, donde C y α son constantes. Calcule el producto $\Delta x \Delta k$ para este caso.

Solución La función $\Psi(x, 0)$ está dada por la integral de la ecuación 6.7, o bien,

$$\Psi(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{ikx}\, dk = \frac{C\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(ikx - \alpha^2 k^2)}\, dk$$

Para evaluar la integral, primero se completa el cuadrado en el exponente como

$$ikx - \alpha^2 k^2 = -\left(\alpha k - \frac{ix}{2\alpha}\right)^2 - \frac{x^2}{4\alpha^2}$$

El segundo término a la derecha es constante para la integración sobre k; para integrar el primer término es necesario cambiar variables mediante la sustitución de $z = \alpha k - ix/2\alpha$, con lo que se obtiene

$$\Psi(x, 0) = \frac{C}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/4\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\, dz$$

Ahora, se sabe que esta integral tiene el conocido valor $\sqrt{\pi}$. Así,

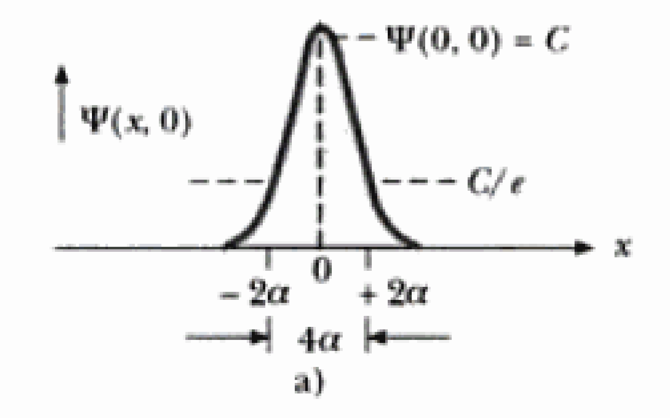
$$\Psi(x, 0) = Ce^{-x^2/4\alpha^2} = Ce^{-(x/2\alpha)^2}$$

Esta función $\Psi(x, 0)$, denominada función *gaussiana*, tiene un sólo máximo en $x = 0$ y decae de forma continua a cero por la izquierda y por la derecha (figura 6.4a). El ancho de este paquete gaussiano se vuelve más grande conforme α crece. Por consiguiente, es razonable identificar α con Δx, el grado inicial de localización. De la misma manera, $a(k)$ también es una función gaussiana, pero con amplitud $C\alpha/\sqrt{\pi}$ y ancho $1/2\alpha$ (ya que $\alpha^2 k^2 = (k/2[1/2\alpha])^2$). Así, $\Delta k = 1/2\alpha$ y $\Delta x \Delta k = 1/2$, *independientemente* de α. El multiplicador C es un factor de escala elegido para normalizar a Ψ.

Debido a que este paquete gaussiano está integrado por muchas ondas individuales, todas moviéndose a velocidades distintas, la forma del paquete cambia con el tiempo. En el problema 4 se demuestra que el paquete *se dispersa*, y que su ancho crece cada vez más con el transcurso del tiempo, según la relación

$$\Delta x(t) = \sqrt{[\Delta x(0)]^2 + \left[\frac{\hbar t}{2m\Delta x(0)}\right]^2}$$

De igual forma, la amplitud del pico disminuye de manera estable a fin de mantener normalizada la onda durante todo el tiempo (figura 6.4b). La onda como un todo no se propaga, ya que para cualquier número de onda k presente en el grupo de ondas hay un componente igual de la onda plana con el número de onda opuesto $-k$.



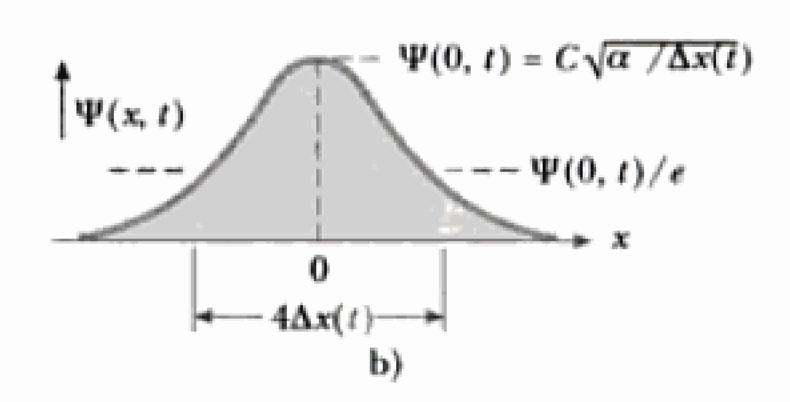


Figura 6.4 (Ejemplo 6.3) a) La función de onda gaussiana $\Psi(x, 0) = C\exp[-(x/2\alpha)^2]$, que representa una partícula localizada inicialmente alrededor de $x = 0$. C es la amplitud. En $x = \pm 2\alpha$, la amplitud se reduce de su valor máximo por el factor $1/e$, por consiguiente, α se identifica como el ancho de la onda gaussiana, $\alpha = \Delta x$. b) Función de onda gaussiana de la figura 6.4 en el tiempo t (salvo un factor de fase). El ancho se ha incrementado a $\Delta x(t) = \sqrt{\alpha^2 + (\hbar t/2m\alpha)^2}$ y la amplitud se ha reducido por el factor $\sqrt{\alpha/\Delta x(t)}$.

EJEMPLO 6.4 Dispersión de ondas de materia

Inicialmente, un electrón se encuentra localizado en una región del espacio de 0.10 nm de ancho (tamaño atómico). ¿Cuánto tiempo transcurre antes que esta localización sea destruida por dispersión? Repita el cálculo para una canica de 1 g que se localiza inicialmente a 0.10 mm.

Solución Si para el estado inicial se considera una forma de onda gaussiana, es posible utilizar los resultados del ejemplo previo. En particular, la extensión de la onda de materia, luego que ha transcurrido un tiempo t, es

$$\Delta x(t) = \sqrt{[\Delta x(0)]^2 + \left[\frac{\hbar t}{2m\Delta x(0)}\right]^2}$$

donde $\Delta x(0)$ es su ancho inicial. El paquete se dispersa de manera efectiva cuando $\Delta x(t)$ se vuelve observable en comparación con $\Delta x(0)$, por ejemplo, $\Delta x(t) = 10\,\Delta x(0)$. Esto ocurre cuando $\hbar t/2m = \sqrt{99}\,[\Delta x(0)]^2$, o bien, $t = \sqrt{99}\,(2m/\hbar)[\Delta x(0)]^2$.

Inicialmente, el electrón está localizado a 0.10 nm ($= 10^{-10}$ m) y su masa es $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$ kg. Por tanto, el paquete de ondas del electrón se dispersa al cabo de un tiempo

$$t = \sqrt{99}\left\{\frac{(2)(9.11 \times 10^{-31}\text{ kg})}{1.055 \times 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}}\right\}(1 \times 10^{-10}\text{ m})^2$$
$$= 1.7 \times 10^{-15}\text{ s}$$

El mismo cálculo para una canica de 1 g, localizada a 0.10 mm $= 10^{-4}$ m, proporciona

$$t = \sqrt{99}\left\{\frac{(2)(10^{-3}\text{ kg})}{1.055 \times 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}}\right\}(10^{-4}\text{ m})^2$$
$$= 1.9 \times 10^{24}\text{ s}$$

o aproximadamente ¡6×10^{16} años! Esto es casi 10 millones de veces el valor que se acepta hoy por hoy para la edad del universo. Con una masa mucho mayor, la canica no muestra los efectos cuánticos de dispersión sobre cualquiera otra escala de tiempo mensurable, y así, para todos los efectos prácticos, permanece localizada "para siempre". En contraste, la localización de un electrón atómico se destruye en un tiempo bastante breve, al mismo nivel que el tiempo necesario para que el electrón complete una órbita de Bohr.

Para terminar esta sección, se observa que, *en principio*, las ecuaciones 6.7 y 6.8 resuelven el problema fundamental de la mecánica cuántica para partículas libres sujetas a cualquier condición inicial $\Psi(x, 0)$. Debido a su sencillez matemática, el paquete de ondas Gaussiano suele utilizarse para representar el estado inicial del sistema, como en los ejemplos previos. Sin embargo, la forma gaussiana a menudo es sólo una aproximación a la realidad. Pero aún en este caso, que es el más simple, el desafío matemático de obtener $\Psi(x, t)$ a partir de $\Psi(x, 0)$ tiende a oscurecer los resultados importantes. La simulación numérica ofrece una alternativa conveniente para el cálculo analítico, que también ayuda a visualizar los importantes fenómenos de propagación y dispersión de paquetes de ondas. Para "ver" en acción las formas de onda cuánticas y explorar aún más su evolución temporal, se recomienda consultar nuestro sitio en la red: http://info.brookscole.com/mp3e, seleccionar QMTools Simulations → Evolution of Free Particle Wave Packets (Tutorial), y seguir las instrucciones que ahí se proporcionan.

6.3 FUNCIONES DE ONDA EN PRESENCIA DE FUERZAS

Para una partícula sobre la que actúa una fuerza F, $\Psi(x, t)$ debe encontrarse a partir de la **ecuación de Schrödinger:**

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + U(x)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \qquad (6.10)$$

La ecuación de onda de Schrödinger

Nuevamente se supone que se conoce la función de onda inicial $\Psi(x, 0)$. En esta expresión, $U(x)$ es la función de energía potencial para la fuerza F; es de-

cir, $F = -dU/dx$. La ecuación de Schrödinger no puede deducirse a partir de ningún otro principio más elemental, aunque es una de las leyes de la Física cuántica. Así como con cualquier ley, su "veracidad" debe medirse en última instancia por su capacidad para realizar predicciones que coincidan con los experimentos.



B I O G R A F Í A

ERWIN SCHRÖDINGER
(1887–1961)

Erwin Schrödinger, físico teórico austriaco, fue mejor conocido como el creador de la mecánica ondulatoria. De joven fue un buen estudiante a quien le agradaban las matemáticas y la física, pero también el latín y el griego por su gramática lógica. Se doctoró en física en la Universidad de Viena. Aunque su trabajo en física se vio interrumpido por la Primera Guerra Mundial, hacia 1920 Schrödinger ya había escrito artículos importantes sobre mecánica estadística, visión del color y relatividad general, que al principio encontró bastante difícil de comprender. Su opinión abierta y directa sobre la relatividad general, la cual mantuvo a lo largo de su existencia, fue que ésta era "deprimente" e "innecesariamente complicada". En este sentido, otras observaciones de Schrödinger con las que algunos lectores estarán totalmente de acuerdo, son las siguientes: La teoría cuántica de Bohr-Sommerfeld era "insatisfactoria e, incluso, desagradable". "Me siento... intimidado, por no decir rechazado, por los muy difíciles métodos [de la mecánica matricial] y por su falta de claridad."

Poco después que De Broglie introdujera el concepto de ondas de materia en 1924, Schrödinger comenzó a desarrollar una nueva teoría atómica relativista basada en las ideas de De Broglie, sin embargo el omitir incluir el espín del electrón condujo al fracaso de esta teoría para el caso del hidrógeno. En enero de 1926, sin embargo, al considerar al electrón como una partícula no relativista, Schrödinger había introducido su famosa ecuación de onda y obtuvo con gran éxito los valores para la energía y las funciones de onda para el hidrógeno. Como el mismo Schrödinger señaló, una característica extraordinaria de su método fue el que los valores discretos de la energía surgieron de su ecuación de onda en una forma natural (como en las ondas estacionarias sobre un resorte), y de manera superior al método artificial del postulado de Bohr. Otra característica extraordinaria de la mecánica ondulatoria de Schrödinger fue que ésta era más fácil de aplicar a problemas físicos que la mecánica matricial de Heisenberg, porque implicaba una ecuación diferencial parcial muy semejante a la ecuación de onda clásica. Intrigado por las notorias diferencias en concepción y métodos matemáticos de la mecánica ondulatoria y matricial, Schrödinger hizo mucho por apresurar la aceptación universal de toda la teoría cuántica al demostrar la equivalencia matemática de ambas teorías en 1926.

Aunque la teoría ondulatoria de Schrödinger estaba basada en ideas físicas evidentes, uno de sus problemas más importantes en 1926 fue la interpretación física de la función de onda Ψ. Schrödinger consideraba que, en última instancia, el electrón era una onda, que Ψ era la amplitud de vibración de esta onda y que $\Psi^*\Psi$ era la densidad de carga eléctrica. Como se mencionó en el capítulo 4, Born, Bohr, Heisenberg y otros señalaron los problemas con esta interpretación y presentaron el punto de vista aceptado hoy en día de que $\Psi^*\Psi$ es una probabilidad y que básicamente el electrón no es más una onda que una partícula. Schrödinger jamás aceptó esta opinión, aunque manifestó su "interés y decepción" de que esta "interpretación trascendental, casi física", se haya convertido en un "dogma aceptado universalmente".

En 1927, Schrödinger, por invitación de Max Planck, aceptó la dirección del Departamento de física teórica en la Universidad de Berlín, donde estableció una estrecha amistad con él y vivió seis años estables y productivos. En 1933, disgustado con los nazis, como muchos de sus colegas, abandonó Alemania. Después de mucho deambular, reflejando la inestabilidad política de Europa, finalmente se estableció en el Instituto de Estudios Avanzados de Dublin. Ahí pasó 17 años felices y creativos trabajando en problemas sobre relatividad general, cosmología y la aplicación de la física cuántica a la biología. Su último esfuerzo dio por resultado un breve y fascinante libro: *What is Life?*, que motivó a muchos físicos jóvenes a investigar procesos biológicos utilizando métodos de la química y la física. En 1956 volvió a su hogar en las montañas tirolesas. Ahí murió en 1961.

(*AIP Emilio Segrè Visual Archives.*)

La ecuación de Schrödinger propaga a la onda inicial temporalmente hacia delante. Para ver cómo opera esto, suponga que se tiene $\Psi(x, 0)$. Entonces, el lado izquierdo de la ecuación de Schrödinger puede evaluarse y la ecuación 6.10 nos proporciona $\delta\Psi/\delta t$ en $t = 0$, la razón de cambio inicial de la función de onda. Con base en esto, se calcula la función de onda poco tiempo después, δt, como $\Psi(x, \delta t) = \Psi(x, 0) + [\delta\Psi/\delta t]_0\delta t$. Esto permite volver a evaluar el lado izquierdo, ahora en $t = \delta t$. Con cada una de estas repeticiones, Ψ avanza otro paso δt hacia el futuro. La continuación de este proceso genera Ψ en cualquier instante posterior t. Las computadoras son especialmente convenientes para realizar estos cálculos repetidos, y el método recién descrito puede utilizarse para resolver en forma numérica la ecuación de Schrödinger.[3]

Pero, ¿cómo puede obtenerse una expresión matemática explícita para $\Psi(x, t)$? Volviendo al caso de la partícula libre, se observa que las ondas planas $\Psi_k(x, t)$ de la ecuación 6.6 sirven para dos propósitos: primero representan partículas cuya cantidad de movimiento (y, por tanto, su energía), se conoce con precisión; segundo, se convierten en los bloques fundamentales para construir funciones de onda que cumplen cualquier condición inicial. Desde esta perspectiva, surge de manera natural la pregunta: ¿existen funciones análogas cuando hay fuerzas presentes? La respuesta es ¡sí! Para obtenerlas, se buscan soluciones a la ecuación de Schrödinger que tengan la forma separable[4]

$$\Psi(x, t) = \psi(x)\phi(t) \tag{6.11}$$

donde $\psi(x)$ es una función que depende sólo de x y $\phi(t)$ es una función que depende sólo de t. (Observe que las ondas planas tienen justo esta forma, con $\psi(x) = e^{-i\omega t}$.) Al sustituir la ecuación 6.11 en la ecuación 6.10 y dividir todo entre $\psi(x)\phi(t)$ se obtiene

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi''(x)}{\psi(x)} + U(x) = i\hbar\,\frac{\phi'(t)}{\phi(t)}$$

donde las primas indican diferenciación con respecto a los argumentos. Ahora el lado izquierdo de esta ecuación es una función sólo de x,[5] y el lado derecho es una función sólo de t. Debido a que es posible asignar cualquier valor de x independientemente de t, los dos lados de la ecuación sólo pueden ser iguales si cada uno es igual a la misma constante, que se denomina E.[6] Esto conduce a dos ecuaciones que permiten determinar las funciones desconocidas $\psi(x)$ y $\phi(t)$. La ecuación resultante para la función $\phi(t)$ dependiente del tiempo es

[3]Este método directo adolece de inestabilidades numéricas y no, preserva, por ejemplo, la probabilidad. En la práctica suele utilizarse un esquema de discretización más complicado, como el proporcionado por el método de Crank-Nicholson. Vea, por ejemplo, la sección 17.2 de *Numerical Recipes* de W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, Cambridge, Reino Unido, Cambridge University Press, 1986.

[4]La obtención de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales en forma separable se denomina *separación de variables*. Al separar variables, una ecuación diferencial parcial en, por decir, N variables se reduce a N ecuaciones diferenciales ordinarias, cada una en una sola variable. La técnica es general y puede aplicarse a muchas ecuaciones diferenciales parciales que aparecen en aplicaciones científicas y de ingeniería, ¡pero no a todas!

[5]De manera implícita se ha asumido que la energía potencial $U(x)$ es una función sólo de x. Para potenciales que también dependen de t (por ejemplo, los que surgen a partir de un campo eléctrico que varía con el tiempo), en general no existen soluciones en forma separable de la ecuación de Schrödinger.

[6]De manera más explícita, el cambio de t no puede afectar al lado izquierdo porque éste sólo depende de x. Debido a que ambos lados de la ecuación son iguales, se deduce que el cambio de t tampoco puede afectar al lado derecho. Concluimos, pues, que el lado derecho debe reducirse a una constante. El mismo razonamiento con x en lugar de t demuestra que el lado izquierdo también debe reducirse a esta misma constante.

$$i\hbar \frac{d\phi}{dt} = E\phi(t) \tag{6.12}$$

Lo anterior puede integrarse de inmediato para obtener $\phi(t) = e^{-i\omega t}$, con $\omega = E/\hbar$. Por tanto, ¡la dependencia con respecto al tiempo es igual a la que se obtiene para las partículas libres! La ecuación para la función espacial $\psi(x)$ es

Ecuación de onda para ondas de materia en forma separable

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x) \tag{6.13}$$

La ecuación 6.13 se conoce como **ecuación de Schrödinger independiente del tiempo.** No es posible escribir soluciones explícitas de esta ecuación para una función de energía potencial arbitraria $U(x)$. Pero, sin importar cuál sea la forma, $\psi(x)$ debe tener un buen comportamiento debido a su relación con las probabilidades. En particular, $\psi(x)$ debe ser una función finita en todas partes, monovaluada y continua. Además, $\psi(x)$ debe ser "suave"; es decir, la pendiente de la onda $d\psi/dx$ también debe ser continua siempre que $U(x)$ tenga un valor finito.[7]

Para partículas libres, en la ecuación 6.13 se toma $U(x) = 0$ (para obtener $F = -dU/dx = 0$) y se encuentra que $\psi(x) = e^{ikx}$ es una solución con $E = \hbar^2k^2/2m$. Así, para partículas libres, la constante de separación E es la energía total de la partícula; esta identificación sigue siendo válida en presencia de fuerzas. La función de onda $\psi(x)$ cambia, no obstante, con la introducción de fuerzas, debido a que la cantidad de movimiento de la partícula (y entonces k) deja de ser constante.

Las soluciones separables de la ecuación de Schrödinger describen condiciones de interés físico particular. Una característica compartida por todas estas funciones de onda es especialmente digna de mencionar: Debido a que $|e^{-i\omega t}|^2 = e^{+i\omega t}e^{-i\omega t} = e^0 = 1$, se tiene

$$|\Psi(x, t)|^2 = |\psi(x)|^2 \tag{6.14}$$

Esta igualdad expresa la independencia con respecto al tiempo de todas las probabilidades calculadas a partir de $\Psi(x, t)$. Debido a esto, las soluciones en forma separable se denominan **estados estacionarios.** Así, **para estados estacionarios, todas las probabilidades son estáticas** y pueden calcularse a partir de la función de onda $\psi(x)$ independiente del tiempo.

6.4 PARTÍCULA EN UNA CAJA

De los problemas que implican fuerzas, el más simple es el del confinamiento de una partícula. Considere una partícula que se mueve a lo largo del eje x entre los puntos $x = 0$ y $x = L$, donde L es la longitud de la "caja". Dentro de la caja la partícula es libre; sin embargo, en los puntos extremos experimenta fuerzas intensas que sirven para contenerla. Un ejemplo sencillo es una pelota que

[7] Una vez reagrupada, la ecuación de Schrödinger especifica la segunda derivada de la función de onda $d^2\psi/dx^2$ en cualquier punto como

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}[U(x) - E]\psi(x)$$

Se concluye que si $U(x)$ es finita en x, entonces la segunda derivada también es finita aquí y la pendiente $d\psi/dx$ es continua.

rebota elásticamente entre dos paredes impenetrables (figura 6.5). Un ejemplo más complicado es una partícula cargada desplazándose a lo largo del eje de tubos metálicos alineados que se mantienen a potenciales diferentes, como se muestra en la figura 6.6a. El tubo central está conectado a tierra, de modo que una carga de prueba dentro de este tubo tiene una energía potencial eléctrica igual a cero y no experimenta ninguna fuerza eléctrica. Cuando los dos tubos externos se mantienen a un potencial eléctrico alto V, dentro de ellos no se genera ningún campo eléctrico, aunque entre los puntos 0 y L se generan campos de repulsión intensos. La energía potencial $U(x)$ para esta situación se muestra en la figura 6.6b. A medida que V aumenta sin límite y los espacios se reducen simultáneamente a cero, se tiende a la idealización conocida como *pozo cuadrado infinito*, o potencial de la "caja" (figura 6.6c).

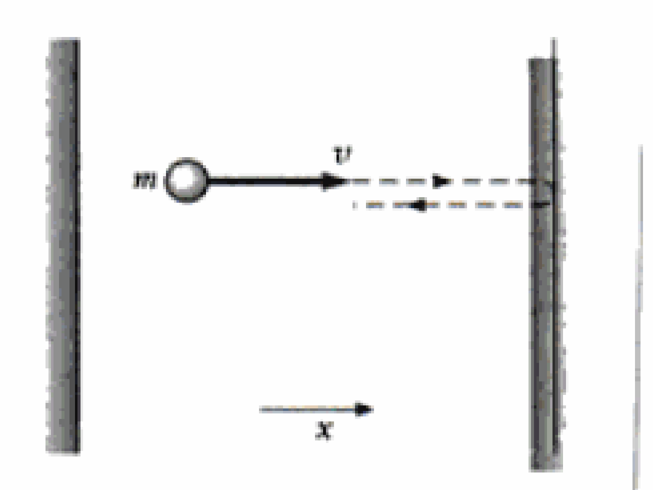


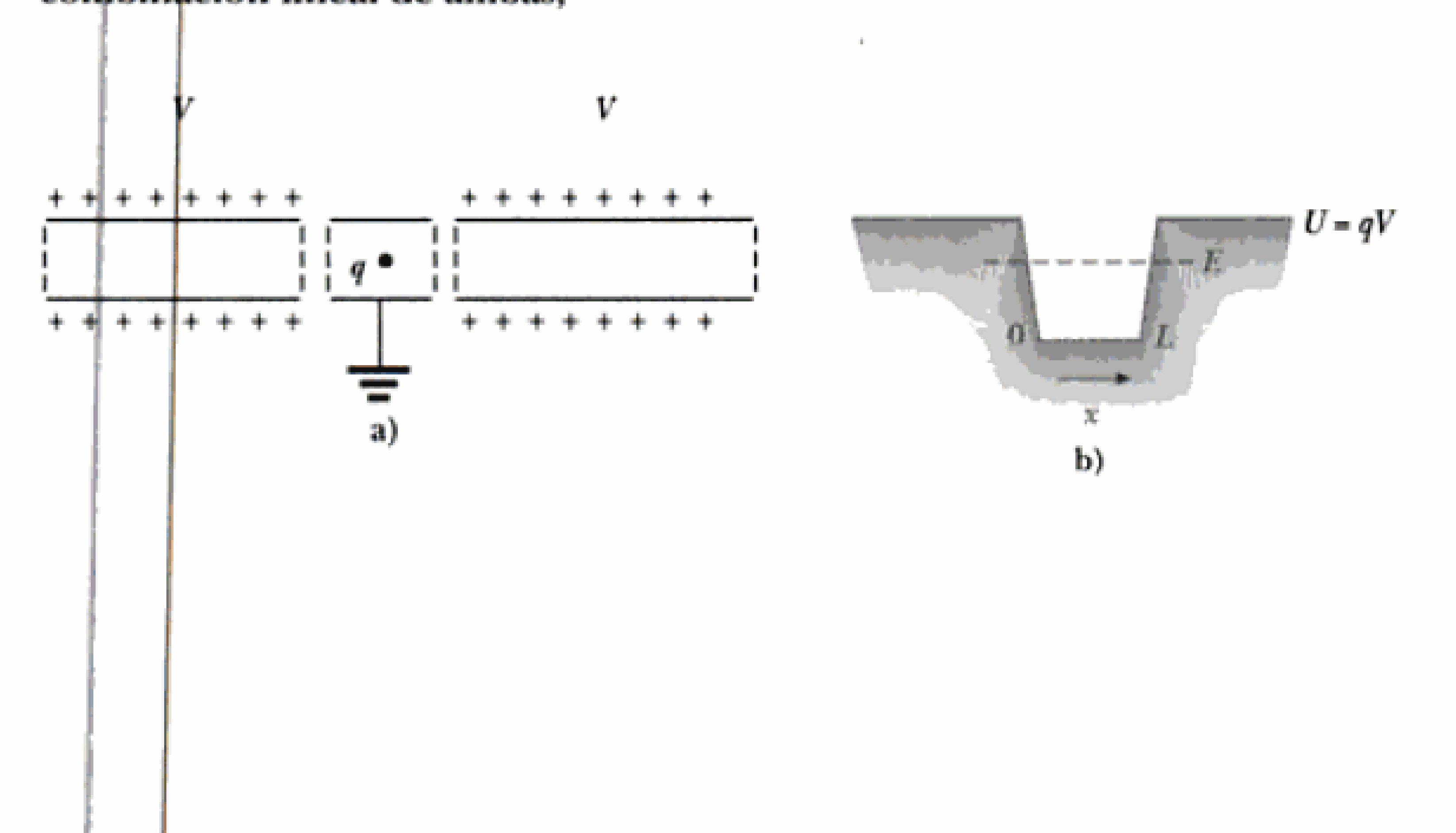
Figura 6.5 Partícula de masa m y velocidad v, que rebota elásticamente entre dos paredes impenetrables.

Desde un punto de vista clásico, nuestra partícula simplemente rebota de un lado a otro entre las paredes de confinamiento de la caja. Su velocidad permanece constante, así como su energía cinética. Además, la física clásica no impone ninguna restricción sobre los valores de su cantidad de movimiento o de su energía. La descripción cuántica es bastante diferente y conduce al interesante fenómeno de cuantización de la energía.

Se quiere calcular la función de onda $\psi(x)$ independiente del tiempo de nuestra partícula. Debido a que la partícula está confinada en la caja, nunca puede encontrarse fuera de ésta, lo cual requiere que ψ sea cero en las regiones exteriores $x < 0$ y $x > L$. Dentro de la caja, $U(x) = 0$ y la ecuación 6.13 para $\psi(x)$ se convierte, luego de algunos reordenamientos, en

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -k^2\psi(x) \qquad \text{con} \qquad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

Dos soluciones independientes de esta ecuación son sen kx y cos kx, lo cual indica que k es el número de onda de oscilación. La solución más general es una combinación lineal de ambas,



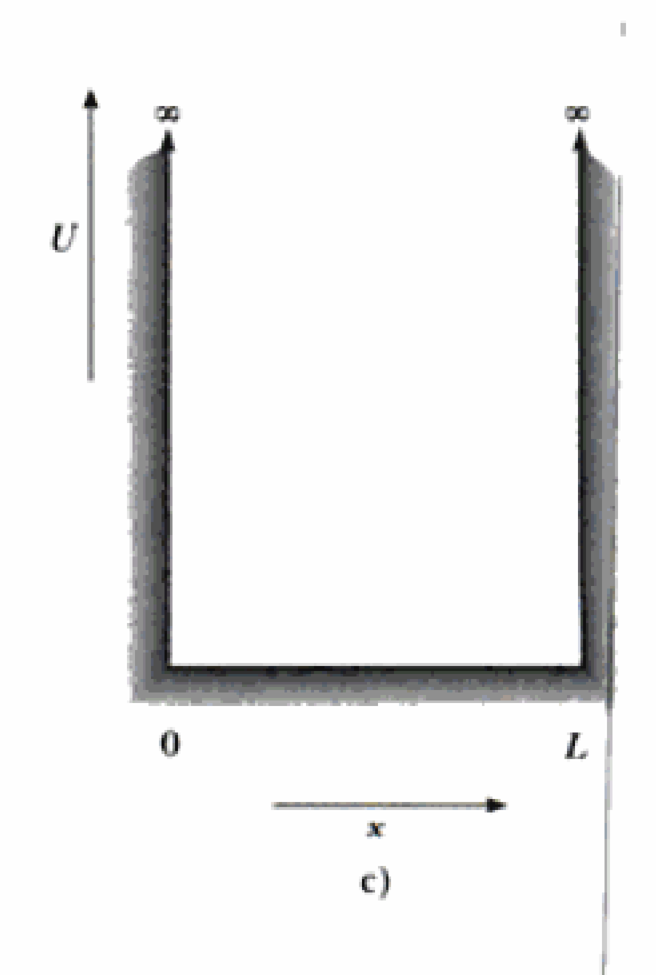


Figura 6.6 a) Los cilindros metálicos alineados sirven para confinar una partícula cargada. El cilindro interior está conectado a tierra, mientras que los exteriores se mantienen a algún potencial eléctrico alto V. Una carga q se mueve libremente en el interior de los cilindros, pero encuentra fuerzas eléctricas en los intervalos que los separan. b) La energía potencial eléctrica que ve esta carga. Una carga cuya energía total es menor que qV está confinada en el cilindro central debido a las intensas fuerzas de repulsión en el intervalo entre $x = 0$ y $x = L$. c) A medida que se incrementa V y los espacios entre los cilindros se hacen más estrechos, la energía potencial tiende a la del pozo cuadrado infinito.

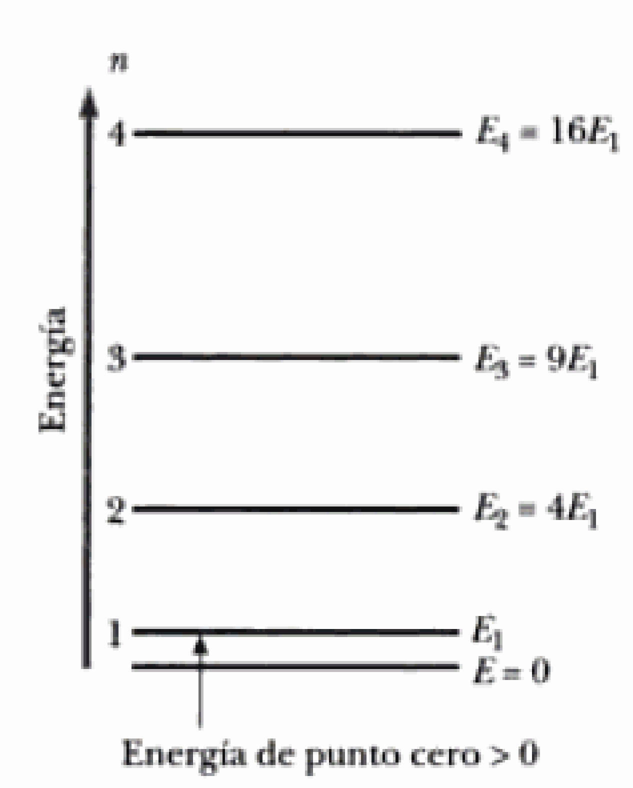


Figura 6.7 Diagrama de los niveles energéticos para una partícula confinada en una caja unidimensional de ancho L. La mínima energía permitida es E_1, con valor $\pi^2\hbar^2/2mL^2$.

Energías permitidas para una partícula en una caja

$$\psi(x) = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx \qquad \text{para } 0 < x < L \tag{6.15}$$

Para que $\psi(x)$ sea continua en todas partes, esta onda interna debe coincidir con la onda externa al ser evaluadas en las paredes de la caja.[8] Por tanto, se requiere que la onda interna sea cero en $x = 0$ y $x = L$:

$$\begin{aligned} \psi(0) &= B = 0 && \text{(continuidad en } x = 0) \\ \psi(L) &= A \operatorname{sen} kL = 0 && \text{(continuidad en } x = L) \end{aligned} \tag{6.16}$$

La última condición requiere que $kL = n\pi$, donde n es cualquier entero positivo.[9] Debido a que $k = 2\pi/\lambda$, lo anterior equivale a ajustar un número entero de semilongitudes de onda en la caja (vea la figura 6.9a). Al usar $k = n\pi/L$, se encuentra que la energía de la partícula está *cuantizada*, restringida a los valores

$$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{6.17}$$

La mínima energía permitida está dada por $n = 1$ y es $E_1 = \pi^2\hbar^2/2mL^2$. Este es el **estado base.** Debido a que $E_n = n^2E_1$, los **estados excitados** para los cuales $n = 2, 3, 4,\ldots$, tienen energías $4E_1, 9E_1, 16E_1,\ldots$ En la figura 6.7 se muestra un diagrama de los niveles energéticos. Observe que $E = 0$ no está permitido; es decir, *la partícula nunca puede estar en reposo.* La energía mínima que puede tener la partícula, E_1, se denomina **energía de punto cero.** Este resultado contradice, de manera evidente, la predicción clásica, para la cual $E = 0$ es una energía aceptable, como son todos los valores positivos de E. El siguiente ejemplo ilustra cómo esta contradicción se reconcilia con la experiencia cotidiana.

EJEMPLO 6.5 Cuantización de energía para un objeto macroscópico

Un objeto pequeño de 1 mg de masa está confinado a moverse entre dos paredes rígidas separadas por 1 cm. a) Encuentre la velocidad mínima del objeto. b) Si la velocidad es de 3 cm/s, encuentre el valor correspondiente de n.

Solución Tratando esta situación como una partícula en una caja, la energía de la partícula sólo puede ser uno de los valores dados por la ecuación 6.17, o bien,

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} = \frac{n^2h^2}{8mL^2}$$

La energía mínima se obtiene al tomar $n = 1$. Para $m = 1$ mg y $L = 1$ cm, se calcula

$$E_1 = \frac{(6.626 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})^2}{8 \times 10^{-10}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2} = 5.49 \times 10^{-58}\,\text{J}$$

Debido a que toda la energía es cinética, $E_1 = mv_1^2/2$, la velocidad mínima v_1 de la partícula es

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{2(5.49 \times 10^{-58}\,\text{J})/(1 \times 10^{-6}\,\text{kg})} \\ &= 3.31 \times 10^{-26}\,\text{m/s} \end{aligned}$$

Esta velocidad es inconmensurablemente pequeña, de modo que, para efectos prácticos, puede considerarse que el objeto está en reposo. De hecho, el tiempo necesario para que un objeto a esta velocidad se mueva el centímetro que separa las paredes es aproximadamente 3×10^{23} s,

[8] Aunque $\psi(x)$ debe ser continua en todas partes, la pendiente de $d\psi/dx$ *no es* continua en las paredes de la caja, donde $U(x)$ se vuelve infinita (cfr. la nota de pie de página 7).

[9] Para $n = 0$ ($E = 0$), la ecuación de Schrödinger requiere $d^2\psi/dx^2 = 0$, cuya solución está dada por $\psi(x) = Ax + B$ para alguna elección de las constantes A y B. Para que esta función de onda se vuelva cero en $x = 0$ y $x = L$, tanto A como B deben ser cero, dejando que $\psi(x)$ sea igual a 0 en todas partes. En tal caso, la partícula no está en ninguna parte para localizarla; es decir, ninguna descripción es posible cuando $E = 0$. También, la inclusión de enteros negativos $n < 0$ no produce ningún estado nuevo, ya que cambiar el signo de n simplemente cambia el signo de la función de onda, lo que lleva a las mismas probabilidades que para enteros positivos.

esto es ¡alrededor de 1 millón de veces la edad del universo! Podemos reafirmar esto verificando que la mecánica cuántica aplicada a objetos macroscópicos no contradice la experiencia cotidiana.

Si, en vez de lo anterior, la velocidad de la partícula es $v = 3$ cm/s, entonces su energía es

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{(1 \times 10^{-6}\ \text{kg})(3 \times 10^{-2}\ \text{m/s})^2}{2}$$
$$= 4.50 \times 10^{-10}\ \text{J}$$

Este, también, debe ser uno de los valores permitidos E_n. Para encontrar cuál, se despeja el número cuántico, obteniendo

$$n = \frac{\sqrt{8mL^2E}}{h}$$
$$= \frac{\sqrt{(8 \times 10^{-10}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)(4.50 \times 10^{-10}\ \text{J})}}{6.626 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}$$
$$= 9.05 \times 10^{23}$$

Observe que el número cuántico que representa una velocidad típica para este objeto de tamaño ordinario es enorme. De hecho, el valor de n es tan grande que nunca es posible distinguir la naturaleza cuantizada de los niveles energéticos. Es decir, la diferencia en energía entre dos estados consecutivos con números cuánticos $n_1 = 9.05 \times 10^{23}$ y $n_2 = 9.05 \times 10^{23} + 1$ es sólo de aproximadamente 10^{-33} J, demasiado pequeña para detectarse en forma experimental. Este es otro ejemplo que ilustra cómo funciona el principio de correspondencia de Bohr, el cual establece que las predicciones cuánticas deben coincidir con los resultados clásicos para masas y longitudes grandes.

EJEMPLO 6.6 Modelo de un átomo

Un átomo puede verse como un núcleo de carga positiva alrededor del que se mueven un número de electrones sometidos principalmente a la fuerza de atracción de Coulomb (la cual en realidad "es apantallada" en parte por los electrones que intervienen). En la figura 6.8 se muestra un bosquejo del pozo de potencial que "ve" cada electrón. Use el modelo de una partícula en una caja para calcular la energía (en eV) necesaria para llevar a un electrón del estado $n = 1$ al estado $n = 2$, suponiendo que el radio del átomo mide 0.100 nm.

Solución Si se considera que la longitud L de la caja mide 0.200 nm (el diámetro del átomo), $m_e = 511$ keV/c^2, y $\hbar c = 197.3$ eV·nm para el electrón, se calcula

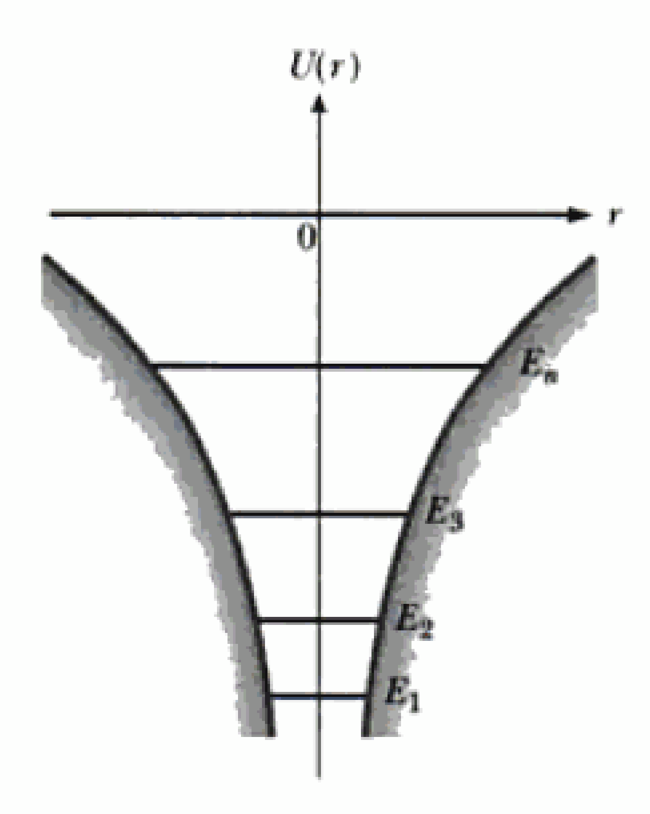


Figura 6.8 (Ejemplo 6.6) Modelo de la energía potencial contra r para el átomo con un solo electrón.

$$E_1 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m_eL^2}$$
$$= \frac{\pi^2(197.3\ \text{eV}\cdot\text{nm}/c)^2}{2(511 \times 10^3\ \text{eV}/c^2)(0.200\ \text{nm})^2}$$
$$= 9.40\ \text{eV}$$

y

$$E_2 = (2)^2E_1 = 4(9.40\ \text{eV}) = 37.6\ \text{eV}$$

En consecuencia, la energía que debe suministrarse al electrón es

$$\Delta E = E_2 - E_1 = 37.6\ \text{eV} - 9.40\ \text{eV} = 28.2\ \text{eV}$$

También es posible calcular la longitud de onda del fotón que se emitiría en esta transición si identificamos ΔE con la energía del fotón hc/λ, o bien,

$$\lambda = hc/\Delta E = (1.24 \times 10^3\ \text{eV}\cdot\text{nm})/(28.2\ \text{eV}) = 44\ \text{nm}$$

Esta longitud de onda está en la región del ultravioleta lejano y es interesante observar que el resultado es aproximadamente correcto. Aunque este modelo muy simple proporciona una estimación aceptable para transiciones entre los niveles más bajos del átomo, ésta se vuelve progresivamente menos precisa para transiciones en niveles superiores.

Ejercicio 1 Calcule la velocidad mínima de un electrón atómico modelado como una partícula en una caja, cuyas paredes están a una distancia de 0.200 nm.
Respuesta 1.82×10^6 m/s.

Volviendo a las funciones de onda, de la ecuación 6.15 (con $k = n\pi/L$ y $B = 0$) se tiene

Estados estacionarios para una partícula en una caja

$$\psi_n(x) = A \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad \text{para } 0 < x < L \text{ y } n = 1, 2, \ldots \qquad (6.18)$$

Para cada valor del número cuántico n hay una función de onda específica $\psi_n(x)$ que describe el estado de la partícula con energía E_n. En la figura 6.9 se muestran gráficas de ψ_n contra x y la densidad de probabilidad $|\psi_n|^2$ contra x para $n = 1$, 2 y 3, correspondiente a los tres niveles energéticos más bajos permitidos para la partícula. Para $n = 1$, la probabilidad de encontrar a la partícula es mayor en $x = L/2$: ésta es la *posición más probable* para una partícula en este estado. Para $n = 2$, $|\psi_n|^2$ tiene un máximo en $L/4$ y de nuevo en $x = 3L/4$: ambos puntos son sitios igualmente probables para encontrar a una partícula en este estado.

También hay puntos en el interior de la caja donde es imposible encontrarla. De nuevo para $n = 2$, $|\psi_n|^2$ es cero en el punto medio, $x = L/2$; para $n = 3$, $|\psi_n|^2$ es cero en $x = L/3$ y en $x = 2L/3$, y así sucesivamente. Pero lo anterior plantea una pregunta interesante: ¿Cómo hace la partícula para ir de un sitio a otro cuando no hay probabilidad de que se localice en puntos intermedios? Es como *si no hubiera en absoluto ninguna trayectoria*, y no sólo que las probabilidades $|\psi|^2$ expresen nuestra ignorancia acerca de un mundo oculto a simple vista. En efecto, lo que está en juego aquí es la esencia misma de una partícula como algo que va de un sitio a otro al ocupar todas las posiciones intermedias. Los objetos con los que trata la mecánica cuántica no son partículas, sino cosas más complicadas que poseen a la vez atributos de corpúsculo *y de onda.*

Las probabilidades sólo pueden calcularse después de normalizar ψ_n; es decir, se debe tener la certeza de que la suma de todas las probabilidades es igual a la unidad:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_n(x)|^2\, dx = A^2 \int_0^L \operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

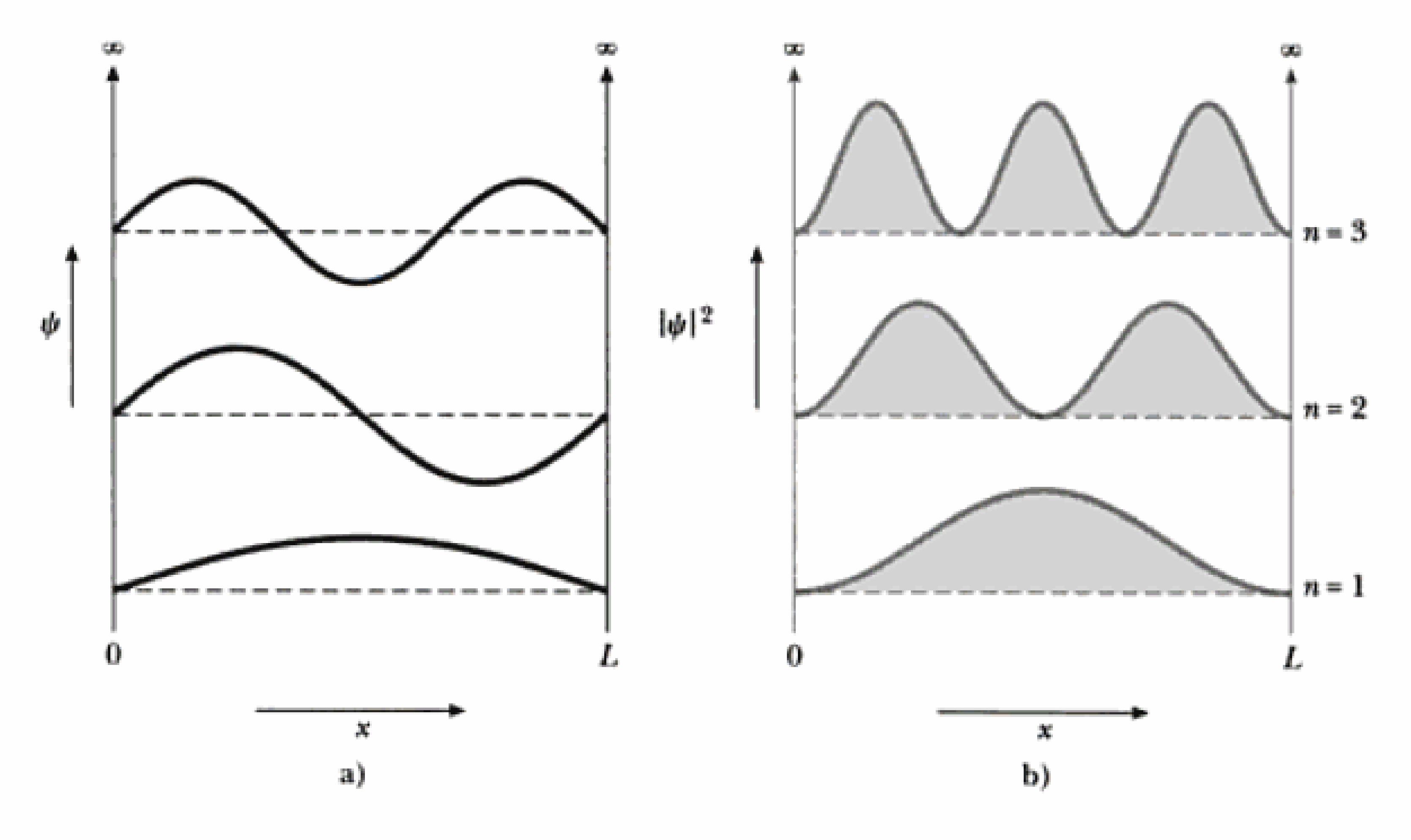


Figura 6.9 Los tres primeros estados estacionarios permitidos para una partícula confinada a una caja unidimensional. a) Funciones de onda para $n = 1$, 2 y 3. b) Distribuciones de probabilidad para $n = 1$, 2 y 3.

La integral se evalúa con ayuda de la identidad trigonométrica $2\ \text{sen}^2\ \theta = 1 - \cos 2\theta$:

$$\int_0^L \text{sen}^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^L [1 - \cos(2n\pi x/L)]\ dx$$

Sólo el primer término contribuye a la integral, ya que la integral del coseno conduce a la función $\text{sen}(2n\pi x/L)$, la que se anula en los límites 0 y L. Así, la normalización requiere que $1 = A^2L/2$, o bien,

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}} \tag{6.19}$$

EJEMPLO 6.7 Probabilidades para una partícula en una caja

Se sabe que una partícula está en el estado base de un pozo cuadrado infinito de longitud L. Calcule la probabilidad de que esta partícula se encuentre en la región central del pozo; es decir, entre $x = L/4$ y $x = 3L/4$.

Solución La densidad de probabilidad está dada por $|\psi_n|^2$ con $n = 1$ para el estado base. Así, la probabilidad es

$$P = \int_{L/4}^{3L/4} |\psi_1|^2\ dx = \left(\frac{2}{L}\right)\int_{L/4}^{3L/4} \text{sen}^2(\pi x/L)\ dx$$

$$= \left(\frac{1}{L}\right)\int_{L/4}^{3L/4} [1 - \cos(2\pi x/L)]\ dx$$

$$= \left(\frac{1}{L}\right)\left[\frac{L}{2} - \left(\frac{L}{2\pi}\right)\text{sen}(2\pi x/L)\Big|_{L/4}^{3L/4}\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2\pi}\right)[-1 - 1] = 0.818$$

Observe que esto es considerablemente mayor que $\frac{1}{2}$, lo que sería de esperar para una partícula clásica que pasa el mismo tiempo en todas las partes del pozo.

Ejercicio 2 Repita el cálculo del ejemplo 6.7 para una partícula en el n-ésimo estado del pozo cuadrado infinito, y demuestre que el resultado tiende al valor clásico $\frac{1}{2}$ en el límite cuando $n \rightarrow \infty$.

Dispositivos acoplados por carga

Los pozos de potencial son esenciales para la operación de muchos dispositivos electrónicos modernos, aunque rara vez la forma del pozo es tan simple que puede modelarse de manera precisa por el pozo cuadrado infinito que se analizó en esta sección. El dispositivo acoplado por carga (CCD, por sus iniciales en inglés), utiliza pozos de potencial para atrapar electrones y crear una reproducción electrónica fiel de la intensidad de luz a través de la superficie activa.

Desde hace más de dos décadas, los CCD han ayudado a los astrónomos a ver con extraordinario detalle las galaxias distantes, utilizando tiempos de exposición mucho menores que con las emulsiones fotográficas tradicionales (figura 6.10). Estos dispositivos consisten de un arreglo bidimensional de cajas móviles de electrones (o pozos) debajo de un conjunto de electrodos formados sobre la superficie de un microcircuito delgado de silicio (figura 6.11). El silicio sirve para dos cosas: emitir un electrón cuando es golpeado por un fotón y actuar como una trampa local para electrones. La energía potencial que observa un electrón en este entorno se muestra por la curva a la derecha de la figura 6.11, donde la coordenada que describe profundidad crece hacia abajo. Aunque



Figura 6.10 Investigadores de la Universidad Estatal de Arizona, usando el telescopio espacial Hubble de la NASA, consideran estar viendo la conclusión de la época cósmica, donde las galaxias jóvenes empezaron a brillar en cantidades fantásticas hace aproximadamente 13 mil millones de años. La imagen muestra algunos de los objetos descubiertos por el equipo utilizando la nueva cámara avanzada para investigaciones del Hubble, basada en tecnología CCD. Los astrónomos creen que estos numerosos objetos son jóvenes estrellas lejanas en formación de galaxias vistas cuando el universo era siete veces menor que en la actualidad (a corrimientos hacia el rojo aproximadamente iguales a 6) y menores a mil millones de años de antigüedad. (*H-J. Yan, R. Windhort y S. Cohen, Universidad Estatal de Arizona y NASA.*)

está muy lejos de ser una "caja" de potencial, la pared del pozo sirve no obstante para confinar los electrones emitidos. [Cada pozo o elemento de la fotografía (pixel) en el arreglo también está aislado eléctricamente de sus vecinos, confinando a los electrones en las dos dimensiones restantes perpendiculares a la figura.] El número de electrones en un pozo dado, y por consiguiente el número de fotones que inciden en un punto particular del microcircuito, pueden leerse electrónicamente y la señal puede procesarse por computadora para mejorar la imagen. El término "dispositivo acoplado por carga" fue acuñado para describir la forma en que se leen las señales de los pozos individuales. Una fila de pozos que contienen electrones atrapados se mueve en sentido vertical, un paso a la vez, al cambiar progresivamente el voltaje sobre los electrodos verticales. Cuando una fila llega al registro de salida, los pixeles se mueven horizontalmente al cambiar de manera sistemática el voltaje sobre los electrodos horizontales. De esta forma toda una fila se lee de manera seriada mediante un amplificador al final del registro de salida. En la figura 6.12 se ilustra el principio de operación. El desarrollo de los CCD ha sido impresionante durante las dos últimas décadas, y actualmente hay disponibles arreglos cuadrados de más de 4 millones de pixeles (2 048 pixeles por lado) empacados en un microcircuito de varios centímetros cuadrados. En la figura 6.13a se muestra un sensor CCD completo; en la figura 6.13b se muestra la sección transversal de un solo pixel en un sensor CCD de imagen, amplificado 5 000 veces.

Los sensores CCD de imágenes poseen varias ventajas con respecto a otros detectores de luz. Debido a que detectan hasta 90% de los fotones que inciden sobre su superficie, son mucho más sensibles que las mejores emulsiones fotográficas, que sólo pueden detectar de 2% a 3% de aquellos fotones que han recorrido millones de años luz desde galaxias distantes. Además, pueden medir con precisión la brillantez exacta de un objeto, ya que su voltaje de salida es directamente proporcional a la entrada de luz sobre un intervalo muy amplio de brillantez. Otra gran característica es su capacidad para medir con exactitud tanto objetos tenues como brillantes en el mismo marco. Esto no es cierto para las emulsiones fotográficas, donde los objetos brillantes desvanecen los detalles tenues. Los objetos tenues son registrados mediante el enfriamiento del CCD con nitrógeno líquido a fin de mantener al mínimo a los competitivos electrones generados térmicamente (ruido). La medición simultánea de imágenes brillantes está limitada sólo por el llenado de pozos de potencial con electrones. Los CCD actuales son capaces de retener hasta 100 000 electrones en un solo pozo y son aproximadamente 100 veces mejores que las placas fotográficas al registrar en forma simultánea objetos brillantes y tenues. La capacidad de registrar el sitio donde colisiona un electrón incidente también es importante para encontrar la ubicación exacta de una estrella tenue. Permiten registros con una exactitud geométrica excepcional porque la posición de cada pixel está defini-

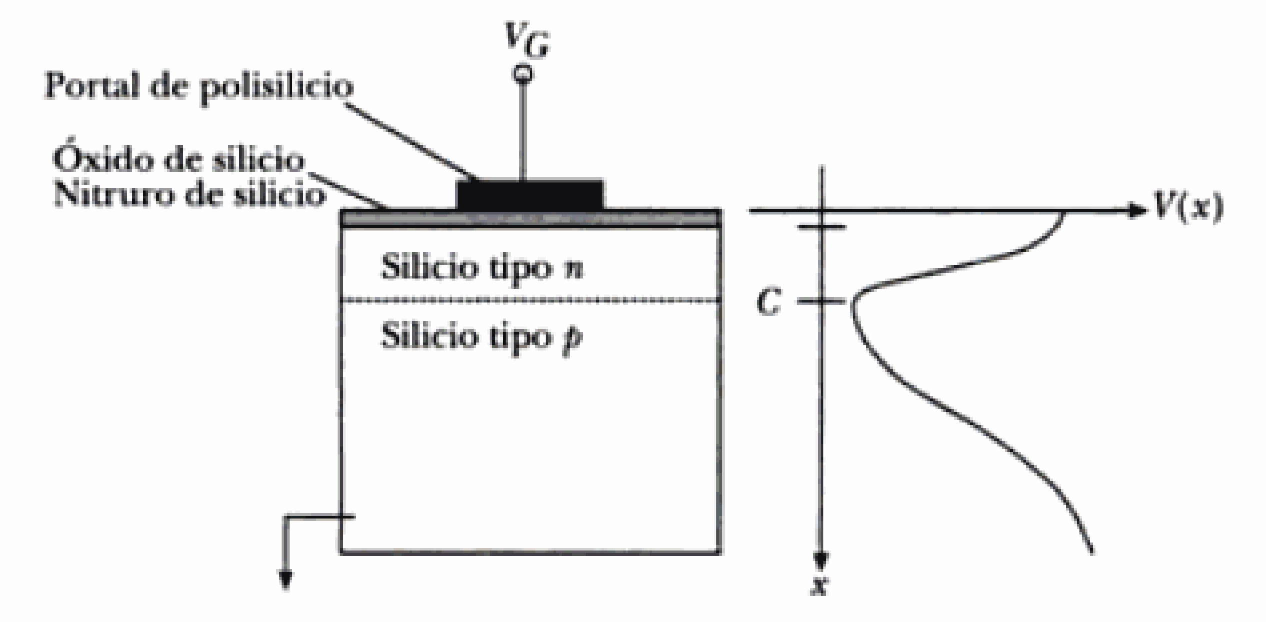


Figura 6.11 Estructura de un elemento de fotografía (pixel)en un arreglo CCD. El bosquejo de la derecha muestra cómo la energía potencial de un electrón varía con la profundidad en el dispositivo.



Figura 6.12 En esta secuencia de diagramas se muestra el principio de operación del generador de imágenes CCD; cada diagrama corresponde a un pequeño segmento cerca del borde superior del dispositivo. Las bandas de barras grises y blancas funcionan como un sistema de bandas transportadoras electrónicas. Las barras blancas representan zonas de bajo potencial eléctrico, denominadas pozos de potencial, donde se capturan los fotoelectrones (*puntos grises*); las barras grises son zonas de mayor potencial eléctrico que actúan como barreras para mantener a los electrones en los pozos de potencial. Las tres barras verticales en cada diagrama son canales de conducción de electrones "enterrados" en el cuerpo de la sección generadora de imágenes del dispositivo: la banda horizontal a través de la parte superior es el registro de salida en serie. En cada canal se muestran tres pixeles. A su vez, cada pixel está subdividido en tres partes: una parte baja (el pozo de potencial) y dos partes altas (las barreras de potencial). Las alturas de las tres partes pueden cambiarse por medio de tres conjuntos de electrodos denominados portales (que no se muestran aquí), los cuales pasan a través de la superficie del microcircuito formando ángulos rectos con los canales y funcionan de manera coordinada para mover los electrones a lo largo de los canales. El movimiento lateral de los electrones hacia afuera de los canales es impedido por barreras permanentes, denominadas detenciones del canal (*líneas negras gruesas*). En a) se expone el CCD. Los fotones, o cuantos de luz, penetran al microcircuito desde la parte posterior. Cada fotón puede liberar un electrón de la estructura cristalina regular del silicio. Los electrones son almacenados de manera expedita en el pozo de potencial más próximo. Una vez que termina la exposición, la imagen se lee moviendo de manera sistemática los pozos de potencial con sus paquetes de carga atrapados. En primer lugar, el nivel de la siguiente barrera hacia el registro de salida se baja al mismo nivel que el pozo. Luego, los electrones se dividen entre los dos pozos. Por último, el nivel del pozo original se eleva, de modo que se transforma en una barrera *b*). El efecto de esta operación es mover los electrones un tercio de pixel hacia arriba. Después de dos desplazamientos más (*c, d*) el patrón de carga completo se ha movido todo un pixel hacia arriba y los electrones que estaban en el renglón superior de pixeles se han depositado en el registro de salida. Luego, la misma técnica se aplica para mover este renglón de pixeles junto con el registro de salida hacia la izquierda (e, *f*). A su vez un amplificador situado en el extremo del registro de salida mide cada paquete de carga, leyendo así todo un renglón. Luego se repite el proceso, leyendo cada renglón hasta que todo el microcircuito ha vaciado su información. (*Tomada de "Charged-coupled Devices in Astronomy", de Jerome Kristian y Morley Blouke, © Octubre de 1982 por Scientific American, Inc. Reservados todos los derechos.*)

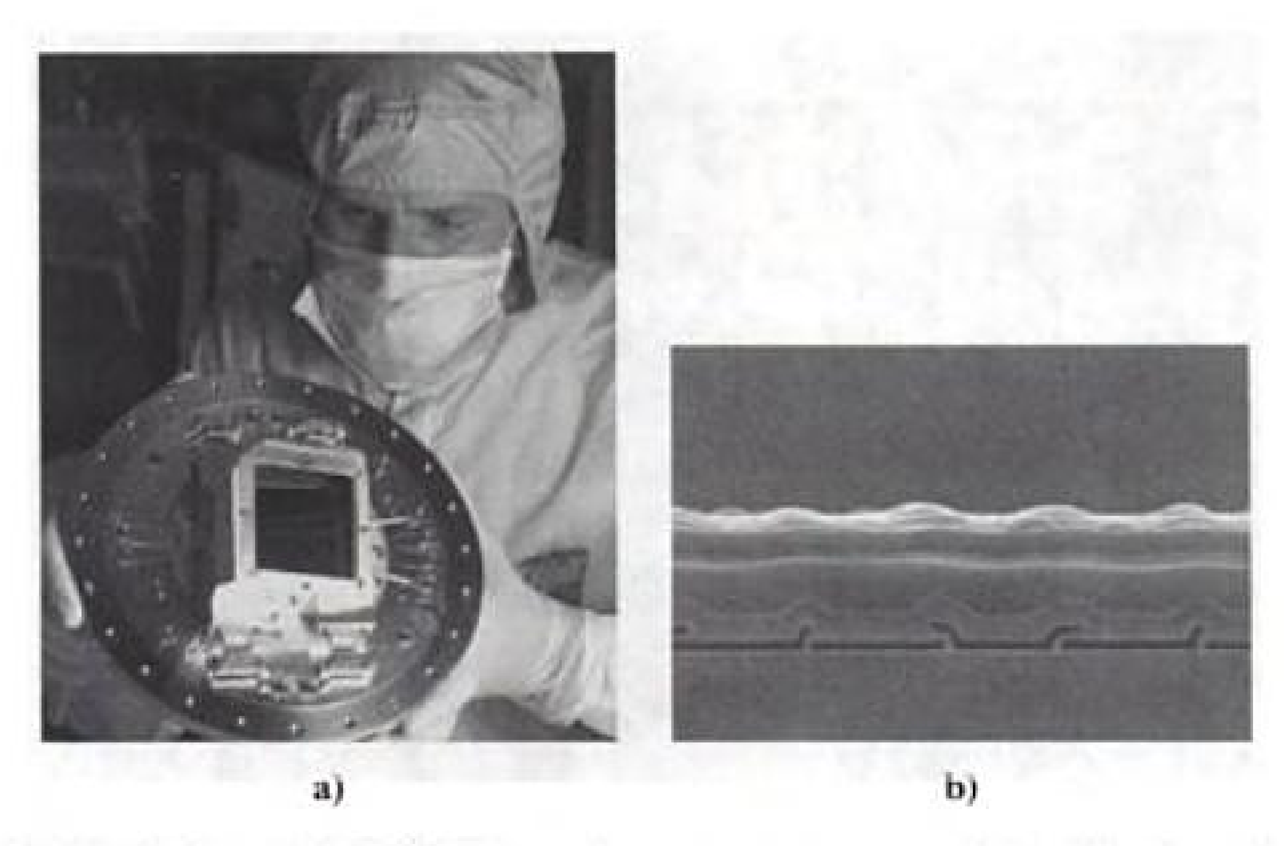


Figura 6.13 a) Una bola CCD integrada en una nave espacial, utilizada en la cámara avanzada para investigaciones, a bordo del telescopio espacial Hubble. El cuadrado plano en el centro es el microcircuito del CCD. (*Foto cortesía de Ball Aerospace and Technologies Corp.*) b) Sección transversal de un pixel en la sección generadora de imágenes de un detector de imágenes CCD sw 1 024 × 1 024 de Scientific Imaging Technologies. La imagen está amplificada alrededor de 5 000 diámetros en esta foto SEM. La sección transversal es a lo largo de un corte vertical en el microcircuito y muestra alrededor de $1\frac{1}{3}$ de pixeles. La estructura escalonada característica se forma mediante las tres capas superpuestas de silicio policristalino (polisilicio), el cual funciona como los electrodos. Cada electrodo de primer nivel es un listón de polisilicio de ocho micras de ancho (aproximadamente la vigésima parte del grosor de un cabello humano) y 24 mm de largo, cuya dirección es hacia adentro y hacia afuera de la página. En un simple microcircuito hay alrededor de 84 pies de este listón en cada uno de los tres conjuntos de electrodos. (*Foto cortesía de Scientific Imaging Technologies.*)

da por la rígida estructura física del microcircuito. (Debido a su alta resolución y exactitud geométrica, también se utilizan para registrar las trayectorias de partículas elementales energéticas al capturar los electrones generados a lo largo de sus caminos.) Por último, el ruido global y la degradación de la señal dismi-

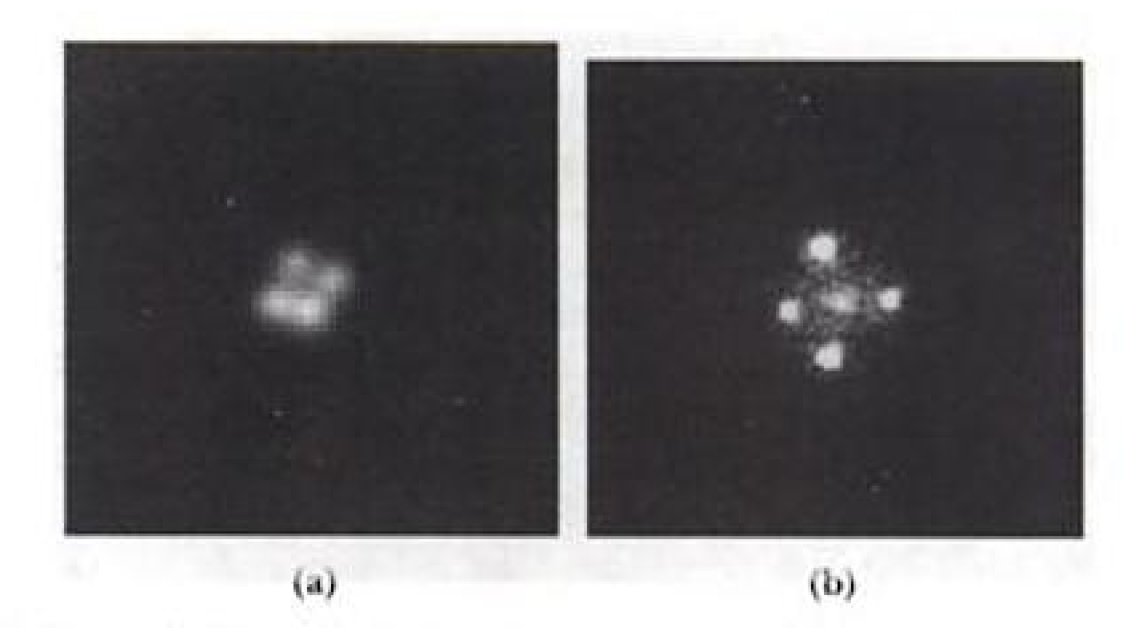


Figura 6.14 La "hoja del trébol", el cuásar H1413+117 de lente cuádruple. La separación de las cuatro imágenes de brillantez comparable mide sólo 1 arcseg. Los espectros de dos de las imágenes son idénticos, excepto por algunas líneas de absorción en una que presumiblemente proviene de diferentes nubes gaseosas que están en la línea de visión de la otra. El corrimiento hacia el rojo es 2.55. La extraña configuración y los espectros idénticos muestran que se observa un enfoque gravitacional, más que una acumulación de cuásares. a) Imagen desde tierra tomada con una cámara CCD conectada al telescopio ESO/MPI de 2.2 m en La Silla (Chile). (*P. Magain, European Space Observatory. Reproducida con autorización de Nature (334:325), copyright (1988) Macmillan Publishers Ltd.*) b) Vista con el telescopio espacial Hubble, donde aparece la galaxia enfocada. (*NASA/ESA.*)

nuyen de forma tan marcada en ellos, que hasta 99.9999% de los electrones son transferidos en cada cambio de pozo. Esto es crucial porque la lectura de imágenes implica miles de tales transferencias.

En la figura 6.14a se muestra un cuásar extraordinario tomado con cuatro lentes. Las imágenes múltiples se presentan cuando la luz de un simple cuásar es desviada por fuerzas gravitacionales a medida que pasa cerca de una galaxia durante su recorrido hacia la Tierra. En la figura 6.14b se muestra la imagen de la galaxia captada, con una bella resolución, por el CCD que se encuentra a bordo del Telescopio espacial Hubble. Estas imágenes, y otras semejantes, constituyen pruebas concluyentes de la capacidad superior de los CCD para realizar mediciones de posición extremadamente exactas de objetos tenues en presencia de objetos mucho más brillantes.

6.5 POZO CUADRADO FINITO

OPCIONAL

El potencial de "caja" es una sobresimplificación que en realidad nunca se ha llevado a la práctica. Con la suficiente energía, una partícula puede escapar de cualquier pozo. En la figura 6.15 se muestra la energía potencial para una situación más realista —el pozo cuadrado finito—, y, en esencia, es la que se representa en la figura 6.6b antes de tomar el límite $V \to \infty$. Una partícula clásica con energía E mayor que la altura U del pozo puede cruzar la región comprendida entre $x = 0$ y $x = L$ y penetrar en la región externa, donde se moverá libremente, aunque con una velocidad menor debido a que ahora su energía cinética se ha disminuido a $E - U$.

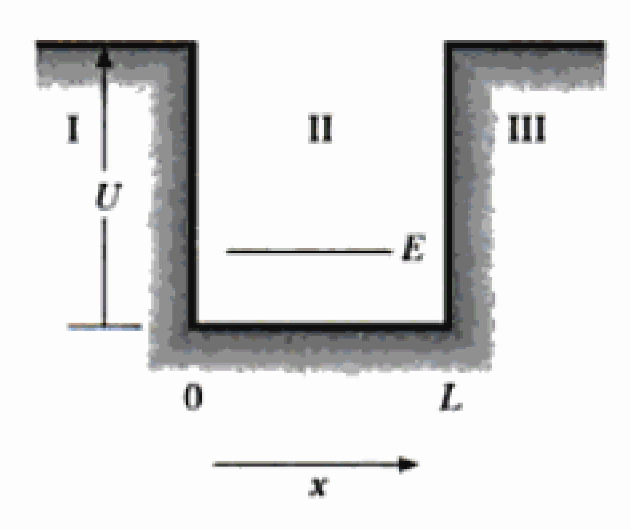


Figura 6.15 Diagrama de la energía potencial para un pozo de altura finita U y ancho L. La energía E de la partícula es menor que U.

Una partícula clásica con energía E menor que U está atrapada en forma permanente en la región $0 < x < L$. No obstante, ¡la mecánica cuántica establece que hay una probabilidad de que la partícula pueda encontrarse *fuera* de esta región! Es decir, la función de onda en general es diferente de cero fuera del pozo, y así la probabilidad de encontrar a la partícula aquí también es diferente de cero. Para estados estacionarios, la función de onda $\psi(x)$ se encuentra a partir de la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. Fuera del pozo, donde $U(x) = U$, esto es

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \alpha^2\psi(x) \qquad x < 0 \text{ y } x > L$$

donde $\alpha^2 = 2m(U - E)/\hbar^2$ es una constante. Debido a que $U > E$, α^2 es necesariamente positiva y las soluciones independientes de esta ecuación son las exponenciales *reales* $e^{+\alpha x}$ y $e^{-\alpha x}$. La exponencial positiva debe rechazarse en la región III donde $x > L$, para mantener a $\psi(x)$ finita cuando $x \to \infty$; de forma análoga, la exponencial negativa debe rechazarse en la región I, donde $x < 0$, para mantener finita a $\psi(x)$ cuando $x \to -\infty$. Así, la onda externa toma la forma

$$\begin{aligned} \psi(x) &= Ae^{+\alpha x} \qquad \text{para } x < 0 \\ \psi(x) &= Be^{-\alpha x} \qquad \text{para } x > L \end{aligned} \tag{6.20}$$

Los coeficientes A y B se determinan al hacer que esta onda se ajuste suavemente a la función de onda en el interior del pozo. En específico, se requiere que $\psi(x)$ y su primera derivada $d\psi/dx$ sean continuas en $x = 0$ y, de nuevo, en $x = L$. Esto sólo puede hacerse para ciertos valores de E, que corresponden a las energías permitidas para la partícula atrapada. Para estas energías, las condiciones de continuidad especifican a la función de onda, excepto por una constante multiplicativa, que luego se determina por normalización. En la figura 6.16 se muestran las funciones de onda y las densidades de probabilidad que resultan para las tres energías más bajas permitidas para la partícula. Observe que en cada caso las funciones se unen de manera continua en las fronteras del pozo de potencial.

El que ψ sea diferente de cero en las paredes *incrementa* la longitud de onda de De Broglie en el pozo (comparada con la del pozo infinito), lo cual a su vez disminuye la energía y la cantidad de movimiento de la partícula. Esta observación puede

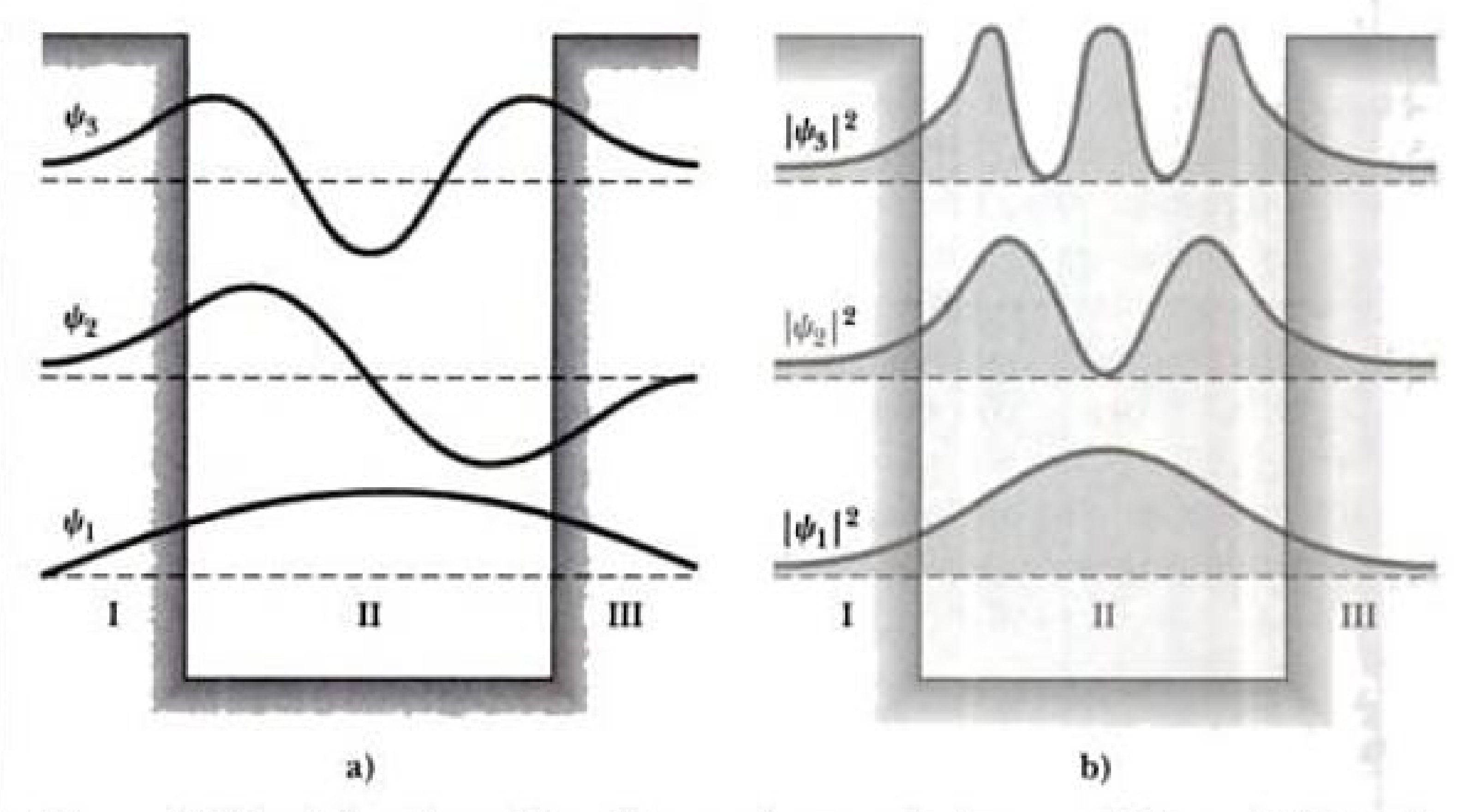


Figura 6.16 a) Funciones de onda para los tres niveles energéticos más bajos de una partícula en un pozo de potencial de altura finita. b) Densidades de probabilidad para los tres niveles energéticos más bajos de una partícula en un pozo de potencial de altura finita.

usarse para aproximar las energías permitidas para una partícula atrapada.[10] La función de onda penetra en la región externa hasta un punto establecido por la **profundidad de penetración** δ, dada por

Profundidad de penetración

$$\delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(U-E)}} \tag{6.21}$$

Específicamente, a una distancia δ más allá del borde del pozo, la amplitud de la onda cae a $1/e$ de su valor en el borde y tiende exponencialmente a cero en la región exterior. Es decir, la onda externa es en esencia cero más allá de una distancia δ a cada lado del pozo de potencial. Si en realidad fuese cero más allá de esta distancia, las energías permitidas serían las de un pozo infinito de longitud $L + 2\delta$ (compare con la ecuación 6.17), o bien,

Energías aproximadas para una partícula en un pozo de altura finita

$$E_n \approx \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2m(L+2\delta)^2} \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{6.22}$$

Las energías permitidas para una partícula atrapada en el pozo finito están dadas aproximadamente por la ecuación 6.22, en tanto δ sea pequeña en comparación con L. Pero, según la ecuación 6.21, la misma δ depende de la energía. Así, la ecuación 6.22 se vuelve una relación implícita para E que debe resolverse numéricamente para un valor de n dado. La aproximación es mejor para los estados inferiores y falla por completo cuando E tiende a U, donde δ se vuelve infinita. A partir de lo anterior se infiere (correctamente) que el número de estados ligados está limitado por la altura U del pozo de potencial. Las partículas con energías E mayores que U no están atrapadas en el pozo; es decir, pueden encontrarse con una probabilidad comparable en las regiones externas. El caso de estados no ligados se analizará en el capítulo siguiente.

[10]Este método de aproximación específico fue reportado por S. Garrett en *Am. J. Phys.* 47:195-196, 1979.

EJEMPLO 6.8 Un electrón confinado

Calcule la energía del estado base para un electrón confinado en un pozo de potencial de 0.200 nm de ancho y 100 eV de altura.

Solución Las ecuaciones 6.21 y 6.22 se resuelven en forma simultánea, aplicando un procedimiento iterativo. Como se espera que $E \ll U$ (= 100 eV), primero se calcula la longitud δ, despreciando E a fin de obtener

$$\delta \approx \frac{\hbar}{\sqrt{2mU}} = \frac{(197.3\text{ eV}\cdot\text{nm}/c)}{\sqrt{2(511\times 10^3\text{ eV}/c^2)(100\text{ eV})}} = 0.0195\text{ nm}$$

Así, el ancho efectivo del pozo (infinito) es $L + 2\delta = 0.239$ nm, para el cual se calcula la energía del estado base:

$$E \approx \frac{\pi^2(197.3\text{ eV}\cdot\text{nm}/c)^2}{2(511\times 10^3\text{ eV}/c^2)(0.239\text{ nm})^2} = 6.58\text{ eV}$$

A partir de esta E se calcula $U - E = 93.42$ eV, y una nueva longitud de penetración

$$\delta \approx \frac{(197.3\text{ eV}\cdot\text{nm}/c)}{\sqrt{2(511\times 10^3\text{ eV}/c^2)(93.42\text{ eV})}} = 0.0202\text{ nm}$$

Esto, a su vez, aumenta el ancho efectivo del pozo a 0.240 nm y disminuye la energía del estado base a $E = 6.53$ eV. El proceso iterativo se repite hasta que se obtiene la exactitud deseada. Otra iteración proporciona el mismo resultado hasta la precisión reportada. Lo anterior coincide de manera excelente con el valor exacto, en este ejemplo alrededor de 6.52 eV.

Ejercicio 3 Las funciones de onda y las energías permitidas para estados ligados en el caso de un pozo cuadrado finito también pueden encontrarse usando exclusivamente métodos numéricos. Consulte nuestro sitio en la red (http://info.-brookscole.com/mp3e) y seleccione QMTools Simulations → Exercise 6.3. El applet muestra la energía potencial de un electrón confinado en un pozo finito de 0.200 nm de ancho y 100 eV de altura. Siga las instrucciones que ahí se proporcionan para sumar una onda estacionaria y determine la energía del estado base. Repita el procedimiento para el primer estado excitado. Compare la simetría y el número de nodos para estas dos funciones de onda. Encuentre el estado ligado más alto para este pozo finito. Cuente los nodos para determinar el estado excitado del que se trata, y así deducir el número total de estados ligados que soporta este pozo.

EJEMPLO 6.9 Energía de un pozo finito: tratamiento exacto

Imponga condiciones de continuidad sobre las funciones de onda interna y externa, y demuestre cómo esto lleva a la cuantización de energía para el pozo cuadrado finito.

Solución Las funciones de onda externas son las funciones exponenciales que decaen, dadas por la ecuación 6.20 con la constante de decaimiento $\alpha = [2m(U - E)/\hbar^2]^{1/2}$. La onda interna es una oscilación con número de onda $k = (2mE/\hbar^2)^{1/2}$, cuya forma es la misma que para el pozo infinito, ecuación 6.15; aquí, ésta se escribe como

$$\psi(x) = C\,\text{sen}\,kx + D\cos kx \qquad \text{para } 0 < x < L$$

Para unir de manera continua esto con la onda externa, insistimos en que la función de onda y su pendiente sean continuas en los bordes del pozo $x = 0$ y $x = L$. En $x = 0$, para una unión continua se requiere

$$A = D \qquad \text{(continuidad de } \psi)$$

$$\alpha A = kC \qquad \left(\text{continuidad de } \frac{d\psi}{dx}\right)$$

Al dividir la segunda ecuación entre la primera se elimina A, quedando

$$\frac{C}{D} = \frac{\alpha}{k}$$

De la misma forma, una unión continua en $x = L$ requiere

$$C \operatorname{sen} kL + D \cos kL = Be^{-\alpha L} \qquad \text{(continuidad de } \psi)$$

$$kC \cos kL - kD \operatorname{sen} kL = -\alpha Be^{-\alpha L} \qquad \left(\text{continuidad de } \frac{d\psi}{dx}\right)$$

De nuevo, al dividir la segunda ecuación entre la primera se elimina B. Luego, al sustituir C/D por α/k se obtiene

$$\frac{(\alpha/k)\cos kL - \operatorname{sen} kL}{(\alpha/k)\operatorname{sen} kL + \cos kL} = -\frac{\alpha}{k}$$

Para un pozo con altura U y ancho L dados, la última relación sólo puede cumplirse para ciertos valores de E (E está contenida en k y α). Para cualquier otra energía, la función de onda no coincidirá de forma continua en los bordes del pozo, dejando una función de onda que es físicamente inadmisible. (Observe que en la ecuación no puede resolverse explícitamente para E; en vez de ello, las soluciones deben obtenerse usando métodos numéricos o gráficos.)

Ejercicio 4 Use el resultado del ejemplo 6.9 para comprobar que la energía del estado base para un electrón confinado a un pozo cuadrado de 0.200 nm de ancho y 100 eV de altura es aproximadamente igual a 6.52 eV.

6.6 OSCILADOR CUÁNTICO

Como ejemplo final de un pozo de potencial en el que pueden obtenerse resultados exactos, se analizará el problema de una partícula sujeta a una fuerza de restitución lineal $F = -Kx$. Aquí, x es el desplazamiento de la partícula con respecto al punto de equilibrio ($x = 0$) y K es la constante de fuerza. La energía potencial correspondiente está dada por $U(x) = \frac{1}{2}Kx^2$. Un sistema físico que se ajusta a esta descripción es una masa atada a un resorte, pero la descripción matemática en realidad se aplica a cualquier objeto que realice pequeños desplazamientos alrededor de un punto de equilibrio estable.

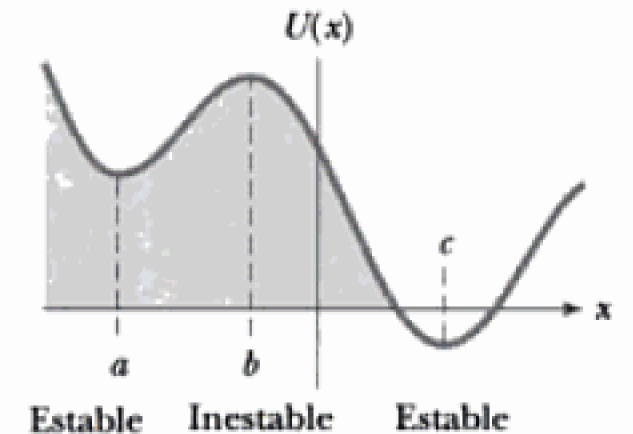


Figura 6.17 Función de potencial general $U(x)$. Los puntos identificados por a y c son puntos de equilibrio estable para los cuales $dU/dx = 0$ y $d^2U/dx^2 > 0$. El punto b es un punto de equilibrio inestable, para el cual $dU/dx = 0$ y $d^2U/dx^2 < 0$.

Considere la función general de potencial que se muestra en la figura 6.17. Las posiciones a, b y c, todas, identifican puntos de equilibrio donde la fuerza $F = -dU/dx$ es cero. Además, las posiciones a y c son ejemplos de equilibrio *estable*, pero b es *inestable*. La estabilidad del equilibrio se determina analizando las fuerzas en la vecindad inmediata del punto de equilibrio. Justo a la izquierda de a, por ejemplo, $F = -dU/dx$ es positiva; es decir, la fuerza está dirigida hacia la derecha; por el contrario, a la derecha de a la fuerza está dirigida hacia la izquierda. En consecuencia, una partícula ligeramente desplazada con respecto al equilibrio en a encuentra una fuerza que la devuelve al punto de equilibrio (fuerza de restitución). Un razonamiento semejante demuestra que el equilibrio en c también es estable. Por otra parte, una partícula desplazada en cualquier dirección con respecto al punto b experimenta una fuerza que la aleja aún más del punto de equilibrio, lo cual es una condición inestable. En general, el equilibrio estable e inestable se identifica por curvas de potencial cóncavas o convexas, respectivamente, en el punto de equilibrio. Para plantearlo de otra forma, **la cur-**

vatura de $U(x)$ es positiva ($d^2U/dx^2 > 0$) en el punto de equilibrio estable, y negativa ($d^2U/dx^2 < 0$) en el punto de equilibrio inestable.

Cerca de un punto de equilibrio estable, como a (o c), $U(x)$ puede ajustarse bastante bien mediante una parábola:

$$U(x) = U(a) + \frac{1}{2}K(x-a)^2 \tag{6.23}$$

Por supuesto, la curvatura de esta parábola (= K) debe corresponder a la de $U(x)$ en el punto de equilibrio $x = a$:

$$K = \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_a \tag{6.24}$$

Además, $U(a)$, la energía potencial en el punto de equilibrio, puede tomarse como cero si se establece que ésta sea la energía de referencia; es decir, si todas las energías se miden a partir de este nivel. En la misma línea de pensamiento, el origen de coordenadas puede ubicarse en $x = a$, permitiendo, en efecto, hacer $a = 0$. Con $U(a) = 0$ y $a = 0$, nuevamente la ecuación 6.23 se vuelve el potencial de un resorte; en otras palabras, **una partícula limitada a pequeños desplazamientos alrededor de cualquier punto de equilibrio estable se comporta como si estuviese sujeta a un resorte con una fuerza constante K prescrita por la curvatura del potencial verdadero en equilibrio.** De esta manera, el oscilador se vuelve una primera aproximación a las vibraciones que ocurren en muchos sistemas reales.

Aproximación armónica a oscilaciones que ocurren en sistemas reales

El movimiento de un oscilador clásico con masa m es una vibración armónica simple de frecuencia angular $\omega = \sqrt{K/m}$. Si la partícula se aleja del equilibrio una distancia A y luego se libera, oscila entre los puntos $x = -A$ y $x = +A$ (A es la amplitud de la vibración), con una energía total $E = \frac{1}{2}KA^2$. Al cambiar el punto inicial en que se libera A, es posible proporcionar a la partícula clásica, en principio cualquier energía (no negativa), incluso cero.

El oscilador cuántico se describe por la energía potencial $U(x) = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ en la ecuación de Schrödinger. Luego de reordenar la expresión se obtiene

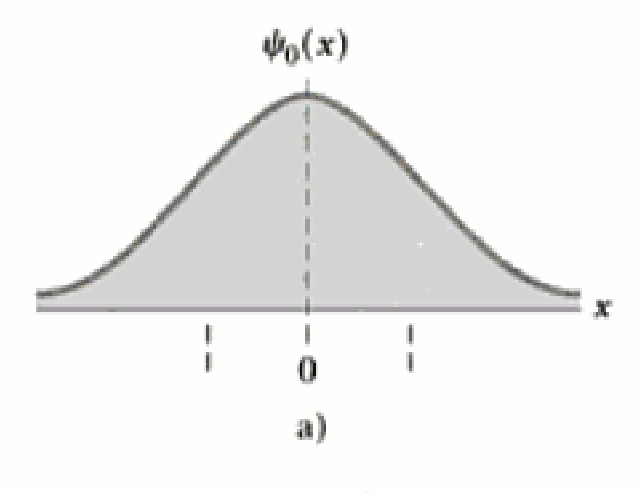
$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2m}{\hbar^2}\left(\frac{1}{2}m\omega^2x^2 - E\right)\psi(x) \tag{6.25}$$

como la ecuación para los estados estacionarios del oscilador. La técnica matemática para resolver esta ecuación rebasa el alcance de este texto. (Las formas exponencial y trigonométrica de ψ utilizadas con anterioridad no funcionan aquí debido a la presencia de x^2 en el potencial.) Es útil, no obstante, hacer algunas suposiciones inteligentes y comprobar su exactitud por sustitución directa. La función de onda del estado base debe poseer las siguientes características:

1. ψ debe ser *simétrica* alrededor del punto medio del pozo de potencial, $x = 0$.
2. ψ *no debe tener nodos*, sino tender a cero para $|x|$ grande.

Ambas expectativas se derivan de nuestra experiencia con los estados energéticos más bajos de los pozos infinito y finito, que tal vez sea conveniente revisar en este momento. La condición de simetría (1) requiere que ψ sea alguna función de x^2; además, la función no debe tener ceros (salvo en el infinito) para satisfacer el requisito (2) de la ausencia de nodos. La elección más simple que cumple ambas condiciones es la forma gaussiana

$$\psi(x) = C_0e^{-\alpha x^2} \tag{6.26}$$



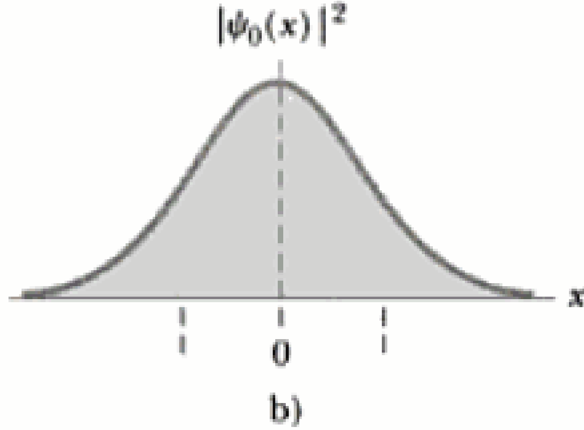


Figura 6.18 a) Función de onda para el estado base de una partícula en el pozo de potencial de oscilador. b) Densidad de probabilidad para el estado base de una partícula en el pozo de potencial de oscilador. Las líneas verticales discontinuas indican los límites de oscilación para una partícula clásica con la misma energía $x = \pm A = \pm\sqrt{\hbar/m\omega}$.

donde C_0 y α, son constantes aún por conocer. Al tomar la segunda derivada de $\psi(x)$ en la ecuación 6.16 se obtiene (lo cual debe comprobar usted)

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \{4\alpha^2x^2 - 2\alpha\}C_0e^{-\alpha x^2} = \{4\alpha^2x^2 - 2\alpha\}\psi(x)$$

que tiene la misma estructura que la ecuación 6.25. Al comparar los términos semejantes entre estas expresiones, se observa que se tiene una solución al suponer que ambas

$$4\alpha^2 = \frac{2m}{\hbar^2}\,\frac{1}{2}\,m\omega^2 \qquad \text{o bien} \qquad \alpha = \frac{m\omega}{2\hbar} \tag{6.27}$$

y

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = 2\alpha = \frac{m\omega}{\hbar} \qquad \text{o bien} \qquad E = \tfrac{1}{2}\hbar\omega \tag{6.28}$$

De esta manera, se descubre que la función de onda $\psi_0(x) = C_0\exp(-m\omega x^2/2\hbar)$ describe el estado base del oscilador, y que la energía de este estado es $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$. La constante C_0 se determina normalizando la función de onda (vea el ejemplo 6.10). La función de onda ψ_0 del estado base y la densidad de probabilidad asociada $|\psi_0|^2$ se ilustran en la figura 6.18. Las líneas verticales discontinuas denotan los límites de vibración para un oscilador clásico con la misma energía. Observe la considerable penetración de la onda en las regiones comúnmente prohibidas $x > A$ y $x < -A$. Un análisis detallado muestra que la partícula puede encontrarse en estas regiones no clásicas alrededor del 16% del tiempo (vea el ejemplo 6.12).

EJEMPLO 6.10 Normalización de la función de onda del estado base del oscilador

Normalice la función de onda del estado base del oscilador que se obtuvo en el párrafo precedente.

Solución Con $\psi_0(x) = C_0e^{-m\omega x^2/2\hbar}$, la integral de la probabilidad es

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0(x)|^2\,dx = C_0^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-m\omega x^2/\hbar}\,dx$$

Para evaluar la integral se requieren técnicas avanzadas. Aquí bastará sólo con citar la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad a > 0$$

En este caso, a se identifica con $m\omega/\hbar$ y se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0(x)|^2\,dx = C_0^2\sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}}$$

La normalización requiere que esta integral sea igual a 1, lo que lleva a

$$C_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$$

EJEMPLO 6.11 Límites de oscilación para un oscilador clásico

Obtenga los límites de oscilación para un oscilador clásico que tiene la misma energía total que el oscilador cuántico en su estado base.

Solución La energía del estado base del oscilador cuántico es $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$. En sus límites de oscilación $x = \pm A$, el oscilador clásico ha transformado toda su energía en energía potencial elástica del resorte, dada por $\frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$. En consecuencia,

$$\tfrac{1}{2}\hbar\omega = \tfrac{1}{2}m\omega^2A^2 \qquad \text{o bien} \qquad A = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

El oscilador clásico oscila en el intervalo definido por $-A \leq x \leq A$, pues no tiene energía suficiente para exceder estos límites.

EJEMPLO 6.12 El oscilador cuántico en la región no clásica

Calcule la probabilidad de que un oscilador cuántico en su estado base se encuentre fuera del intervalo permitido para un oscilador clásico con la misma energía.

Solución Debido a que el oscilador clásico está confinado en el intervalo $-A \leq x \leq A$, donde A es la amplitud de oscilación, el problema consiste en encontrar al oscilador cuántico fuera de este intervalo. Del ejemplo previo, se tiene que $A = \sqrt{\hbar/m\omega}$ para un oscilador clásico con energía $\frac{1}{2}\hbar\omega$. El oscilador cuántico con esta energía se describe utilizando la función de onda $\psi_0(x) = C_0\exp(-m\omega x^2/2\hbar)$, con $C_0 = (m\omega/\pi\hbar)^{1/4}$, del ejemplo 6.10. La probabilidad se encuentra al integrar la densidad de probabilidad $|\psi_0|^2$ más allá de los límites clásicos de oscilación, o bien,

$$P = \int_{-\infty}^{-A} |\psi_0|^2\, dx + \int_{A}^{\infty} |\psi_0|^2\, dx$$

Debido a la simetría de ψ_0, las dos integrales contribuyen a P de la misma forma, de modo que

$$P = 2\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \int_{A}^{\infty} e^{-m\omega x^2/\hbar}\, dx$$

Al hacer el cambio de variable x por $z = \sqrt{m\omega/\hbar}$ y utilizar $A = \sqrt{\hbar/m\omega}$ (que corresponde a $z = 1$) se llega a

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{1}^{\infty} e^{-z^2}\, dz$$

Expresiones de este tipo se encuentran a menudo en estudios de probabilidad. Al cambiar el límite inferior de integración por una variable, por ejemplo y, el resultado para P define la *función error complementaria* erfc(y). Pueden encontrarse tabulados valores de esta función. De esta forma, se obtiene $P = \text{erfc}(1) = 0.157$, o aproximadamente 16%.

Para obtener los estados excitados del oscilador, puede seguirse un procedimiento semejante al del estado base. El primer estado excitado debe ser antisimétrico alrededor del punto medio del pozo del oscilador ($x = 0$) y presentar exactamente un nodo. Debido a la antisimetría, este nodo debe encontrarse en el origen, de modo que una solución idónea al tanteo debe ser $\psi(x) = x \exp(-\alpha x^2)$. Al sustituir esta función en la ecuación 6.25 se obtiene la misma α que antes, junto con la energía del primer estado excitado, $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$.

De esta manera es posible generar otros estados del oscilador con sus respectivas energías, aunque rápidamente el procedimiento se vuelve demasiado laborioso para ser práctico. Lo que se necesita es un método sistemático, como el método de desarrollo en series de potencias.[11] Proseguir con este método nos alejaría de nuestro objetivo, aunque el resultado para las energías permitidas del oscilador es suficientemente sencillo e importante para incluirlo aquí:

$$E_n = (n + \tfrac{1}{2})\hbar\omega \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.29}$$

Niveles de energía para el oscilador armónico

El diagrama de niveles energéticos que se obtienen de la ecuación 6.29 se muestra en la figura 6.19. Observe la separación uniforme de los niveles, ampliamente reconocida como el sello característico del espectro del oscilador armónico. La diferencia de energía entre los niveles adyacentes es justamente $\Delta E = \hbar\omega$. En estos resultados se encuentra la justificación cuántica de la revolucionaria hipótesis de Planck sobre los osciladores dentro de una cavidad (vea la sección 3.2). Al deducir su fórmula de radiación de cuerpo negro, Planck supuso que estos osciladores, que constituían las paredes de la cavidad, sólo podían poseer aquellas energías que fuesen múltiplos de $hf = \hbar\omega$. Aunque Planck no hubiese podido prever la energía de punto cero $\hbar\omega/2$, no hubiera habido diferencia: sus osciladores seguirían emitiendo o absorbiendo energía luminosa en cuantos $\Delta E = hf$ de forma que se reproduce el espectro de cuerpo negro.

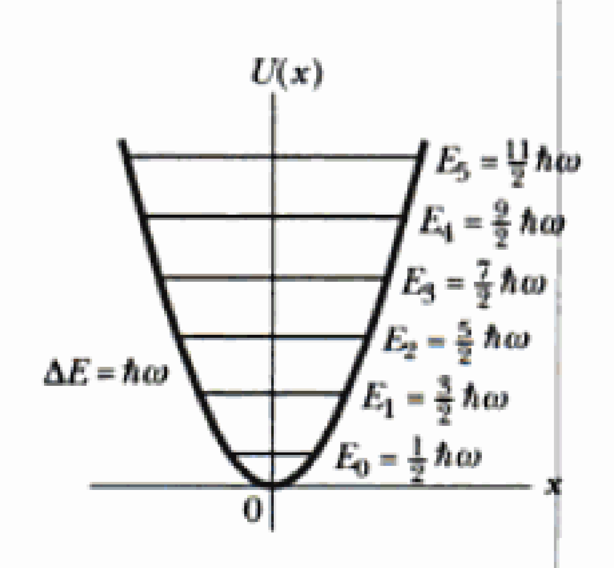


Figura 6.19 Diagrama de los niveles energéticos para el oscilador cuántico. Observe que la separación entre los niveles es la misma, igual a $\hbar\omega$. La energía del estado base es E_0.

[11] El método de desarrollo en series de potencias, aplicando al problema del oscilador cuántico, se desarrolla en cualquier texto más avanzado de mecánica cuántica. Consulte, por ejemplo, el libro de E. E. Anderson, *Modern Physics and Quantum Mechanics*, Filadelfia, W. B. Saunders Company, 1971.

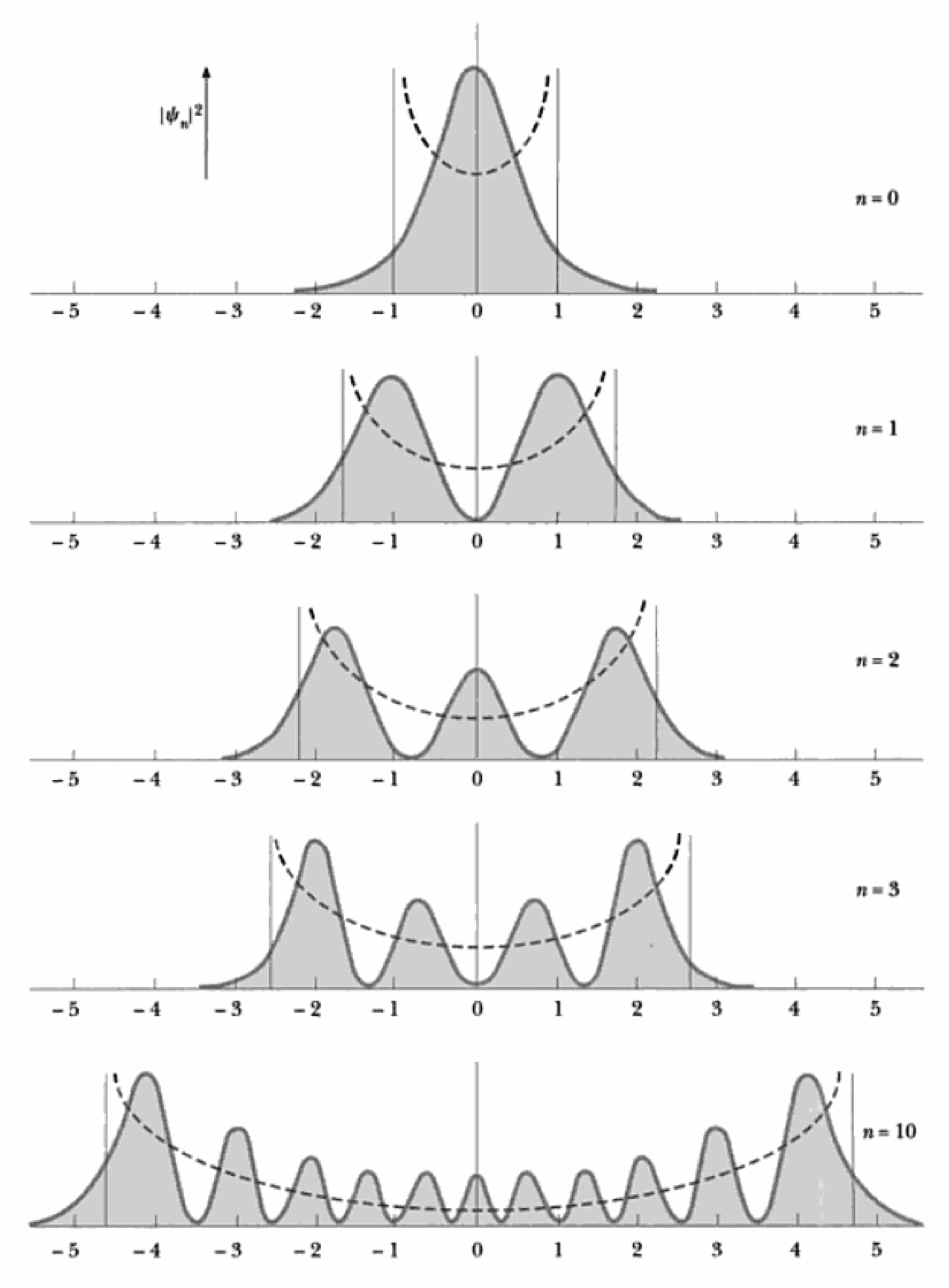


Figura 6.20 Densidades de probabilidad para algunos estados del oscilador cuántico. Las curvas discontinuas representan las probabilidades clásicas correspondientes a las mismas energías.

En la figura 6.20 se muestran las densidades de probabilidad para algunos de los estados del oscilador. Las líneas discontinuas, que representan las densidades de probabilidad clásicas para la misma energía, se muestran para efectos de comparación (vea el problema 28 para el cálculo de probabilidades clásicas). Observe que cuando n crece, hay una mayor coincidencia entre las probabilidades clásica y cuántica, como era de esperar de acuerdo con el principio de correspondencia.

EJEMPLO 6.13 Cuantización de la energía vibracional

La energía de un oscilador cuántico está restringida a asumir uno de los valores $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega$. ¿Cómo puede aplicarse esta cuantización al movimiento de una masa en un resorte, que en apariencia es capaz de oscilar con cualquier amplitud (energía)?

Solución Los valores discretos para las energías permitidas del oscilador pasarían desapercibidos si la separación entre niveles adyacentes fuese demasiado pequeña para ser detectada. A nivel macroscópico, una masa de laboratorio de, por ejemplo, 0.0100 kg en un resorte cuya constante de restitución es $K = 0.100$ N/m (un valor típico), oscilaría con una frecuencia angular $\omega = \sqrt{K/m} = 3.16$ rad/s. El periodo de oscilación correspondiente es $T = 2\pi/\omega = 1.99$ s. En este caso, la separación de los niveles cuánticos es de sólo

$$\Delta E = \hbar\omega = (6.582 \times 10^{-16} \text{ eV}\cdot\text{s})(3.16 \text{ rad/s}) = 2.08 \times 10^{-15} \text{ eV}$$

Estas energías tan pequeñas son muy inferiores a los límites actuales de detección.

A nivel atómico, no obstante, son comunes frecuencias mucho mayores. Considere la frecuencia de oscilación de la molécula de hidrógeno. Ésta se comporta como un oscilador con $K = 510.5$ N/m y una masa reducida $\mu = 8.37 \times 10^{-28}$ kg. Por consiguiente, la frecuencia angular de oscilación es

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{\mu}} = \sqrt{\frac{510.5 \text{ N/m}}{8.37 \times 10^{-28} \text{ kg}}} = 7.81 \times 10^{14} \text{ rad/s}$$

A tales frecuencias, el cuanto de energía $\hbar\omega$ es 0.513 eV, ¡que puede medirse fácilmente!

6.7 VALORES DE EXPECTACIÓN O VALORES ESPERADOS

A estas alturas ya debe ser evidente que dada una función de onda $\psi(x, t)$, ésta tiene asociados dos tipos distintos de cantidades mensurables. Un tipo, como la energía E para los estados estacionarios, se fija utilizando el número cuántico que identifica la onda. En consecuencia, cada medición de esta cantidad realizada sobre el sistema descrito por Ψ produce *el mismo* valor. Denominamos **nítidas** a las cantidades como E para distinguirlas de otras —como la posición—, para las cuales la función de onda Ψ sólo proporciona probabilidades. Se dice que x es un ejemplo de una cantidad dinámica **vaga.** En los párrafos siguientes analizaremos qué más puede aprenderse sobre estas cantidades "vagas".

Variables nítidas y vagas

Una partícula descrita por la función de onda Ψ puede ocupar varios sitios x con una probabilidad dada por la intensidad de onda en ese punto, $|\Psi(x)|^2$. Las predicciones hechas de esta manera a partir de Ψ pueden probarse midiendo repetidamente la posición de la partícula. En la tabla 6.1 se muestran los resultados que podrían obtenerse en un experimento hipotético de esta clase. La tabla consta de 18 elementos, cada uno de los cuales representan la

Tabla 6.1 Conjunto de datos hipotéticos para la posición de una partícula, registrados en varios intentos

Intento	Posición (unidades arbitrarias)	Intento	Posición (unidades arbitrarias)	Intento	Posición (unidades arbitrarias)
1	$x_1 = 2.5$	7	$x_7 = 8.0$	13	$x_{13} = 4.2$
2	$x_2 = 3.7$	8	$x_8 = 6.4$	14	$x_{14} = 8.8$
3	$x_3 = 1.4$	9	$x_9 = 4.1$	15	$x_{15} = 6.2$
4	$x_4 = 7.9$	10	$x_{10} = 5.4$	16	$x_{16} = 7.1$
5	$x_5 = 6.2$	11	$x_{11} = 7.0$	17	$x_{17} = 5.4$
6	$x_6 = 5.4$	12	$x_{12} = 3.3$	18	$x_{18} = 5.3$

posición real de la partícula, registrada en esa medición particular. Se observa que el elemento 5.4 aparece más a menudo (en 3 de los 18 intentos); éste representa la posición más probable de acuerdo con los datos disponibles. La probabilidad asociada a esta posición, de nuevo en base en los datos disponibles, es $3/18 = 0.167$. Estas cifras fluctúan a medida que se realizan más mediciones, aunque deben tender a valores límite. Las predicciones teóricas se refieren a estos valores límite. Una buena prueba de la teoría requeriría muchos más datos de los que se han mostrado en esta ilustración.

La información en la tabla 6.1 también puede usarse para encontrar la posición media de la partícula:

$$\bar{x} = \frac{(2.5 + 3.7 + 1.4 + \cdots + 5.4 + 5.3)}{18} = 5.46$$

El mismo número puede encontrarse de otra forma. Primero, los elementos de la tabla se ordenan en forma creciente, empezando con el más pequeño: 1.4, 2.5, 3.3, ..., 5.4, 6.2, ..., 8.0, 8.8. Luego, cada valor se multiplica por su frecuencia de aparición y después se suman los resultados:

$$1.4\left(\frac{1}{18}\right) + 2.5\left(\frac{1}{18}\right) + \cdots + 5.4\left(\frac{3}{18}\right) + 6.2\left(\frac{2}{18}\right) + \cdots + 8.8\left(\frac{1}{18}\right) = 5.46$$

Los dos procedimientos son equivalentes, pero el último implica una sumatoria sobre los *valores ordenados*, y no sobre los elementos individuales de la tabla. Esta última afirmación puede generalizarse a fin de incluir otros valores para la posición de la partícula, en el supuesto de que cada uno se pondere por su frecuencia de aparición observada (en este caso, cero). Lo anterior permite escribir una receta general para calcular la posición media de la partícula a partir de cualquier conjunto de datos:

$$\bar{x} = \sum xP_x \tag{6.30}$$

La sumatoria incluye ahora todos los valores de x, cada uno ponderado por su frecuencia o probabilidad de aparecer P_x. Debido a que los valores posibles de x están distribuidos de manera continua sobre el intervalo completo de números reales, la sumatoria en la ecuación 6.30 debe ser en realidad una integral y P_x debe referirse a la probabilidad de encontrar a la partícula en un intervalo infinitesimal dx alrededor del punto x; es decir, la probabilidad $P_x \to P(x)\,dx$, donde $P(x)$ es la densidad de probabilidad. En mecánica cuántica, $P(x) = |\Psi|^2$ y el valor promedio de x, escrito en mecánica cuántica como $\langle x \rangle$, se denomina **valor esperado.** Así,

Posición promedio de una partícula

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x|\Psi(x, t)|^2\,dx \tag{6.31}$$

Observe que $\langle x \rangle$ puede ser una función del tiempo. Para un estado estacionario, no obstante, $|\Psi|^2$ es estática y, en consecuencia, $\langle x \rangle$ es independiente de t.

De manera semejante se encuentra que el valor promedio o esperado para cualquier función de x, por ejemplo $f(x)$, es

$$\langle f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)|\Psi|^2\,dx \tag{6.32}$$

Con $f(x) = U(x)$, la ecuación 6.32 se vuelve $\langle U \rangle$, la energía potencial promedio de la partícula. Con $f(x) = x^2$, es posible encontrar la incertidumbre

cuántica en la posición de la partícula. Para hacer esto, volvemos a la tabla 6.1 y observamos que los elementos se dispersan alrededor del valor promedio. La cantidad de dispersión se mide por la desviación estándar, σ, de los datos, definida por

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}{N}} \tag{6.33}$$

donde N es el número de datos: en este caso 18. Al sacar el cuadrado del radical se obtiene

$$\frac{\Sigma(x_i)^2}{N} - 2(\overline{x})\frac{\Sigma(x_i)}{N} + (\overline{x})^2\Sigma\left(\frac{1}{N}\right) = \overline{(x^2)} - 2(\overline{x})(\overline{x}) + (\overline{x})^2$$
$$= \overline{(x^2)} - (\overline{x})^2$$

y así

$$\sigma = \sqrt{\overline{(x^2)} - (\overline{x})^2}$$

A partir de la ecuación 6.33 se observa que si la desviación estándar fuese cero, todos los datos serían idénticos e iguales al promedio. En ese caso, la distribución es *nítida*; en caso contrario, los datos presentarían algo de dispersión (como en la tabla 6.1) y la desviación estándar sería mayor que cero. En mecánica cuántica, la desviación estándar, denotada por Δx, a menudo se conoce como *incertidumbre* en la posición. El desarrollo previo implica que la incertidumbre cuántica en la posición puede calcularse a partir de los valores esperados como

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} \tag{6.34}$$

El grado en que la posición de una partícula es "vaga" (difusa) está dado por la magnitud de Δx; observe que la posición es "aguda" sólo si $\Delta x = 0$.

EJEMPLO 6.14 Desviación estándar a partir de promedios

Calcule $\overline{(x^2)}$ y la desviación estándar para los datos proporcionados en la tabla 6.1.

Solución Al elevar al cuadrado los datos de la tabla 6.1 y sumar los resultados, se obtiene $\Sigma(x_i)^2 = 603.91$. Al dividir esta cantidad entre el número de datos, $N = 18$, se encuentra $\overline{(x^2)} = 603.91/18 = 33.55$. Luego,

$$\sigma = \sqrt{33.55 - (5.46)^2} = 1.93$$

para este caso.

EJEMPLO 6.15 Localización de una partícula en una caja

Calcule la posición promedio $\langle x\rangle$ y la incertidumbre cuántica en este valor, Δx, para la partícula en una caja, suponiendo que se encuentra en su estado base.

Solución Las posibles posiciones de la partícula dentro de la caja se ponderan según la densidad de probabilidad dada por $|\Psi|^2 = (2/L)\text{sen}^2(n\pi x/L)$, con $n = 1$ para el estado base. La posición promedio se calcula como

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x|\Psi|^2\,dx = \left(\frac{2}{L}\right)\int_0^L x\,\text{sen}^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx$$

Al hacer el cambio de variable $\theta = \pi x/L$ (de modo que $d\theta = \pi\,dx/L$) se obtiene

$$\langle x\rangle = \frac{2L}{\pi^2}\int_0^{\pi}\theta\,\text{sen}^2\,\theta\,d\theta$$

La integral se evalúa aplicando la identidad trigonométrica $2\,\text{sen}^2\,\theta = 1 - \cos 2\theta$, con lo que se obtiene

$$\langle x\rangle = \frac{L}{\pi^2}\left(\int_0^{\pi}\theta\,d\theta - \int_0^{\pi}\theta\cos 2\theta\,d\theta\right)$$

Una integración por partes muestra que la segunda integral desaparece, mientras que el resultado de la primera es $\pi^2/2$. Así, la posición promedio de la partícula es el punto medio $\langle x\rangle = L/2$, como se esperaba, ya que hay una probabilidad igual de encontrar a la partícula en la mitad izquierda o en la mitad derecha de la caja.

Para calcular $\langle x^2\rangle$ se procede casi de la misma forma, pero con un factor adicional de x en el integrando. Haciendo el cambio de variable $\theta = \pi x/L$, se obtiene

$$\langle x^2\rangle = \frac{L^2}{\pi^3}\left(\int_0^{\pi}\theta^2\,d\theta - \int_0^{\pi}\theta^2\cos 2\theta\,d\theta\right)$$

El resultado de la primera integral es $\pi^3/3$; la segunda puede integrarse por partes, dos veces, para obtener

$$\int_0^{\pi} \theta^2 \cos 2\theta \, d\theta = -\int_0^{\pi} \theta \operatorname{sen} 2\theta \, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\theta \cos 2\theta \Big|_0^{\pi} = \pi/2$$

Entonces,

$$\langle x^2 \rangle = \frac{L^2}{\pi^3}\left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2\pi^2}$$

Por último, la incertidumbre en la posición de esta partícula es

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = L\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi^2} - \frac{1}{4}} = 0.181L$$

la cual es una cifra considerable, que suma casi la quinta parte del tamaño de la caja. En consecuencia, la posición de esta partícula es bastante desconocida. Lo único que puede afirmarse con seguridad es que es probable que la partícula esté en el intervalo $L/2 \pm 0.181L$.

Por último, observe que ninguno de estos resultados depende del tiempo, porque en un estado estacionario t entra sólo a través del factor exponencial $e^{-i\omega t}$, que se cancela cuando Ψ se multiplica por Ψ^* al calcular los promedios. En consecuencia, por lo general es cierto que, **en un estado estacionario, todos los promedios, así como las probabilidades, son independientes del tiempo.**

Hemos aprendido cómo predecir la posición promedio de una partícula, $\langle x \rangle$; la incertidumbre en esta posición, Δx; la energía potencial promedio de la partícula, $\langle U \rangle$; etc. Pero, ¿qué hay sobre la cantidad de movimiento promedio, $\langle p \rangle$, de la partícula, o de su energía cinética promedio, $\langle K \rangle$? Éstas podrían calcularse si conociéramos $p(x)$, la cantidad de movimiento como una función de x. En mecánica clásica, $p(x)$ puede obtenerse a partir de la ecuación para la trayectoria clásica seguida por la partícula, $x(t)$. Al diferenciar una vez esta función se obtiene la velocidad $v(t)$. Luego, al invertir $x(t)$ para obtener t como una función de x y sustituir este resultado en $v(t)$, se obtienen $v(x)$ y la relación buscada $p(x) = mv(x)$. En mecánica cuántica, no obstante, x y t son variables independientes: ¡*no hay trayectoria*, o alguna otra función que conecte a p con x! Si las hubiera, entonces p podría encontrarse a partir de x usando $p(x)$, y tanto p como x podrían conocerse con precisión, lo que violaría el principio de incertidumbre.

Para obtener $\langle p \rangle$ es necesario intentar un método diferente: la derivada con respecto al tiempo de la posición promedio de la partícula se identifica con la velocidad promedio de la partícula. Luego de multiplicarla por m, se obtiene la cantidad de movimiento promedio $\langle p \rangle$:

Cantidad de movimiento promedio de una partícula

$$\langle p \rangle = m\,\frac{d\langle x \rangle}{dt} \tag{6.35}$$

La ecuación 6.35 no puede deducirse a partir de nada de lo que se ha mencionado. Cuando los promedios $\langle x \rangle$ y $\langle p \rangle$ se aplican a objetos macroscópicos, donde las incertidumbres cuánticas en posición y cantidad de movimiento son pequeñas, se vuelven indistinguibles de "la" posición y "la" cantidad de movimiento del objeto, y la ecuación 6.35 se reduce a la definición clásica de cantidad de movimiento.

A partir de la ecuación 6.35 se deduce una expresión equivalente para $\langle p \rangle$ al sustituir $\langle x \rangle$ de la ecuación 6.31 y diferenciar bajo el signo de la integral. Al utilizar la ecuación de Schrödinger para eliminar las derivadas con respecto al tiempo de Ψ y su conjugada Ψ^* se obtiene (¡después de tanta manipulación!)

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \left(\frac{\hbar}{i}\right) \frac{\partial \Psi}{\partial x}\, dx \tag{6.36}$$

Ejercicio 5 Demuestre que $\langle p \rangle = 0$ para *cualquier* estado de una partícula en una caja.

6.8 OBSERVABLES Y OPERADORES

Un observable es cualquier propiedad que pueda medirse de una partícula. La posición y la cantidad de movimiento de una partícula son observables, así como sus energías cinética y potencial.[12] En mecánica cuántica, a cada una de estas observables está asociada un *operador.* Usando este operador es posible calcular el valor promedio de la observable correspondiente. Aquí, un operador se refiere a una operación que se realiza sobre cualquier función que se encuentra a continuación del operador. La cantidad sobre la que se opera se denomina *operando.* En este lenguaje, una constante c se vuelve un operador, cuyo significado se entiende al proporcionar cualquier función $f(x)$ para obtener $cf(x)$. Aquí, el operador c significa "multiplicación por la constante c". Un operador más complicado es d/dx, que, después de suministrar un operando $f(x)$, significa "tomar la derivada de $f(x)$ con respecto a x". Otro ejemplo es $(d/dx)^2 = (d/dx)\,(d/dx)$. Al proporcionar el operando $f(x)$ se obtiene $(d/dx)^2 f(x) = (d/dx)\,(df/dx) = d^2f/dx^2$. Por tanto, $(d/dx)^2$ significa "tomar la segunda derivada con respecto a x; es decir, tomar dos veces la derivada indicada".

El concepto de operador es útil en mecánica cuántica porque todos los valores esperados encontrados hasta el momento pueden escribirse en la misma forma general; a saber,

Operadores en mecánica cuántica

$$\langle Q\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* [Q]\Psi \, dx \tag{6.37}$$

En esta expresión, Q es la observable y $[Q]$ es el operador asociado. *El orden de los términos en la ecuación 6.37 es importante*, indica que el operando para $[Q]$ siempre es Ψ. Al comparar la forma general con la de $\langle p\rangle$ en la ecuación 6.36, se observa que el operador de la cantidad de movimiento es $[p] = (\hbar/i)(\partial/\partial x)$. En analogía, escribir $x|\Psi|^2 = \Psi^* x\Psi$ en la ecuación 6.31 implica que el operador de posición es $[x] = x$. A partir de $[x]$ y $[p]$ es posible encontrar el operador de cualquier otra observable. Por ejemplo, el operador para x^2 es justamente $[x^2] = [x]^2 = x^2$. El operador para la energía potencial es simplemente $[U] = U([x]) = U(x)$, lo cual significa que la energía potencial promedio se calcula como

$$\langle U\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* [U]\Psi \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* U(x)\Psi \, dx$$

Otro ejemplo es la energía cinética K. En mecánica clásica, K es una función de p: $K = p^2/2m$. Así, el operador de energía cinética es $[K] = ([p])^2/2m = (-\hbar/2m)\partial^2/\partial x^2$, y la energía cinética promedio se encuentra a partir de

$$\langle K\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* [K]\Psi \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right) dx$$

A fin de encontrar la energía total promedio para una partícula, se suman las energías cinética y potencial promedio para obtener

$$\langle E\rangle = \langle K\rangle + \langle U\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)\right\} \Psi \, dx \tag{6.38}$$

[12]En contraste, la función de onda Ψ, aunque es claramente indispensable para la descripción cuántica, no puede medirse de manera directa, por lo cual *no es* una observable.

Tabla 6.2 Observables comunes y operadores asociados

Observable	Símbolo	Operador asociado
Posición	x	x
Cantidad de movimiento	p	$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$
Energía potencial	U	$U(x)$
Energía cinética	K	$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}$
Hamiltoniano	H	$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)$
Energía total	E	$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$

La forma de este resultado sugiere que el término entre corchetes es el operador para la energía total. Este operador se denomina *hamiltoniano* y se simboliza por $[H]$:

$$[H] = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) \tag{6.39}$$

La designación $[E]$ se reserva para otro operador, que surge como sigue: Al analizar la ecuación de Schrödinger (ecuación 6.10) se encuentra que es posible escribirla con sumo cuidado como $[H]\Psi = i\hbar\partial\Psi/\partial t$. Al usar esto en la ecuación 6.38 se obtiene una expresión equivalente para $\langle E\rangle$ y se llega a la identificación del *operador de energía:*

$$[E] = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{6.40}$$

Observe que $[H]$ es una operación que implica sólo la coordenada espacial x, mientras que $[E]$ sólo depende del tiempo t. Es decir, $[H]$ y $[E]$ en realidad son dos operadores distintos, aunque producen resultados idénticos cuando se aplican a cualquier solución de la ecuación de Schrödinger. Esto se debe a que el miembro izquierdo de la ecuación de Schrödinger es simplemente $[H]\Psi$, mientras que el miembro derecho no es otro que $[E]\Psi$ (¡compare esto con la ecuación 6.10!). En la tabla 6.2 se resumen las observables analizadas, así como sus operadores asociados.

OPCIONAL

INCERTIDUMBRE CUÁNTICA Y LA PROPIEDAD DEL VALOR PROPIO

En la sección 6.7 se demostró cómo Δx, la incertidumbre cuántica en la posición, puede encontrarse a partir de los valores esperados $\langle x^2\rangle$ y $\langle x\rangle$. Pero el razonamiento ahí proporcionado se aplica a *cualquier* observable; es decir, la incertidumbre cuántica ΔQ para cualquier observable Q se calcula como

Incertidumbre cuántica para cualquier observable

$$\Delta Q = \sqrt{\langle Q^2\rangle - \langle Q\rangle^2} \tag{6.41}$$

De nuevo, si $\Delta Q = 0$, se dice que Q es una observable nítida y todas las mediciones de Q producen el mismo valor. Más a menudo, no obstante, $\Delta Q > 0$ y mediciones repetidas revelan una distribución de valores —como en la tabla 6.1 para la observable x—. En tales casos, se dice que la observable es "vaga", lo cual sugiere que, antes de la medición actual, no puede decirse que la partícula posea un valor único de Q.

En física clásica todas las observables son nítidas.[13] La medida en que las observables nítidas pueden especificarse en física cuántica está limitada por principios de incertidumbre, tales como

$$\Delta x\, \Delta p \geq \frac{1}{2}\hbar \qquad (6.42)$$

Las incertidumbres aquí deben calcularse a partir de la ecuación 6.41. La ecuación 6.42 establece que no importa cuál sea el estado de la partícula, la dispersión en las distribuciones que se obtiene de las mediciones de x y p deben estar relacionadas en forma inversa: cuando una es pequeña, la otra es grande. De manera alternativa, si la posición de la partícula es lo suficientemente "vaga", su cantidad de movimiento puede ser relativamente "nítida" y viceversa. El grado en que ambas pueden ser en forma simultánea nítidas está limitado por el tamaño de $\hbar$. El increíblemente pequeño valor de $\hbar$ en unidades SI es un indicador de que las ideas cuánticas son innecesarias a nivel macroscópico.

A pesar de las restricciones impuestas por los principios de incertidumbre, algunas observables en física cuántica pueden seguir siendo nítidas. La energía E de todos los estados estacionarios es un ejemplo. En las ondas planas de las partículas libres de la sección 6.2 se tiene otro ejemplo: la onda plana con número de onda k,

$$\Psi_k(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$$

describe a una partícula con cantidad de movimiento $p = \hbar k$. Resulta evidente que la cantidad de movimiento es un observable para esta función de onda. En este caso se encuentra que la acción del operador de cantidad de movimiento es especialmente sencilla:

Funciones propias y valores propios

$$[p]\Psi_k(x, t) = \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) e^{i(kx - \omega t)} = \hbar k \Psi_k(x, t)$$

es decir, la operación $[p]$ devuelve la función original multiplicada por una constante. Esto es un ejemplo de un **problema de valores propios** para el operador $[p]$.[14] La función de onda Ψ_k es la *función propia* y la constante, en este caso $\hbar k$, es el *valor propio*. Observe que el valor propio es justamente el valor nítido de la cantidad de movimiento de la partícula para esta onda. Esta relación entre observables nítidas y valores propios es general: **Para que una observable Q sea aguda, la función de onda debe ser una función propia del operador para Q. Además, el valor nítido para Q en este estado es el valor propio.** De esta forma, la propiedad del valor propio puede servir como una prueba sencilla para las observables nítidas, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 6.16 Ondas planas y observables nítidas

Use la prueba del valor propio para demostrar que, para la onda plana $\Psi_k(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$, la energía total es una observable nítida. ¿Qué valor toma la energía en este caso?

Solución Para resolver este problema analizaremos la acción del operador de energía $[E]$ sobre la función candidata $e^{i(kx - \omega t)}$. Dado que tomar la derivada con respecto a t de esta función equivale a multiplicar la función por $-i\omega$, se tiene

$$[E]e^{i(kx - \omega t)} = \left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right) e^{i(kx - \omega t)} = \hbar\omega e^{i(kx - \omega t)}$$

[13] En este análisis se omite cualquier error aleatorio de la medición. Por lo menos en principio, la imprecisión que resulta de tales errores puede reducirse a niveles arbitrariamente bajos.

[14] El problema del valor propio para cualquier operador $[Q]$ es $[Q]\psi = q\psi$, es decir, el resultado de la operación $[Q]$ sobre alguna función ψ es simplemente obtener un múltiplo q de la misma función. Esto sólo es posible para ciertas funciones especiales ψ, las *funciones propias* (o características), y entonces sólo para ciertos valores especiales de q, los *valores propios* (o característicos). En general, se conoce $[Q]$; las funciones propias y los valores propios se encuentran al imponer la condición del valor propio.

lo que demuestra que $e^{i(kx-\omega t)}$ es una función propia del operador de energía $[E]$ y que el valor propio es $\hbar k$. Por tanto, la energía es una observable nítida y, en este estado, posee el valor $\hbar\omega$.

Resulta útil comparar este resultado con el que se encuentra al utilizar el otro operador de energía, $[H]$. El hamiltoniano de una partícula libre es simplemente el operador de energía cinética $[K]$, debido a que en este caso la energía potencial es cero. Así,

$$[H]e^{i(kx-\omega t)} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)e^{i(kx-\omega t)}$$
$$= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\right)(ik)^2 e^{i(kx-\omega t)}$$

De nuevo, la operación devuelve la función original con un multiplicador, de modo que $e^{i(kx-\omega t)}$ también es una función propia de $[H]$. En este caso, el valor propio es $\hbar^2k^2/2m$, que también debe ser el valor "agudo" de la energía de la partícula. La equivalencia con $\hbar\omega$ se concluye a partir de la relación de dispersión para partículas libres (vea la nota de pie de página 1).

Ejercicio 6 Demuestre que la energía total es una observable nítida para *cualquier* estado estacionario.

EJEMPLO 6.17 Observables nítidas para una partícula en una caja

Los estados estacionarios del pozo cuadrado infinito, ¿son funciones propias de $[p]$ y de $[p]^2$? En caso afirmativo, ¿cuáles son los valores propios? Analice las implicaciones de estos resultados.

Solución En este caso la función candidata es cualquiera de las funciones de onda del pozo cuadrado, $\Psi(x, t) = \sqrt{2/L}\,\mathrm{sen}(n\pi x/L)e^{-iE_nt/\hbar}$. Debido a que con la primera derivada se obtiene $(d/dx)\mathrm{sen}(n\pi x/L) = (n\pi/L)\cos(n\pi x/L)$, de inmediato se observa que el operador $[p]$ *no* devuelve la función original Ψ, de modo que éstas no son funciones propias del operador de cantidad de movimiento. Sin embargo, *son* funciones propias de $[p]^2$. En particular, se tiene $(d^2/dx^2)\mathrm{sen}(n\pi x/L) = -(n\pi/L)^2\mathrm{sen}(n\pi x/L)$, de modo que

$$[p]^2\Psi(x, t) = -(\hbar/i)^2\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\Psi(x, t)$$
$$= \left(\frac{n\pi\hbar}{L}\right)^2\Psi(x, t)$$

El valor propio es el multiplicador $(n\pi\hbar/L)^2$. Así, la cantidad de movimiento al cuadrado (o la magnitud de la cantidad de movimiento) es nítida para tales estados, y se obtienen resultados idénticos iguales a $(n\pi\hbar/L)^2$ (o $n\pi\hbar/L$) mediante mediciones repetidas de p^2 (o de $|p|$) para el estado identificado por n. En contraste, la cantidad de movimiento no es nítida, lo cual significa que en mediciones sucesivas se obtienen valores diferentes para p. En particular, lo vago es el signo o la dirección de la cantidad de movimiento, lo cual es consistente con la idea clásica de una partícula que rebota de un lado a otro entre las paredes de la "caja".

RESUMEN

En mecánica cuántica, las ondas de materia (u ondas de De Broglie) se representan por medio de la función de onda $\Psi(x, t)$. La probabilidad de que una partícula limitada a moverse a lo largo del eje x se encuentre en un intervalo dx en el instante t está dada por $|\Psi|^2dx$. La suma de estas probabilidades sobre todos los valores de x es igual a la unidad (certidumbre). Es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 \, dx = 1 \tag{6.2}$$

Lo anterior se denomina **condición de normalización.** Además, la probabilidad de que la partícula se encuentre en cualquier intervalo $a \leq x \leq b$ se obtiene al integrar la **densidad de probabilidad** $|\Psi|^2$ sobre este intervalo.

Además de proporcionar probabilidades, la función de onda puede utilizarse para encontrar el promedio, o **valor esperado,** de cualquier cantidad dinámica. La posición promedio de cualquier partícula en cualquier instante t es

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* x \Psi \, dx \tag{6.31}$$

En general, el valor promedio de cualquier observable Q en el instante t es

$$\langle Q \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* [Q] \Psi \, dx \tag{6.37}$$

donde $[Q]$ es el operador asociado. El operador de posición es justamente $[x] = x$, y el de la cantidad de movimiento de la partícula es $[p] = (\hbar/i)\partial/\partial x$.

La función de onda Ψ debe cumplir con la **ecuación de Schrödinger,**

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + U(x)\Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \tag{6.10}$$

Soluciones separables de esta ecuación, denominadas **estados estacionarios,** son $\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-i\omega t}$, donde $\psi(x)$ es una función de onda independiente del tiempo que satisface la **ecuación de Schrödinger independiente del tiempo**

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x) \tag{6.13}$$

El propósito de la mecánica cuántica es resolver la ecuación 6.13 para ψ y E, dada la energía potencial $U(x)$ del sistema. Al hacer lo anterior, debe pedirse que $\psi(x)$

- sea continua
- sea finita para toda x, incluyendo $x = \pm\infty$
- sea monovaluada y que
- $\psi(x)/dx$ sea continua siempre que $U(x)$ sea finita.

Es posible encontrar soluciones explícitas de la ecuación de Schrödinger para diversos potenciales de especial relevancia. Para una partícula libre, los estados estacionarios son las **ondas planas** $\psi(x) = e^{ikx}$ de número de onda k y energía $E = \hbar^2k^2/2m$. La cantidad de movimiento de la partícula en tales estados es $p = \hbar k$, pero la posición de la partícula se desconoce por completo. Una partícula libre de la cual se sabe que está en algún intervalo Δx no se describe mediante una onda plana, sino por medio de un **paquete** o **grupo de ondas** formado a partir de una superposición de ondas planas. La cantidad de movimiento de una partícula así no se conoce con precisión, sino sólo hasta cierta exactitud Δp relacionada con Δx por el **principio de incertidumbre,**

$$\Delta x \, \Delta p \geq \tfrac{1}{2}\hbar \tag{6.42}$$

Para una partícula confinada a una caja unidimensional de longitud L, las ondas en estado estacionario son aquellas para las cuales puede caber un número entero de semilongitudes de onda; es decir, $L = n\lambda/2$. En este caso la energía está **cuantizada** según

$$E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6.17}$$

y las funciones de onda en el interior de la caja están dadas por

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6.18}$$

Para el **oscilador armónico,** la función de energía potencial es $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$, y la energía total de la partícula está cuantizada según la relación

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.29}$$

La energía mínima es $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$; la separación entre niveles energéticos adyacentes es uniforme e igual a $\hbar\omega$. La función de onda para el estado base del oscilador es

$$\psi_0(x) = C_0e^{-\alpha x^2} \tag{6.26}$$

donde $\alpha = m\omega/2\hbar$ y C_0 es una constante de normalización. Los resultados del oscilador son válidos para cualquier sistema que oscile con una amplitud pequeña alrededor de un punto de equilibrio estable. La constante de restitución del resorte, en el caso general, es

$$K = m\omega^2 = \left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_a \tag{6.24}$$

donde la derivada del potencial se evalúa en el punto de equilibrio a.

Las ondas de **estado estacionario** para cualquier potencial comparten las siguientes características:

- Su dependencia con respecto al tiempo es $e^{-i\omega t}$.
- Llevan a probabilidades que son independientes del tiempo.
- Todos los valores promedio obtenidos a partir de estados estacionarios son independientes del tiempo.
- La energía en cualquier estado estacionario es una **observable nítida;** es decir, si se realizan mediciones repetidas de la energía de la partícula sobre sistemas idénticos siempre se obtendrá el mismo resultado, $E = \hbar\omega$.

Para otras observables, como la posición, mediciones repetidas suelen producir resultados diferentes. Se dice que estas observables son **"vagas".** Su "vaguedad" inherente se refleja en la dispersión de resultados alrededor del valor promedio, de acuerdo a la desviación estándar o **incertidumbre,** la cual puede calcularse para cualquier observable Q a partir de los valores esperados como

$$\Delta Q = \sqrt{\langle Q^2\rangle - \langle Q\rangle^2} \tag{6.41}$$

BIBLIOGRAFÍA ADICIONAL SUGERIDA

1. L. de Broglie, *New Perspectives in Physics*, Nueva York, Basic Books, Inc., 1962. Una serie de ensayos de Louis de Broglie sobre varios aspectos de la física teórica y sobre la historia y la filosofía de la ciencia. Gran parte de este libro está dedicada a la actitud de De Broglie con respecto a la interpretación de la mecánica ondulatoria y la dualidad onda-partícula.
2. Para un análisis profundo de los problemas de interpretación y medición alrededor del formalismo de la teoría cuántica, consulte el libro de M. Jammer, *The Philosophy of Quantum Mechanics*, Nueva York, John Wiley and Sons, Inc., 1974.
3. Una introducción concisa y sólida a los principios básicos de la física cuántica con aplicaciones puede encontrarse en el capítulo 41 del libro *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics*, 6a. Ed., de Robert Serway y J. Jewett, Jr., Belmont, CA, Brooks/Cole-Thomson Learning, 2004.
4. Una deliciosa exposición alentadora sobre la teoría cuántica, presentada por R. Feynman, R. Leighton y M. Sands en *The Feynman Lectures on Physics Vol. III, Modern Physics*, Reading, MA, Addison-Wesley Publishing Co., 1965. Esta obra es más avanzada y sofisticada que otros textos introductorios al campo, aunque de alguna manera se encuentra por abajo del nivel intermedio.
5. Para una introducción bastante aceptable sobre los dispositivos acoplados por carga, consulte el artículo "Charge-coupled Devices in Astronomy", *Sci. Am.*, volumen 247(4), pp. 66-74, octubre de 1982, de Jerome Kristian y Morley Blouke.

PREGUNTAS

1. La densidad de probabilidad en ciertos puntos para una partícula dentro de una caja es cero, como se observa en la figura 6.9. ¿Esto implica que la partícula no puede moverse a través de estos puntos? Explique su respuesta.
2. Analice la relación entre la energía de punto cero y el principio de incertidumbre.
3. Considere un pozo cuadrado de potencial con una pared finita y una pared infinita. Compare la energía y la cantidad de movimiento de una partícula atrapada en este pozo con la energía y la cantidad de movimiento de una partícula idéntica atrapada en un pozo de potencial infinito del mismo ancho.
4. Explique por qué un paquete de ondas se mueve con la velocidad de grupo, en vez de hacerlo con la velocidad de fase.
5. De acuerdo con la sección 6.2, una partícula libre puede representarse por medio de cualquier número de formas de onda, dependiendo de los valores elegidos para los coeficientes $a(k)$. ¿Cuál es la fuente de esta ambigüedad, y cómo se resuelve?
6. Debido a que la ecuación de Schrödinger puede plantearse en términos de operadores como $[H]\Psi = [E]\Psi$, ¿es correcto concluir, a partir de esta correspondencia de operadores, que $[H] = [E]$?
7. Para una partícula en una caja, la cantidad de movimiento al cuadrado p^2 es una observable nítida, pero la cantidad de movimiento en sí es vaga. Explique lo anterior y cómo se relaciona con el movimiento clásico de dicha partícula.
8. Un filósofo dijo en una ocasión que "es necesario para la existencia misma de la ciencia que las mismas condiciones siempre produzcan los mismos resultados". En vista de lo que se afirmó en este capítulo, proporcione un razonamiento que demuestre que esta afirmación es falsa. ¿Cómo debe replantearse, a fin de hacerla verdadera?

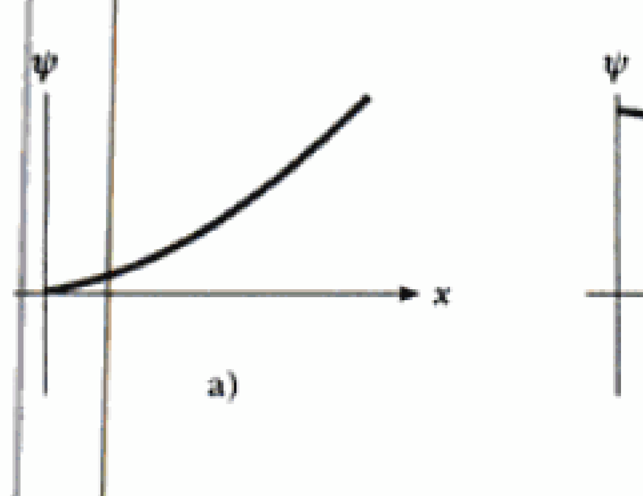
PROBLEMAS

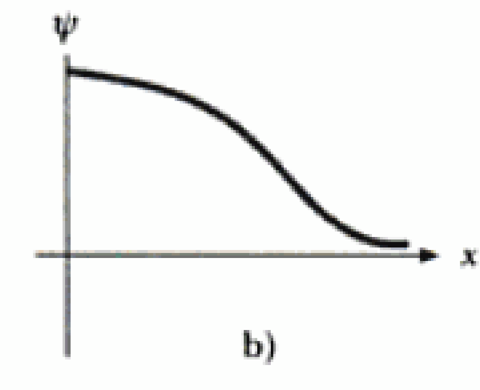
6.1 Interpretación de Born

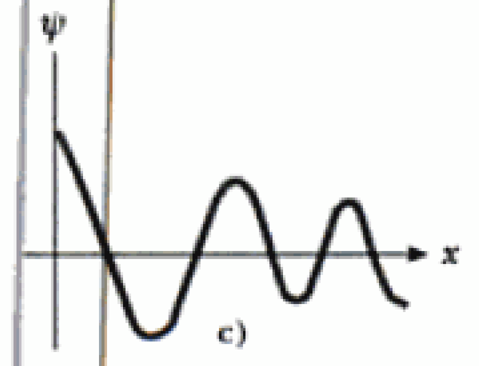
1. De las funciones que se muestran en la figura P6.1, ¿cuáles son candidatas para ser la función de onda de Schrödinger de un sistema físico real? Para las que no lo sean, explique por qué fracasan.
2. Una partícula es descrita por los valores de la función de onda

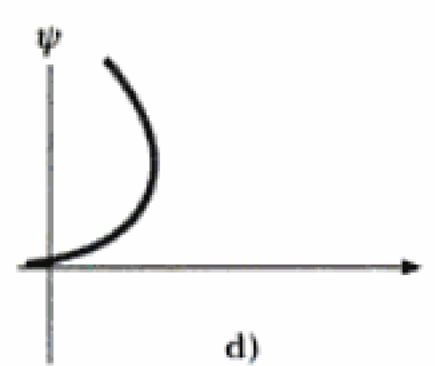
$$\psi(x) = \begin{cases} A\cos\left(\dfrac{2\pi x}{L}\right) & \text{para } -\dfrac{L}{4} \le x \le \dfrac{L}{4} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

a) Determine la constante de normalización A. b) ¿Cuál es la probabilidad de que la partícula se encuentre entre $x = 0$ y $x = L/8$ si se mide su posición?









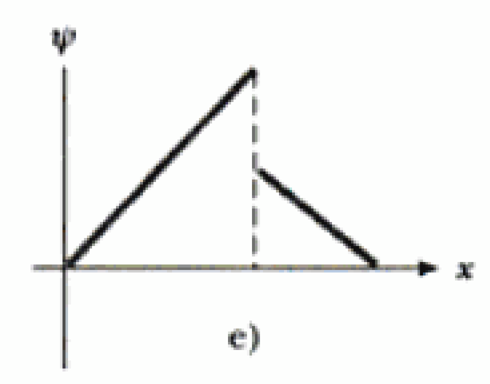


Figura P6.1

6.2 Función de onda para una partícula libre

3. La función de onda de un electrón libre es

$$\psi(x) = A\,\text{sen}(5 \times 10^{10}\,x)$$

donde x se mide en metros. Encuentre a) la longitud de onda de De Broglie del electrón, b) la cantidad de movimiento del electrón y c) la energía del electrón en electrón-volts.

4. *Propagación de un paquete de ondas gaussianas.* El paquete de ondas gaussianas $\Psi(x, 0)$ del ejemplo 6.3 está constituido por ondas planas, según la función de distribución de amplitud $a(k) = (C\alpha/\sqrt{\pi})\exp(-\alpha^2k^2)$. Calcule $\Psi(x, t)$ para este paquete y describa su evolución.

6.3 Funciones de onda en presencia de fuerzas

5. En una región del espacio, una partícula con energía cero tiene la función de onda

$$\psi(x) = Axe^{-x^2/L^2}$$

a) Encuentre la energía potencial U como una función de x.

b) Trace una gráfica de $U(x)$ como función de x.

6. La función de onda de una partícula está dada por

$$\psi(x) = A\cos(kx) + B\,\text{sen}(kx)$$

donde A, B y k son constantes. Demuestre que ψ es una solución de la ecuación de Schrödinger (ecuación 6.13),

suponiendo que la partícula es libre ($U = 0$), y encuentre la energía E de la partícula.

6.4 Partícula en una caja

7. Demuestre que si se permite el estado $n = 0$ para una partícula en una caja unidimensional se viola el principio de incertidumbre, $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$.
8. Una cuenta de 5 g de masa se desliza libremente por un alambre de 20 cm de largo. Considere este sistema como una partícula en una caja unidimensional y calcule el valor de n correspondiente al estado de la cuenta si ésta se mueve con una velocidad de 0.100 nm por año (es decir, que aparentemente está en reposo).
9. El potencial nuclear que liga a protones y neutrones en el núcleo de un átomo a menudo se aproxima mediante un pozo cuadrado de potencial. Imagine un protón confinado en un pozo cuadrado infinito de 10^{-5} nm de longitud, que equivale a un diámetro nuclear típico. Calcule la longitud de onda y la energía asociadas con el fotón emitido cuando el protón experimenta una transición del primer estado excitado ($n = 2$) al estado base ($n = 1$). ¿A qué región del espectro electromagnético pertenece esta longitud de onda?
10. Considere un electrón en el interior de una caja unidimensional de 0.100 nm de ancho. a) Elabore un diagrama de los niveles energéticos del electrón hasta $n = 4$. b) Encuentre las longitudes de onda de *todos* los fotones que puede emitir el electrón al realizar transiciones que lo lleven, finalmente, del estado $n = 4$ al estado $n = 1$.
11. Considere una partícula que se mueve en una caja unidimensional cuyas paredes están en $x = -L/2$ y $x = L/2$. a) Escriba las funciones de onda y las densidades de probabilidad para los estados $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$. b) Dibuje las funciones de onda y las densidades de probabilidad. (*Sugerencia:* Establezca una analogía con el caso de una partícula en una caja cuyas paredes estén en $x = 0$ y $x = L$.)
12. Un láser de rubí emite luz con una longitud de onda de 694.3 nm. Si esta luz se debe a las transiciones de un electrón de una caja del estado $n = 2$ al estado $n = 1$, encuentre el ancho de la caja.
13. Un protón está confinado a moverse en una caja unidimensional de 0.200 nm de ancho. a) Encuentre la mínima energía posible del protón. b) ¿Cuál es la mínima energía posible de un electrón confinado en la misma caja? c) ¿Cómo explica la gran diferencia en los resultados que obtuvo para los incisos a) y b)?
14. Una partícula de masa m se coloca en una caja unidimensional de longitud L. La caja es tan pequeña que el movimiento de la partícula es *relativista*, de modo que $E = p^2/2m$ *no es válida.* a) Obtenga una expresión para los niveles energéticos de la partícula usando la relación relativista energía-cantidad de movimiento y la cuantización de la cantidad de movimiento que se deriva del confinamiento. b) Si la partícula es un electrón en una caja con una longitud $L = 1 \times 10^{-12}$ m, encuentre la energía cinética mínima posible. ¿Cuál es el porcentaje de error de la fórmula no relativista para la energía?
15. Considere un "cristal" constituido por dos núcleos y dos electrones, como se muestra en la figura P6.15. a) Tome en cuenta todos los pares de interacciones y encuentre la energía potencial del sistema como una función de d. b) Suponiendo que los electrones están restringidos a una caja unidimensional de longitud $3d$, encuentre la energía cinética mínima de los dos electrones. c) Encuentre el valor de d para el cual la energía total es un *mínimo.* d) Compare este valor de d con la separación de los átomos en el litio, cuya densidad es de 0.53 g/cm³ y cuyo peso atómico es 7. (Este tipo de cálculo puede usarse para estimar las densidades de los cristales y de ciertas estrellas.)

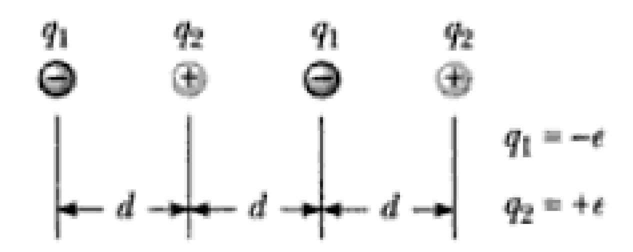


Figura P6.15

16. Un electrón está atrapado en un pozo de potencial infinitamente profundo de 0.300 nm de ancho. a) Si el electrón está en su estado base, ¿cuál es la probabilidad de encontrarlo a menos de 0.100 nm de la pared izquierda? b) Repita el inciso a) para un electrón que se encuentra en el nonagésimo noveno estado de excitación ($n = 100$). c) ¿Sus respuestas son consistentes con el principio de correspondencia?
17. Un electrón está atrapado en un defecto en un cristal. El defecto puede modelarse como una caja unidimensional de 1 nm de ancho cuyas paredes son rígidas. a) Trace las funciones de onda y las densidades de probabilidad para los estados $n = 1$ y $n = 2$. b) Para el estado $n = 1$, determine la probabilidad de encontrar al electrón entre $x_1 = 0.15$ nm y $x_2 = 0.35$ nm, donde $x = 0$ es el lado izquierdo de la caja. c) Repita el inciso b) para el estado $n = 2$. d) Calcule las energías de los estados $n = 1$ y $n = 2$ en electrón-volts.
18. Encuentre los puntos de densidad de probabilidad máxima y mínima para el n-ésimo estado de una partícula en una caja unidimensional. Compruebe su resultado para el estado $n = 2$.
19. Una canica de 1 g de masa está restringida a rodar dentro de un tubo de longitud $L = 1$ cm. El tubo está tapado en ambos extremos. Modele lo anterior como un pozo cuadrado infinito unidimensional y encuentre el valor del número cuántico n si a la canica se le imprime inicialmente una energía de 1 mJ. Calcule la *energía de excitación* que se requiere para hacer llegar la canica al siguiente estado energético disponible.

6.5 Pozo cuadrado finito

20. Considere una partícula con energía E contenida en un pozo cuadrado *finito* de altura U y ancho $2L$, situado en $-L \leq x \leq +L$. Debido a que la energía potencial es simétrica con respecto al punto medio del pozo, las ondas de estado estacionario son simétricas o antisimétricas con respecto a este punto. a) Demuestre que para $E < U$, las condiciones para una unión continua entre las ondas externa e interna conducen la siguiente ecuación para las energías permitidas para las ondas simétricas:

$$k \tan kL = \alpha \qquad \text{(caso simétrico)}$$

donde $\alpha = \sqrt{(2m/\hbar^2)(U - E)}$ y $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ es el número de onda de oscilación en el interior. b) Demuestre que la condición sobre la energía que se encontró en el inciso a) puede volver a escribirse como

$$k \sec kL = \frac{\sqrt{2mU}}{\hbar}$$

Aplique el resultado en esta forma a un electrón atrapado en el defecto de un cristal, modelando el defecto como un pozo cuadrado de 5 eV de altura y 0.2 nm de ancho. Resuelva numéricamente la ecuación a fin de encontrar, con una exactitud de ±0.001 eV, la energía del estado base para el electrón.

21. Dibuje la función de onda $\psi(x)$ y la densidad de probabilidad $|\psi(x)|^2$ para el estado $n = 4$ de una partícula en un pozo de potencial *finito*.

22. La energía potencial de un protón confinado en un núcleo atómico puede modelarse como un pozo cuadrado de 1×10^{-5} nm de ancho y 26 MeV de altura. Determine la energía del protón en el estado base y en su primer estado excitado, usando el applet Java disponible en el sitio (http://info.brookscole.com/mp3e QMTools Simulations → Problem 6.22). Para más detalles, consulte el ejercicio 3 del ejemplo 6.8. Calcule la longitud de onda del fotón emitido cuando el protón experimenta una transición del primer estado excitado al estado base, y compare su resultado con el que encontró utilizando el modelo del pozo infinito del problema 9.

23. Considere un pozo cuadrado que tiene una pared infinita en $x = 0$ y una pared de altura U en $x = L$ (figura P6.23). Para el caso $E < U$, resuelva la ecuación de Schrödinger dentro del pozo ($0 \leq x \leq L$) y en la región más allá ($x > L$) y obtenga soluciones que cumplan con las condiciones a la frontera idóneas en $x = 0$ y $x = \infty$. Refuerce las condiciones de continuidad apropiadas en $x = L$ a fin de encontrar una ecuación para las energías permitidas en este sistema. ¿Hay condiciones para las cuales no haya solución posible? Explique su respuesta.

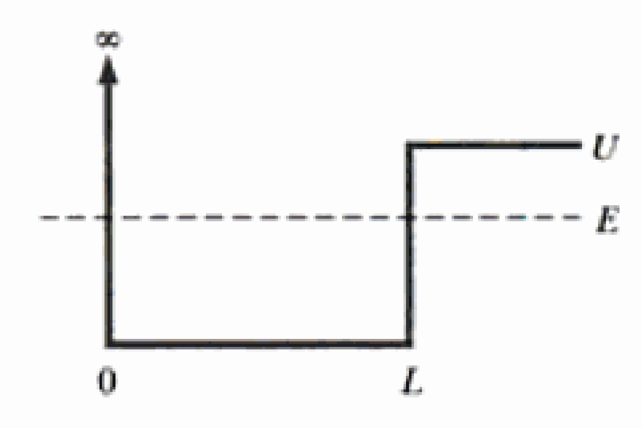


Figura P6.23

6.6 Oscilador cuántico

24. La función de onda

$$\psi(x) = Cxe^{-\alpha x^2}$$

también describe el estado del oscilador cuántico, suponiendo que la constante α se elija de manera idónea. a) Use la ecuación de Schrödinger a fin de obtener una expresión para α en términos de la masa m del oscilador y la frecuencia clásica de oscilación, ω. ¿Cuál es la energía de este estado? b) Normalice esta onda. (*Sugerencia*: Consulte la integral del problema 32.)

25. Demuestre que las energías del oscilador en la ecuación 6.29 corresponden a las amplitudes clásicas

$$A_n = \sqrt{\frac{(2n+1)\hbar}{m\omega}}$$

26. Obtenga una expresión para la densidad de probabilidad $P_c(x)$ de un oscilador *clásico* de masa m, frecuencia ω y amplitud A. (*Sugerencia*: Consulte el problema 28 para el cálculo de probabilidades clásicas.)

27. *Estados coherentes.* Use el applet Java disponible en la red (http://info.brookscole.com/mp3e QMTools Simulations → Problem 6.27) para analizar la evolución temporal de un paquete de onda gaussiana confinado en un pozo de oscilador. Los valores por defecto u omisión para la onda inicial describen una onda gaussiana centrada en el pozo con un ancho ajustable establecido por el valor del parámetro a. Describa la evolución temporal de esta función de onda. ¿Es lo que esperaba? Explique sus observaciones. Ahora desplace el paquete de onda inicial lejos del centro incrementando el parámetro d de cero hasta $d = 1$. Describa de nuevo la evolución temporal de la función de onda resultante. ¿Qué es lo extraordinario en este caso? Tales funciones de onda, denominadas *estados coherentes*, son importantes en la teoría cuántica de la radiación.

6.7 Valores de expectación o valores esperados

28. *Probabilidades clásicas.* a) Demuestre que la densidad de probabilidad clásica que describe a una partícula en un pozo cuadrado infinito de dimensión L es $P_c(x) = 1/L$. (*Sugerencia*: La probabilidad clásica para encontrar una partícula en dx —$P_c(x)\,dx$— es proporcional al *tiempo* que permanece en este intervalo.) b) Use $P_c(x)$ para determinar los promedios *clásicos* $\langle x \rangle$ y $\langle x^2 \rangle$ para una partícula confinada en el pozo, y compare los resultados cuánticos con los que se obtuvieron en el ejemplo 6.15. Analice sus descubrimientos a la luz del principio de correspondencia.

29. Un electrón se describe con la función de onda

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ Ce^{-x}(1 - e^{-x}) & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

donde x está en nanómetros y C es una constante. a) Encuentre el valor de C que normaliza a ψ. b) ¿Dónde es más probable encontrar al electrón?; es decir, ¿para qué valor de x es máxima la probabilidad de encontrar el electrón? c) Calcule $\langle x \rangle$ para este electrón y compare su resultado con la posición más probable. Comente las diferencias que encuentre.

30. Para cualquier función propia ψ_n del pozo cuadrado infinito, demuestre que $\langle x \rangle = L/2$ y que

$$\langle x^2 \rangle = \frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2(n\pi)^2}$$

donde L es la dimensión del pozo.

31. La función de onda de un electrón es

$$\psi(x) = Ce^{-|x|/x_0}$$

donde x_0 es una constante y $C = 1/\sqrt{x_0}$ debido a la normalización (consulte el ejemplo 6.1). En este caso, obtenga expresiones para $\langle x \rangle$ y Δx en términos de x_0.

Calcule también la probabilidad de que el electrón se encuentre a menos de una desviación estándar de su posición media; es decir, en el intervalo de $\langle x\rangle - \Delta x$ a $\langle x\rangle + \Delta x$, y demuestre que esto es independiente de x_0.

32. Calcule $\langle x\rangle$, $\langle x^2\rangle$ y Δx para un oscilador cuántico en su estado base. *Sugerencia:* Use la fórmula integral

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad a > 0$$

33. a) ¿Qué valor se espera para $\langle p\rangle$ en un oscilador cuántico? Sustente su respuesta con un razonamiento simétrico, en vez de hacerlo por cálculo. b) Es posible usar los principios de energía del oscilador cuántico para relacionar $\langle p^2\rangle$ con $\langle x^2\rangle$. Use esta relación, junto con el valor de $\langle x^2\rangle$ del problema 32, a fin de obtener $\langle p^2\rangle$ para el estado base del oscilador. c) Evalúe Δp, usando los resultados de los incisos a) y b).

34. Con base en los resultados de los problemas 32 y 33, evalúe $\Delta x\Delta p$ para el oscilador cuántico en su estado base. ¿Es consistente el resultado con el principio de incertidumbre? (Observe que su cálculo verifica el producto de incertidumbre mínimo; además, el estado base del oscilador cuántico es el *único* estado cuántico con el cual se obtiene esta incertidumbre mínima.)

6.8 Observables y operadores

35. ¿Cuáles de las siguientes son funciones propias del operador de cantidad de movimiento $[p]$? Para las funciones propias, ¿cuáles son los valores propios?
a) $A\,\text{sen}(kx)$
b) $A\,\text{sen}(kx) - A\cos(kx)$
c) $A\cos(kx) + iA\,\text{sen}(kx)$
d) $Ae^{ik(x-a)}$

PROBLEMAS ADICIONALES

36. *El rebotador cuántico.* El rebotador es el equivalente cuántico del problema clásico de una pelota que rebota vertical y elásticamente sobre una superficie nivelada, y se modela mediante la energía potencial que se muestra en la figura P6.36. La coordenada normal a la superficie se denota por x, y la superficie en sí está localizada en $x = 0$. Por arriba de la superficie, la energía potencial del rebotador es lineal, lo que representa la fuerza de atracción de un campo uniforme: en este caso, el campo gravitacional próximo a la Tierra. Por debajo de la superficie, la energía potencial asciende abruptamente hasta un valor muy grande consistente con la incapacidad del rebotador para penetrar en esta región. Para obtener de los estados estacionarios del rebotador a partir de la ecuación de Schrödinger por técnicas analíticas requiere conocer ciertas funciones especiales. La solución numérica constituye una alternativa más sencilla y permite el estudiar fácilmente las funciones de onda para estados ligados. El applet Java para el rebotador cuántico puede encontrarse en http://info.brookscole.com/mp3e QMTools Simulations → Problem 6.36. Use el applet, según se describe ahí, para encontrar los tres niveles más bajos de una pelota de tenis (masa ≈ 50 g) que rebota sobre un piso duro. Cuente el número de nodos para cada función de onda a fin de verificar la regla general de que el n-ésimo estado excitado presenta exactamente n nodos. Para cada estado, determine la distancia más probable por arriba del piso para la pelota que rebota y compárela con la altura máxima que se alcanza desde el punto de vista clásico. (Desde esta perspectiva, es más probable encontrar la pelota en la parte más alta de su recorrido, donde su velocidad se reduce a cero: consulte el problema 28.)

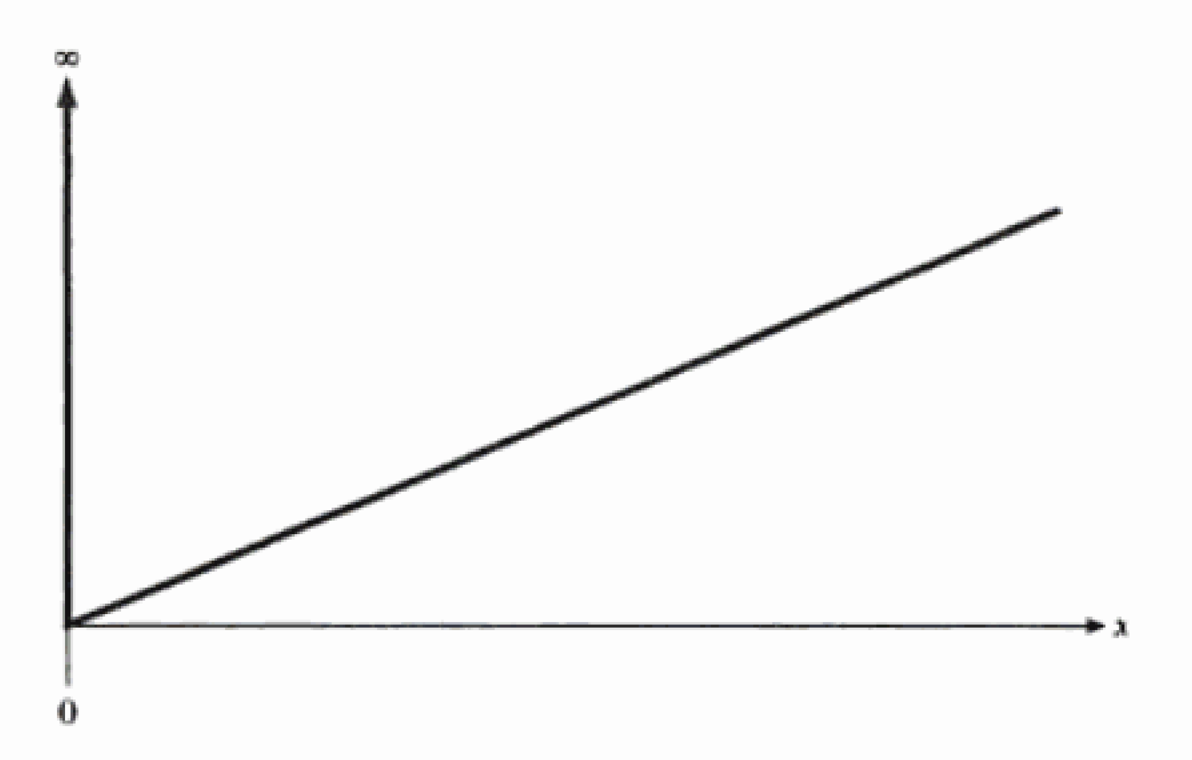


Figura P6.36

37. *Estados no estacionarios.* Considere una partícula en un pozo cuadrado infinito, descrita inicialmente por una onda que es una superposición del estado fundamental y del primer estado excitado del pozo:

$$\Psi(x, 0) = C[\psi_1(x) + \psi_2(x)]$$

a) Demuestre que el valor $C = 1/\sqrt{2}$ normaliza esta onda, suponiendo que ψ_1 y ψ_2 están normalizadas. b) Encuentre $\psi(x, t)$ en cualquier tiempo posterior a t. c) Demuestre que la superposición *no es* un estado estacionario, sino que la energía media en este estado es la media aritmética $(E_1 + E_2)/2$ de las energías del estado base y del primer estado excitado, E_1 y E_2, respectivamente.

38. Para el estado no estacionario del problema 37, demuestre que la posición promedio de la partícula, $\langle x\rangle$, oscila con el tiempo según

$$\langle x\rangle = x_0 + A\cos(\Omega t)$$

donde

$$x_0 = \frac{1}{2}\left(\int x|\psi_1|^2\,dx + \int x|\psi_2|^2\,dx\right)$$

$$A = \int x\psi_1^*\psi_2\,dx$$

y $\Omega = (E_2 - E_1)/\hbar$. Evalúe sus resultados para la posición promedio x_0 y la amplitud de oscilación A para un electrón en un pozo de 1 nm de ancho. Calcule el tiempo necesario para que el electrón recorra el pozo de ida y de vuelta una sola vez. Calcule el mismo tiempo desde el punto de vista clásico para un electrón con una energía igual al promedio, $(E_1 + E_2)/2$.

7

Fenómeno de tunelaje

Contenido del capítulo

En este capítulo se aplican los principios de la mecánica ondulatoria a partículas que colisionan contra una *barrera* de potencial. A diferencia de los pozos de potencial que atraen y atrapan partículas, las barreras las repelen. Debido a que las barreras carecen de estados ligados, ahora el interés está en determinar si una partícula incidente se refleja o se transmite.

A lo largo de este estudio analizaremos un fenómeno peculiar denominado *tunelaje*. Aunque éste es un efecto puramente cuántico, es esencial para la operación de muchos dispositivos modernos y configura nuestro mundo a una escala que va desde la atómica hasta proporciones galácticas. En el capítulo se incluye un análisis del papel que desempeña el tunelaje en varios fenómenos de interés práctico, como la emisión de campo, el decaimiento radiactivo y la operación del máser (amplificador paramagnético) de amoniaco. Por último, se presenta un ensayo sobre el microscopio de tunelaje por barrido (STM, por sus iniciales en inglés), un aparato extraordinario que utiliza el tunelaje para crear imágenes de superficies, cuya resolución es comparable al tamaño de un simple átomo.

7.1 BARRERA CUADRADA

La barrera cuadrada se representa utilizando una función de energía potencial $U(x)$ tal que es una constante U en la región de la barrera, digamos, entre $x = 0$ y $x = L$, y cero fuera de esta región. En la figura 7.1a se muestra un método para producir una barrera de potencial usando cilindros huecos cargados. Los cilindros externos están conectados a tierra, en tanto que el cilindro central se mantiene a algún potencial positivo V. Para una partícula con carga q, la energía de la barrera de potencial es $U = qV$. La carga no experimenta fuerza eléctrica, excepto en los espacios que separan a los cilindros. La fuerza

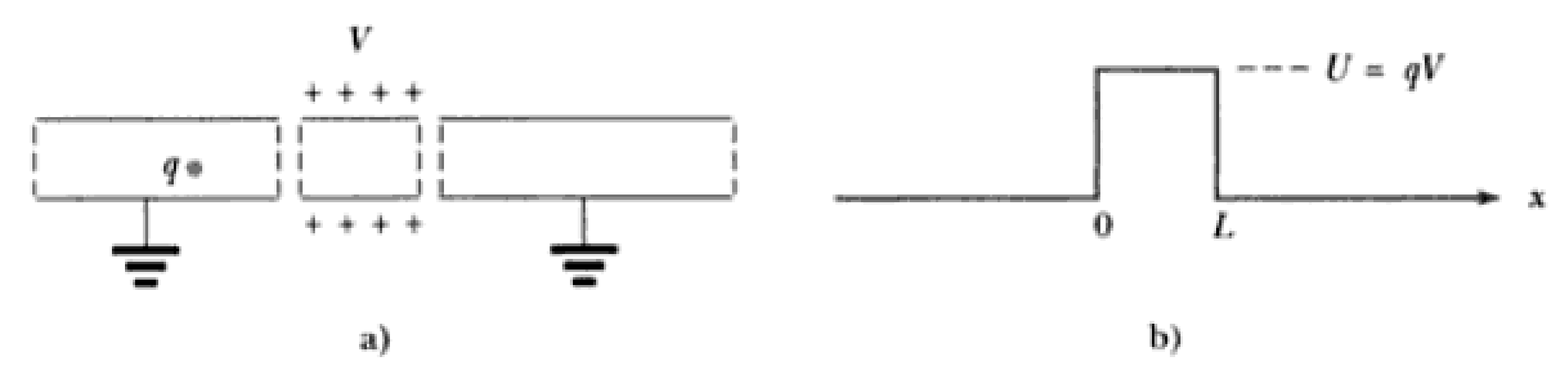


Figura 7.1 a) Cilindros metálicos alineados sirven como barrera de potencial para partículas cargadas. El cilindro central se mantiene a algún potencial eléctrico positivo V y los cilindros exteriores se conectan a tierra. Desde el punto de vista clásico, una carga q cuya energía total sea menor que qV es incapaz de penetrar el cilindro central, aunque puede hacerlo desde el punto de vista de la mecánica cuántica a través un proceso denominado tunelaje. b) La energía potencial vista por esta carga en el límite, donde las distancias entre los cilindros se han reducido a cero. El resultado es la barrera de potencial cuadrada de altura U.

en estos espacios es de repulsión, esto es, que tiende a expulsar la carga positiva q del cilindro central. La energía potencial eléctrica para el caso ideal en que los espacios se han reducido a un tamaño igual a cero es la **barrera cuadrada,** que se muestra en la figura 7.1b.

Una partícula clásica que incide contra la barrera, por ejemplo, desde la izquierda, experimenta una fuerza de retardo al llegar a $x = 0$. Las partículas que tienen energías E mayores que U son capaces de superar esta fuerza, pero disminuyen su velocidad hasta un valor acorde con su energía cinética que ha disminuido $(E - U)$ en la región de la barrera. Tales partículas continúan moviéndose hacia la derecha con una velocidad menor hasta que llegan a $x = L$, donde reciben una "patada" que les devuelve su velocidad original. Así, las partículas con energía $E > U$ son capaces de cruzar la barrera y volver a tener una velocidad igual a la inicial. En contraste, las partículas con energía $E < U$ son reflejadas por la barrera, ya que su energía es insuficiente para cruzarla e, incluso, para penetrarla. De esta manera, la barrera divide el espacio en regiones permitidas y prohibidas, desde el punto de vista clásico, determinadas por la energía de la partícula: si $E > U$, la partícula puede acceder a todo el espacio; en el caso de $E < U$, sólo el intervalo del lado de la barrera de donde proviene la partícula es accesible —la región de la barrera misma está prohibida, lo cual excluye también el movimiento de la partícula en el lado lejano.

Sin embargo, según la mecánica cuántica **no hay región que sea inaccesible para la partícula, sin importar su energía,** ya que la función de onda asociada con esta partícula es diferente de cero en todas partes. Una función de onda típica para este caso, ilustrada en la figura 7.2a, muestra claramente la penetración de la onda en la barrera y más allá de ésta. Tal penetración contradice por completo a la física clásica. El proceso de penetración de la barrera se denomina **tunelaje:** se dice que la partícula ha perforado un túnel en la barrera.

La expresión matemática para Ψ en cualquier lado de la barrera se encuentra con facilidad. A la izquierda de la barrera la partícula es una partícula libre, de modo que, ahí, la función de onda está constituida por las ondas planas de partícula libre que se presentaron en el capítulo 6:

$$\Psi(x, t) = Ae^{i(kx-\omega t)} + Be^{i(-kx-\omega t)} \tag{7.1}$$

La función de onda $\Psi(x, t)$ es en realidad la suma de dos ondas planas. Ambas tienen frecuencia ω y energía $E = \hbar\omega = \hbar^2k^2/2m$, pero la primera se desplaza de izquierda a derecha (número de onda k) y la segunda lo hace de derecha a izquierda (número de onda $-k$). Así, la parte de Ψ que es proporcional a A se

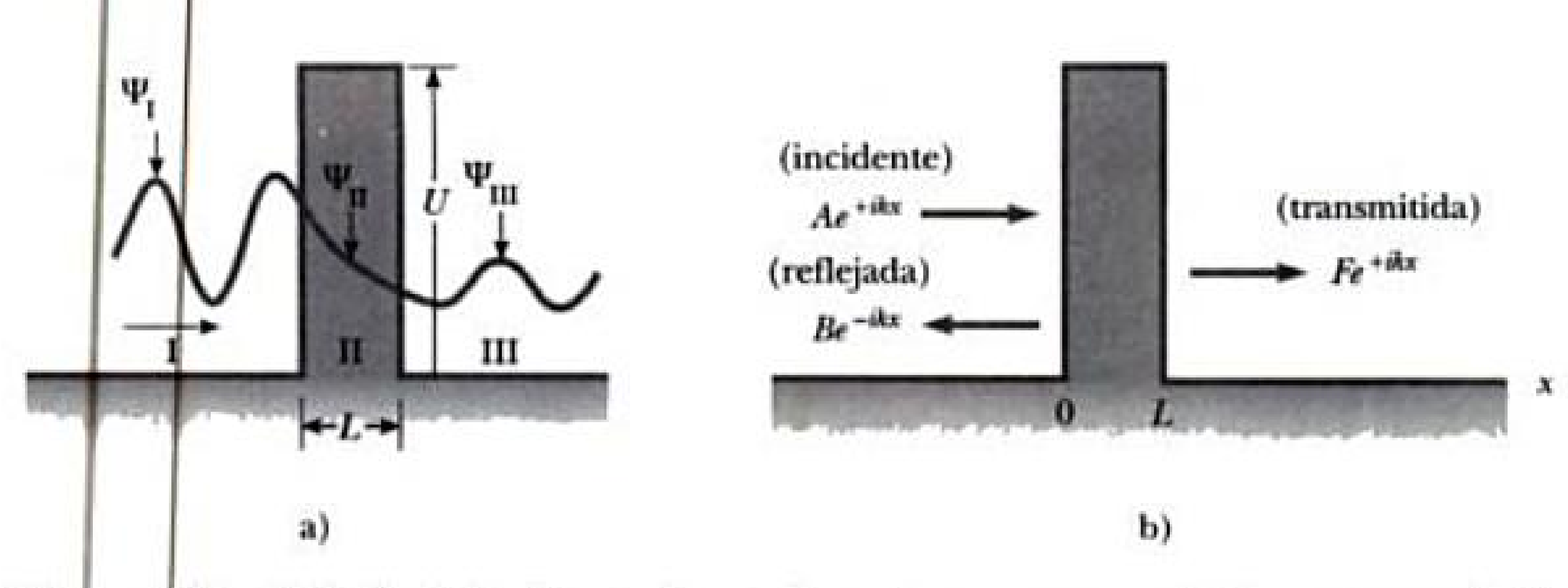


Figura 7.2 a) Onda típica de estado estacionario para una partícula en presencia de una barrera cuadrada. La energía E de la partícula es menor que la altura U de la barrera. Debido a que la amplitud de la onda es diferente de cero en la barrera, hay una probabilidad de encontrar ahí a la partícula. b) Descomposición de la onda estacionaria en ondas incidente, reflejada y transmitida.

interpreta como la onda que incide contra la barrera desde la izquierda; en tanto que la parte proporcional a B, como la onda reflejada desde la barrera y que se desplaza de derecha a izquierda (figura 7.2b). El **coeficiente de reflexión** R para la barrera se calcula como la razón de la densidad de probabilidad reflejada a la densidad de probabilidad incidente:

$$R = \frac{(\Psi^*\Psi)_{\text{reflejada}}}{(\Psi^*\Psi)_{\text{incidente}}} = \frac{B^*B}{A^*A} = \frac{|B|^2}{|A|^2} \tag{7.2}$$

Coeficiente de reflexión para una barrera

En terminología ondulatoria, R es la fracción de intensidad de la onda en el haz reflejado; en lenguaje corpuscular, R se convierte en la probabilidad de que una partícula incidente en la barrera desde la izquierda sea reflejada por ésta.

Razonamientos semejantes son válidos para la derecha de la barrera donde, de nuevo, la partícula es una partícula libre:

$$\Psi(x, t) = Fe^{i(kx-\omega t)} + Ge^{i(-kx-\omega t)} \tag{7.3}$$

Esta forma para $\Psi(x, t)$ es válida en el intervalo $x > L$, donde el término proporcional a F describe una onda que se desplaza hacia la derecha, y el proporcional a G describe una onda que se desplaza en esta región hacia la izquierda. Esto último no tiene interpretación física para una onda incidente desde la izquierda sobre la barrera, por lo que se descarta al pedir que $G = 0$. El término proporcional a F corresponde a esa parte de la onda incidente que se transmite a través de la barrera. La intensidad relativa de esta onda transmitida es el **coeficiente de transmisión** T para la barrera:

$$T = \frac{(\Psi^*\Psi)_{\text{transmitida}}}{(\Psi^*\Psi)_{\text{incidente}}} = \frac{F^*F}{A^*A} = \frac{|F|^2}{|A|^2} \tag{7.4}$$

Coeficiente de transmisión para una barrera

El coeficiente de transmisión mide la probabilidad de que una partícula que incide sobre la barrera desde la izquierda penetre y salga por el otro lado. Debido a que una partícula que incide en la barrera se refleja o transmite, la suma de las probabilidades de estos eventos debe ser igual a la unidad:

$$R + T = 1 \tag{7.5}$$

La ecuación (7.5) expresa un tipo de **regla de adición** que cumplen los coeficientes de barrera. Además, el grado de transmisión o reflexión depende de la energía de la partícula. En el caso clásico $T = 0$ (y $R = 1$) para $E < U$, pero

$T = 1$ (y $R = 0$) para $E > U$. Las predicciones de la mecánica ondulatoria para las funciones $T(E)$ y $R(E)$ son más complicadas; para obtenerlas es necesario analizar la función de onda en el interior de la barrera.

Para encontrar Ψ en la barrera es necesario resolver la ecuación de Schrödinger. A continuación se considerarán los estados estacionarios $\psi(x)e^{-i\omega t}$, cuya energía $E = \hbar\omega$ está por debajo de la parte superior de la barrera. Éste es el caso $E < U$, para el cual, desde el punto de vista clásico, no es posible la penetración en la barrera. En la región de la barrera ($0 < x < L$), $U(x) = U$ y la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para $\psi(x)$ puede escribirse como

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \left\{\frac{2m(U - E)}{\hbar^2}\right\}\psi(x)$$

Con $E < U$, el término entre corchetes es una constante positiva, y las funciones *exponenciales reales* $e^{\pm\alpha x}$ son soluciones para esta ecuación. Debido a que $(d^2/dx^2)e^{\pm\alpha x} = (\alpha)^2 e^{\pm\alpha x}$, el término entre corchetes debe identificarse con α^2 o, de manera equivalente,

$$\alpha = \frac{\sqrt{2m(U - E)}}{\hbar} \tag{7.6}$$

En el caso de barreras anchas, la probabilidad de encontrar la partícula deberá disminuir conforme nos adentramos en la barrera; en este tipo de situaciones, sólo es importante la exponencial que decae, y conviene definir la **profundidad de penetración** de la barrera $\delta = 1/\alpha$. A una distancia δ en el interior de la barrera, la función de onda ha disminuido a $1/e$ de su valor en el borde de la barrera; así, la probabilidad de encontrar a la partícula es apreciable sólo a una distancia inferior a δ del borde de la barrera.

La función de onda completa en el interior de la barrera es; entonces,

$$\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-i\omega t} = Ce^{-\alpha x - i\omega t} + De^{+\alpha x - i\omega t} \qquad \text{para } 0 < x < L \tag{7.7}$$

Los coeficientes C y D se obtienen al pedir una unión continua de la función de onda en los bordes de la barrera; es decir, tanto Ψ como $\partial\Psi/\partial x$ deben de ser continuas en $x = 0$ y $x = L$. Al escribir las condiciones de continuidad usando las ecuaciones 7.1, 7.3 y 7.7 para Ψ en las regiones a la izquierda, a la derecha y en el interior de la barrera, respectivamente, se obtiene

Condiciones de continuidad en una barrera cuadrada

$$\begin{aligned}
A + B &= C + D && (\text{continuidad de } \Psi \text{ en } x = 0)\\
ikA - ikB &= \alpha D - \alpha C && \left(\text{continuidad de } \frac{\partial\Psi}{\partial x} \text{ en } x = 0\right)\\
Ce^{-\alpha L} + De^{+\alpha L} &= Fe^{ikL} && (\text{continuidad de } \Psi \text{ en } x = L)\\
(\alpha D)e^{+\alpha L} - (\alpha C)e^{-\alpha L} &= ikFe^{ikL} && \left(\text{continuidad de } \frac{\partial\Psi}{\partial x} \text{ en } x = L\right)
\end{aligned} \tag{7.8}$$

De acuerdo con las observaciones previas, se estableció $G = 0$. Sin embargo, hay un número de incógnitas mayor que el número de ecuaciones para encontrarlas. En realidad, así debe ser ya que la amplitud de la onda incidente simplemente establece la escala para las demás amplitudes. Es decir, duplicar la amplitud de la onda incidente sólo duplica las amplitudes de la onda reflejada y de la transmitida. Al dividir las ecuaciones 7.8 entre A se obtienen cuatro ecuaciones para las cuatro razones B/A, C/A, D/A y F/A. Estas ecuacio-

nes pueden resolverse por sustitución repetida a fin de encontrar B/A y los demás cocientes, en términos de la altura de la barrera, U, el ancho de la barrera, L, y la energía de la partícula, E. El resultado para el coeficiente de transmisión T es (vea el problema 7)

$$T(E) = \left\{1 + \frac{1}{4}\left[\frac{U^2}{E(U-E)}\right]\operatorname{senh}^2\alpha L\right\}^{-1} \tag{7.9}$$

donde senh denota la función seno hiperbólico: senh $x = (e^x - e^{-x})/2$.

En la figura 7.3 se muestra una gráfica de $T(E)$ para la barrera cuadrada. La ecuación 7.9 se cumple sólo para energías E por debajo de la altura de la barrera, U. Para $E > U$, α se vuelve imaginario y senh(αL) se vuelve una función periódica. Lo anterior conduce a fluctuaciones en $T(E)$ y a ciertos valores de la energía para las cuales la transmisión ocurre con total certidumbre; es decir, $T(E) = 1$. Estas *resonancias de transmisión* se deben a la interferencia de las ondas y constituyen una evidencia adicional de la naturaleza ondulatoria de la materia (vea el ejemplo 7.3).

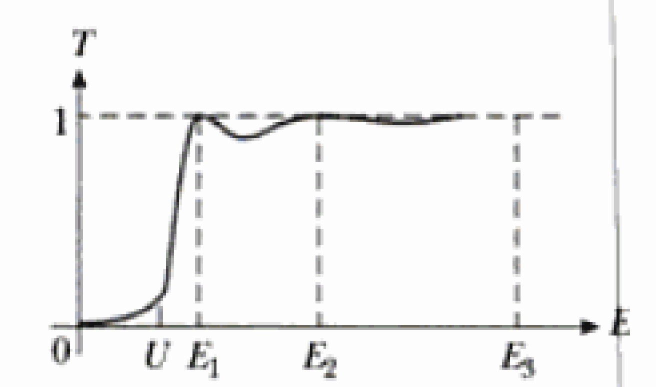


Figura 7.3 Bosquejo del coeficiente de transmisión $T(E)$ para una barrera cuadrada. La oscilación en $T(E)$, con E y las resonancias de transmisión en E_1, E_2 y E_3, constituyen evidencia adicional sobre la naturaleza ondulatoria de la materia.

EJEMPLO 7.1 Coeficiente de transmisión para una capa de óxido

Dos alambres conductores de cobre están separados por una capa aislante de óxido de cobre (CuO). Modele la capa de óxido como una barrera cuadrada de 10 eV de altura a fin de calcular el coeficiente de transmisión para penetración de electrones de 7 eV si el grosor de la capa mide a) 5 nm y b) 1 nm.

Solución A partir de la ecuación 7.6 se calcula α para este caso, usando $\hbar = 1.973$ keV · Å/c y $m_e = 511$ keV/c^2 para los electrones, a fin de obtener

$$\alpha = \frac{\sqrt{2m_e(U-E)}}{\hbar}$$

$$= \frac{\sqrt{2(511\text{ keV}/c^2)(3\times10^{-3}\text{ keV})}}{1.973\text{ keV}\cdot\text{Å}/c} = 0.8875\text{ Å}^{-1}$$

Así, el coeficiente de transmisión a partir de la ecuación 7.9 es

$$T = \left\{1 + \frac{1}{4}\left[\frac{10^2}{7(3)}\right]\operatorname{senh}^2(0.8875\text{ Å}^{-1})L\right\}^{-1}$$

Al sustituir $L = 50$ Å (5 nm) se obtiene

$$T = 0.963 \times 10^{-38}$$

¡Un número fantásticamente pequeño del orden de 10^{-38}! No obstante, con $L = 10$ Å (1 nm) se obtiene

$$T = 0.657 \times 10^{-7}$$

Se observa que ¡reducir el grosor de la capa por un factor de 5 mejora la probabilidad de penetración en casi 31 órdenes de magnitud!

Ejercicio 1 Consulte nuestro sitio en la red (http://info.brookscole.com/mp3e) y seleccione QMTools Simulations → Exercise 7.1. Este applet Java muestra la onda de De Broglie (de hecho, sólo la parte real) para un electrón con 7 eV de energía que incide, desde la izquierda, sobre una barrera cuadrada de 10 eV de altura y 1 Å de ancho. Compare esta función de onda con la ilustración de la figura 7.2a. De hecho, esta onda es inherentemente compleja de valuar, con un módulo y una fase que varían de un punto a otro. En una exposición más informativa el módulo se grafica de la manera acostumbrada pero se utiliza color para representar la fase de la onda. Haga clic en el botón derecho del mouse en la forma de onda y seleccione Properties . . .→ Color-4-Phase → Apply para mostrar el estilo de graficado usando color para la fase. ¿Por qué la onda transmitida (a la derecha de la barrera) ahora tiene una altura uniforme? ¿Cuál es la importancia de esta altura? Siga las instrucciones que se proporcionan en la página Web para mostrar la componente incidente de esta onda dispersada y determine el coeficiente de transmisión directamente a partir de las gráficas. Compare su resultado con que se predice de la ecuación 7.9.

EJEMPLO 7.2 Corriente de tunelaje a través de una capa de óxido

Una corriente de electrones a 1 mA en uno de los alambres del ejemplo 7.1 incide sobre la capa de óxido. ¿Cuánto de esta corriente atraviesa la capa hasta el alambre adyacente si la energía del electrón es de 7 eV y el grosor de la capa mide 1 nm? ¿Qué ocurre con el resto de la corriente?

Solución Debido a que cada electrón transporta una carga igual a $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C, una corriente de 1 mA representa $10^{-3}/(1.60 \times 10^{-19}) = 6.25 \times 10^{15}$ electrones por segundo que chocan contra la barrera. De éstos, sólo se transmite la fracción T, donde $T = 0.657 \times 10^{-7}$, por el ejemplo 7.1. Así, el número de electrones por segundo que continúan su recorrido hacia el alambre adyacente es

$$(6.25 \times 10^{15})(0.657 \times 10^{-7}) = 4.11 \times 10^{8} \text{ electrones/s}$$

Este número representa una corriente transmitida de

$$(4.11 \times 10^{8}/\text{s})(1.60 \times 10^{-19}\text{ C}) = 6.57 \times 10^{-11}\text{ A} = 65.7 \text{ pA (picoamperes)}$$

(Observe que se obtiene la misma corriente transmitida si simplemente se multiplica la corriente incidente por el coeficiente de transmisión.) El restante 1 mA − 65.7 pA se refleja en la capa. Es importante observar que la corriente de conducción medida en el alambre del lado de incidencia es el resultado neto de las corrientes incidente y reflejada, o de nuevo 65.7 pA.

EJEMPLO 7.3 Resonancias de transmisión

Considere una partícula que incide por la izquierda sobre una barrera cuadrada de ancho L con una energía E superior a la altura U de la barrera. Escriba las funciones de onda e imponga las condiciones de unión idóneas a fin de obtener una fórmula para el coeficiente de transmisión para este caso. Demuestre que se obtiene una transmisión (resonancia) perfecta para ciertos valores de la energía de la partícula, y explique este fenómeno en términos de la interferencia de ondas de De Broglie.

Solución A la izquierda y a la derecha de la barrera, las funciones de onda son las de partícula libre dadas por las ecuaciones 7.1 y 7.3 (de nuevo con $G = 0$ para describir una onda transmitida en el lado lejano de la barrera):

$$\Psi(x, t) = Ae^{i(kx-\omega t)} + Be^{i(-kx-\omega t)} \qquad x < 0$$

$$\Psi(x, t) = Fe^{i(kx-\omega t)} \qquad x > L$$

El número de onda k y la frecuencia ω de estas oscilaciones se obtienen de la energía E de la partícula en la manera característica (no relativista) de las ondas de De Broglie; es decir, $E = (\hbar k)^2/2m = \hbar\omega$. En el interior de la barrera la función de onda también es oscilatoria. En efecto, la constante de decaimiento α de la ecuación 7.6 se ha vuelto imaginaria, ya que $E > U$. Al introducir un nuevo número de onda k' como $\alpha = ik'$, la función de onda en la región de la barrera se convierte en

$$\Psi(x, t) = Ce^{i(-k'x-\omega t)} + De^{i(k'x-\omega t)} \qquad 0 < x < L$$

donde $k' = [2m(E - U)/\hbar^2]^{1/2}$ es un número real.

La función de onda en el interior de la barrera se une de manera continua con las funciones de onda externas si la función de onda y su pendiente son continuas en los bordes de la barrera, $x = 0$ y $x = L$. Estos requisitos de continuidad son idénticos a las ecuaciones 7.8, con la sustitución $\alpha = ik'$ en todas partes. En particular, ahora se tiene

$$A + B = C + D \qquad \text{(continuidad de } \Psi \text{ en } x = 0)$$

$$kA - kB = k'D - k'C \qquad \left(\text{continuidad de } \frac{\partial \Psi}{\partial x} \text{ en } x = 0\right)$$

$$Ce^{-ik'L} + De^{ik'L} = Fe^{ikL} \qquad \text{(continuidad de } \Psi \text{ en } x = L)$$

$$k'De^{ik'L} - k'Ce^{-ik'L} = kFe^{ikL} \qquad \left(\text{continuidad de } \frac{\partial \Psi}{\partial x} \text{ en } x = L\right)$$

Para despejar la amplitud de transmisión F/A, es necesario eliminar de estas relaciones los coeficientes no deseados B, C y D. Al dividir la segunda ecuación entre k y sumar el resultado a la primera ecuación se elimina B, dejando a A en términos de C y D. De la misma forma, al dividir la cuarta ecuación entre k' y sumar el resultado a la tercera se obtiene D (en términos de F), mientras que al restar el resultado de la tercera ecuación se obtiene C (en términos de F). Por último, al combinar estos resultados se obtiene A en términos de F:

$$A = \frac{1}{4}Fe^{ikL}\left\{\left[2 - \left(\frac{k'}{k} + \frac{k}{k'}\right)\right]e^{ik'L} + \left[2 + \left(\frac{k'}{k} + \frac{k}{k'}\right)\right]e^{-ik'L}\right\}$$

La probabilidad de transmisión es $T = |F/A|^2$. Al escribir $e^{\pm ik'L} = \cos k'L \pm i \operatorname{sen} k'L$ y al simplificar se llega al resultado final

$$\frac{1}{T} = \left|\frac{A}{F}\right|^2 = \frac{1}{4}\left|2\cos k'L - i\left(\frac{k'}{k} + \frac{k}{k'}\right)\operatorname{sen} k'L\right|^2 = 1 + \frac{1}{4}\left[\frac{U^2}{E(E - U)}\right]\operatorname{sen}^2 k'L$$

Se observa que las **resonancias de transmisión** se presentan siempre que $k'L$ sea un múltiplo de π. Al usar $k' = [2m(E - U)/\hbar^2]^{1/2}$, la condición de resonancia puede expresarse en términos de la energía E de la partícula como

$$E = U + n^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Las partículas con estas energías siempre se transmiten ($T = 1$), sin ninguna posibilidad de reflejarse ($R = 0$).

Las resonancias surgen debido a la interferencia de la onda de materia que acompaña a la partícula. La onda reflejada por la barrera puede considerarse como la superposición de ondas de materia reflejándose desde los bordes de entrada y salida de la barrera en $x = 0$ y $x = L$, respectivamente. Si el desplazamiento de fase de estas ondas reflejadas es por múltiplos impares de 180° o π radianes, interfieren destructivamente, sin dejar ninguna onda reflejada ($R = 0$) y permitiendo una transmisión perfecta. Luego, la onda reflejada por la parte posterior de la barrera en $x = L$ debe recorrer la distancia adicional $2L$ antes de recombinarse con la onda reflejada en el frente, lo que lleva a una diferencia de fase de $2k'L$. Pero esta onda también experimenta un desplazamiento intrínseco de fase de π radianes, habiendo sido reflejada desde un medio con mayor densidad óptica.[1] Así, la condición para interferencia destructiva se convierte en $2k'L + \pi = (2n + 1)\pi$, o, simplemente, $k'L = n\pi$, donde $n = 1, 2, \ldots$

También se tiene transmisión perfecta cuando se dispersan partículas mediante un pozo de potencial, este fenómeno es conocido como **efecto de Raumsauer-Townsend** (vea el problema 7.11).

Ejercicio 2 Compruebe que para $E \gg U$, el coeficiente de transmisión del ejemplo 7.3 tiende a la unidad. ¿Por qué es de esperar este resultado? ¿Qué ocurre con T en el límite cuando E tiende a U?

EJEMPLO 7.4 Dispersión por un escalón de potencial

El escalón de potencial que se muestra en la figura 7.4 puede considerarse como una barrera cuadrada cuando el ancho L de la barrera es infinito. Aplique las ideas presentadas en esta sección para analizar la dispersión cuántica de partículas que inciden por la izquierda en un escalón de potencial, en donde la altura U del escalón excede la energía total E de la partícula.

Solución La función de onda en todos los puntos a la derecha del origen es la función de onda de la barrera dada por la ecuación 7.7. A fin de evitar que Ψ diverja para x grande, debe tomarse $D = 0$, dejando sólo la onda

$$\Psi(x, t) = Ce^{-\alpha x - i\omega t} \qquad x > 0$$

Lo anterior debe unirse de manera continua con la función de onda a la izquierda del origen, dada por la ecuación 7.1:

$$\Psi(x, t) = Ae^{ikx - i\omega t} + Be^{-ikx - i\omega t} \qquad x < 0$$

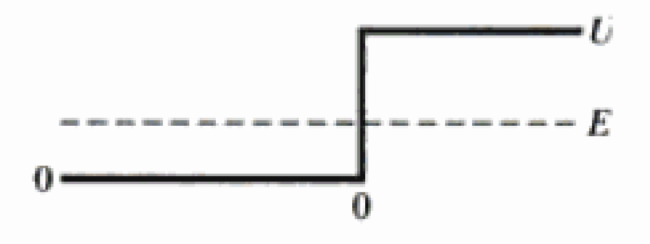


Figura 7.4 (Ejemplo 7.4) El escalón de potencial de altura U puede entenderse como una barrera cuadrada de la misma altura en el límite en que el ancho L de la barrera se vuelve infinito. Todas las partículas que inciden sobre la barrera con una energía $E < U$ se reflejan.

Las condiciones para una unión continua en $x = 0$ producen

$$A + B = C \qquad \text{(continuidad de } \Psi)$$

$$ikA - ikB = -\alpha C \qquad \left(\text{continuidad de } \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)$$

Al despejar C en la segunda ecuación y sustituir el resultado en la primera ecuación (con $\delta = 1/\alpha$) se obtiene $A + B = -ik\delta A + ik\delta B$, o bien,

$$\frac{B}{A} = -\frac{(1 + ik\delta)}{(1 - ik\delta)}$$

El coeficiente de reflexión es $R = |B/A|^2 = (B/A)(B/A)^*$, o bien,

$$R = \left(\frac{(1 + ik\delta)}{(1 - ik\delta)}\right)\left(\frac{(1 - ik\delta)}{(1 + ik\delta)}\right) = 1$$

Así pues, al igual que en la teoría clásica una barrera *infinitamente* ancha refleja todas las partículas incidentes con energías inferiores a la altura de la barrera. No obstante, en la región del escalón hay una función de onda diferente de cero, ya que

$$\frac{C}{A} = 1 + \frac{B}{A} = \frac{-2ik\delta}{1 - ik\delta} \neq 0$$

Pero la función de onda para $x > 0$, $\Psi(x, t) = Ce^{-\alpha x - i\omega t}$, no es en absoluto una onda propagándose; es decir, a la derecha del escalón no hay una transmisión neta de partículas. Sin embargo, sí la hay a través de una barrera de ancho *finito*, sin importar cuán ancha sea (compare con la ecuación 7.9).

[1] Esto es conocido a partir de la propagación de ondas clásicas. Una onda viajera que llega a una interfase que separa dos medios se transmite y refleja parcialmente. La porción reflejada está fuera de fase 180° sólo en el caso en que la velocidad de la onda es menor en el medio que está siendo penetrado. Para ondas de materia, $p = h/\lambda$ y la longitud de onda (y por ende la velocidad de la onda) es más grande en regiones donde la energía cinética es la más pequeña. Así, la onda de materia reflejada por la parte frontal de una barrera no experimenta ningún cambio en fase, aunque la que se refleja desde la parte posterior está fuera de fase 180°.

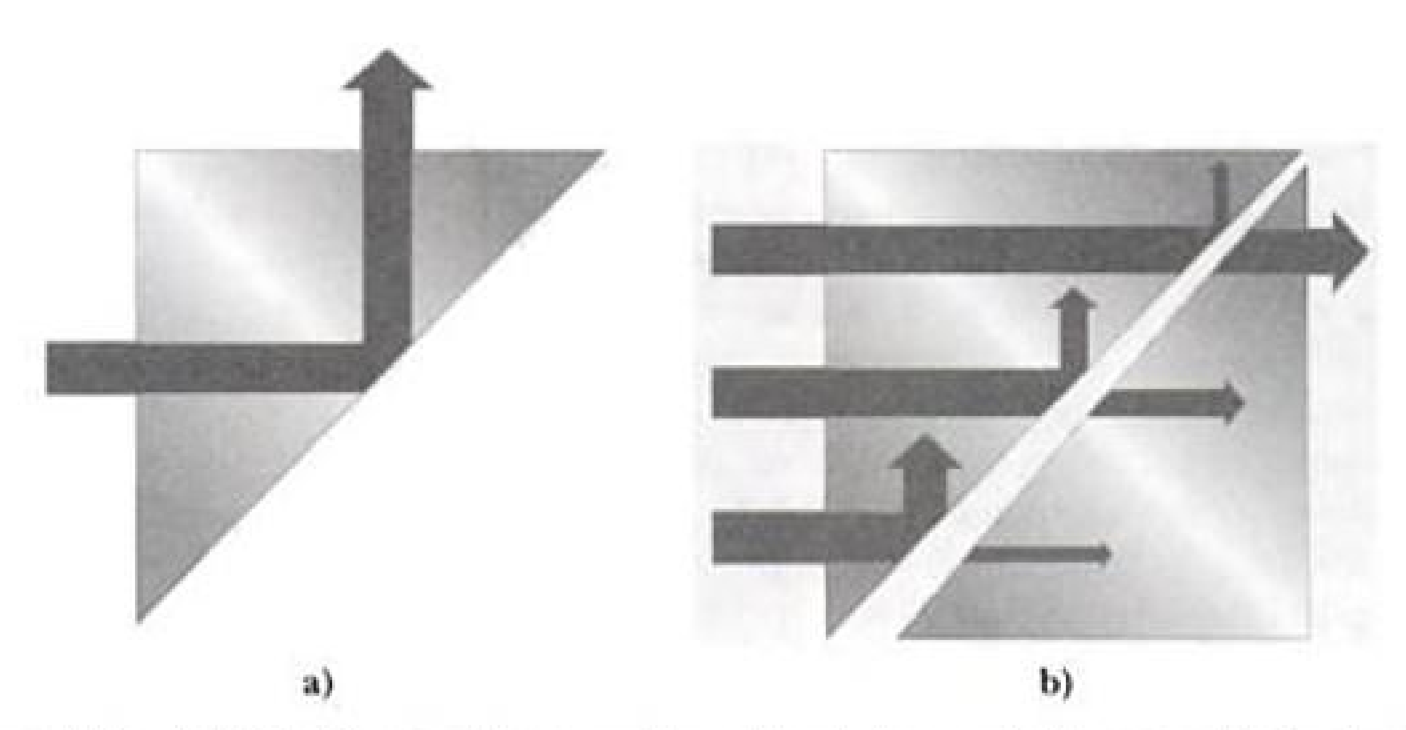


Figura 7.5 a) Reflexión total interna de ondas de luz en la frontera vidrio-aire. Una onda evanescente penetra en el espacio más allá de la superficie reflejante. b) Reflexión total interna sin éxito. La onda evanescente es "detectada" por una superficie vecina, lo que da como resultado transmisión a través del hueco. Observe que el haz de luz *no aparece* en el hueco.

La existencia de una onda sin propagación en el interior de la barrera (como en el ejemplo 7.4) es conocida a partir del fenómeno óptico de reflexión total interna explotado en la construcción de separadores de haces (figura 7.5): luz que penetra en ángulo recto a un prisma se refleja por completo en la cara de la hipotenusa, aun cuando una onda electromagnética, la onda evanescente, penetre más allá del espacio. Si se pone en contacto un segundo prisma con el primero, es posible "detectar" esta onda evanescente, retransmitiendo y volviendo así a dirigir el haz original (figura 7.5b). Este fenómeno, conocido como **reflexión total interna frustrada,** es el análogo óptico del tunelaje: en efecto, los fotones han perforado un túnel a través del hueco que separa ambos prismas.

7.2 PENETRACIÓN DE BARRERA: ALGUNAS APLICACIONES

Hoy en día, pocas barreras pueden modelarse con exactitud usando la barrera cuadrada que se analizó en la sección anterior. En efecto, la extrema sensibilidad de las constantes encontradas ahí sugiere que la forma de la barrera es importante para hacer predicciones confiables de las probabilidades de tunelaje. El coeficiente de transmisión para una barrera de forma arbitraria, especificada por la función de energía potencial $U(x)$, puede encontrarse a partir de la ecuación de Schrödinger. Para barreras altas y anchas, donde la probabilidad de penetración es pequeña, un largo análisis lleva al resultado aproximado

Coeficiente de transmisión aproximado de una barrera de forma arbitraria

$$T(E) \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m}\int\sqrt{U(x)-E}\,dx\right) \tag{7.10}$$

La integral en la ecuación 7.10 se ha tomado sobre la región prohibida en donde $E < U(x)$ desde el punto de vista clásico. Un razonamiento simple que conduce a esta ecuación se obtiene al representar a una barrera arbitraria como una sucesión de barreras cuadradas, todas las cuales dispersan de manera independiente, de modo que la intensidad de la onda transmitida por una ba-

rrera se vuelve la intensidad de onda incidente de la siguiente barrera, y así sucesivamente (vea el problema 15).

El uso de la ecuación 7.10 se ilustra en el resto de esta sección, donde se aplica a varios problemas clásicos de física contemporánea.

Emisión de campo

Cuando ocurre emisión de campo, los electrones ligados a un metal son literalmente arrancados de la superficie debido a la aplicación de un campo eléctrico intenso. De esta forma, el metal se convierte en una fuente que puede adaptarse de manera idónea a fin de que suministre electrones para muchas aplicaciones. En el pasado, la emisión de cátodo frío, como se conocía entonces, era una forma popular para generar electrones en circuitos de tubos al vacío, lo que producía menos "ruido" eléctrico que con las fuentes de filamento caliente, donde los electrones se "evaporaban" al calentar el metal a altas temperaturas. Algunas aplicaciones modernas incluyen el **microscopio de emisión de campo** (figura 7.6) y un dispositivo relacionado, el **microscopio de tunelaje por barrido** (vea el ensayo al final de este capítulo), los cuales utilizan los electrones que escapan para formar una imagen estructuralmente detallada en la superficie emisora.

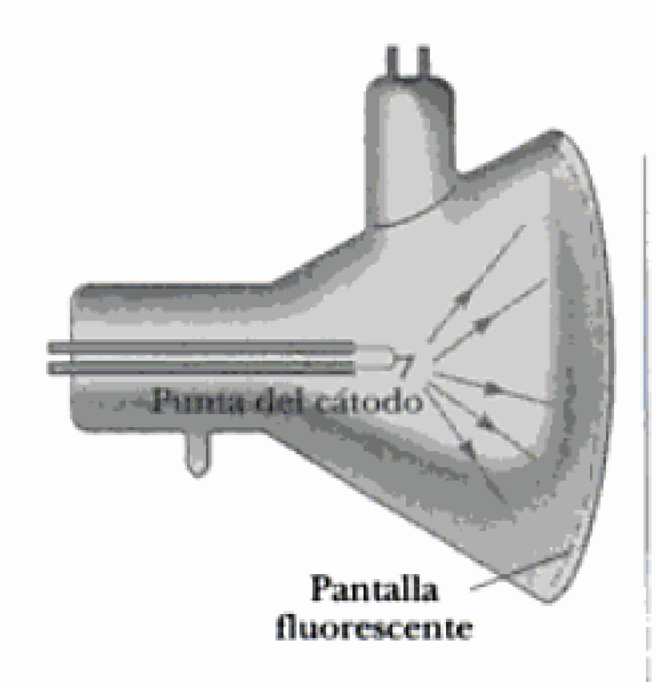


Figura 7.6 Diagrama de un microscopio de emisión de campo. El intenso campo eléctrico en la punta del espécimen en forma de aguja permite que los electrones crucen a través de la barrera de la función trabajo en la superficie. Debido a que la probabilidad de tunelaje es sensible a los detalles exactos de la superficie por donde pasa el electrón, el número de electrones que escapan varía de un punto a otro con la condición de la superficie, proporcionando así una imagen de la superficie en estudio.

La emisión de campo es un fenómeno de tunelaje. En la figura 7.7a se muestra de manera esquemática cómo puede obtenerse emisión de campo al colocar una placa con carga positiva cerca de la fuente metálica para formar, de manera efectiva, un capacitor de placas paralelas. En el espacio que se forma entre las "placas" hay un campo eléctrico $\mathcal{E}$, pero el campo eléctrico en el interior del metal permanece igual a cero debido al blindaje que crean los electrones móviles de metal atraídos hacia la superficie por la placa con carga positiva. Observe que un electrón en el material es virtualmente libre, aunque siga ligado al metal por el pozo de potencial de profundidad U. La energía total del electrón, E, que incluye la energía cinética, es negativa para indicar un electrón ligado; en efecto, $|E|$ representa la energía necesaria para liberar este electrón, un valor por lo menos igual a la función trabajo del metal.

Modelo de tunelaje para la emisión de campo

Una vez que está más allá de la superficie ($x > 0$), el electrón en cuestión es atraído por la fuerza eléctrica en el hueco, $F = e\mathcal{E}$, representada por la energía potencial $U(x) = -e\mathcal{E}x$. En la figura 7.7b se muestra el diagrama de la energía potencial, junto con las regiones permitida y prohibida, desde el punto de vista clásico, para un electrón de energía E. Las intersecciones de E con $U(x)$ en x_1 (= 0) y x_2 (= $-E\mathcal{E}x$) indican los puntos de retorno clásicos, donde una partícula con esta energía debe regresarse para evitar que penetre en la zona prohibida. Así, desde el punto de vista clásico, un electrón inicialmente confinado al metal carece de energía suficiente para superar la barrera de potencial en la superficie y ¡debe permanecer siempre en el material! Es sólo por su carácter ondulatorio que el electrón puede cruzar a través de esta barrera para salir por el otro lado. La probabilidad de que ocurra esto se mide por medio del coeficiente de transmisión para la barrera triangular que se muestra en la figura 7.7b.

Para calcular $T(E)$ es necesario evaluar la integral de la ecuación 7.10 en la región prohibida, desde el punto de vista clásico, desde x_1 hasta x_2. Debido a que $U(x) = -e\mathcal{E}x$ en esta región y $E = -e\mathcal{E}x_2$, se tiene

$$\int \sqrt{U(x) - E}\, dx = \sqrt{e\mathcal{E}} \int_0^{x_2} \sqrt{x_2 - x}\, dx$$

$$= -\frac{2}{3}\sqrt{e\mathcal{E}}\,\{x_2 - x\}^{3/2}\Big|_0^{x_2} = \frac{2}{3}\sqrt{e\mathcal{E}}\left(\frac{|E|}{e\mathcal{E}}\right)^{3/2}$$

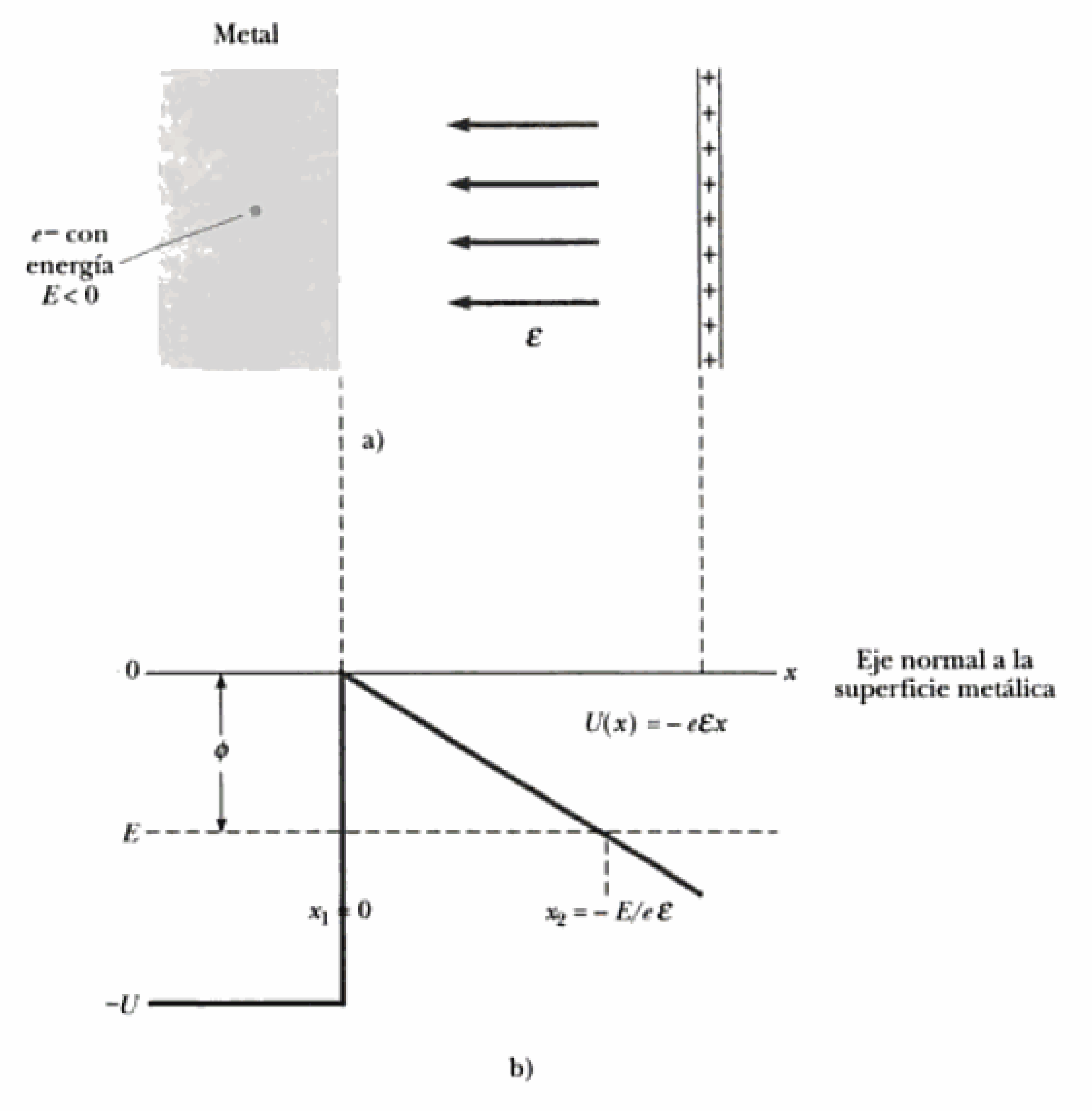


Figura 7.7 a) Emisión de campo por una superficie metálica. b) Energía potencial vista por un electrón del metal. El campo eléctrico produce la barrera de potencial triangular que se muestra, a través de la cual los electrones pueden cruzar para escapar del metal. Los puntos de retorno en $x_1 = 0$ y $x_2 = -E/e\mathcal{E}$ delimitan la región prohibida desde el punto de vista clásico. (Observe que x_2 es positivo porque x_1 es negativo.) El tunelaje es más grande para los electrones más energéticos, para los cuales $|E|$ es igual a la función trabajo ϕ del metal.

Al usar este resultado en la ecuación 7.10 se obtiene el coeficiente de transmisión para la emisión de campo como

Coeficiente de transmisión para la emisión de campo

$$T(E) \approx \exp\left(\left\{-\frac{4\sqrt{2m}\,|E|^{3/2}}{3e\hbar}\right\}\frac{1}{\mathcal{E}}\right) \tag{7.11}$$

La fuerte dependencia de T con respecto a la energía E del electrón en el material es evidente a partir de esta expresión. También resulta evidente que la cantidad entre llaves debe tener unidades de campo eléctrico y que representa una intensidad de campo característica, por ejemplo, $\mathcal{E}_c$, para emisión de campo:

$$\mathcal{E}_c = \frac{4\sqrt{2m}|E|^{3/2}}{3e\hbar} \tag{7.12}$$

La probabilidad de escape es más grande para los electrones más energéticos; éstos son los que están más débilmente ligados y para los cuales $|E| = \phi$, la función trabajo del metal. Para $|E| = \phi = 4$ eV, un valor típico para muchos metales, se

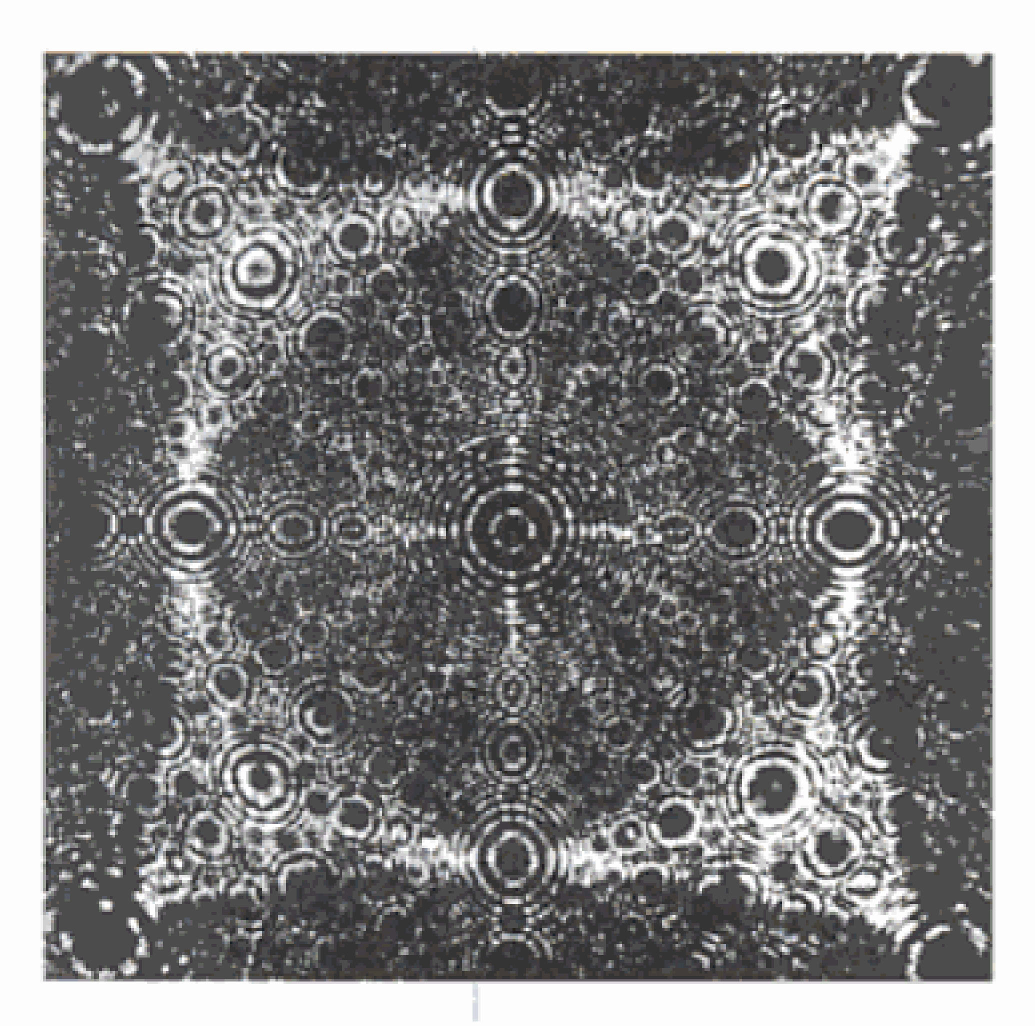


Figura 7.8 Imagen obtenida, utilizando un microscopio de emisión de campo, de la superficie de una aleación de platino cristalino, con una amplificación de 3 000 000×. Utilizando esta técnica es posible observar átomos individuales sobre las capas superficiales. (*Manfred Kage/Peter Arnold, Inc.*)

calcula que la intensidad de campo característica es $\mathcal{E}_c = 5.5 \times 10^{10}$ V/m, un campo intenso, según los patrones de laboratorio. Es posible medir emisiones incluso con campos mucho más débiles, ya que la *tasa* de emisión depende del producto del coeficiente de transmisión y el número de electrones por segundo que chocan contra la barrera. Esta frecuencia de colisión es bastante alta para una muestra volumétrica que contiene alrededor de 10^{22} electrones por centímetro cúbico y ¡no es raro observar valores superiores a 10^{30} colisiones por segundo por centímetro cuadrado (vea el problema 7.18)! De esta forma pueden alcanzarse tasas de emisión de campo del orden de 10^{10} electrones por segundo (corrientes aproximadamente iguales a 1 nA) con campos aplicados tan pequeños como $\mathcal{E}_c/50$, o bien, de alrededor de 10^9 V/m.

EJEMPLO 7.5 Tunelaje en un capacitor de placas paralelas

Calcule la corriente de fuga por tunelaje que pasa a través de un capacitor de placas paralelas cargado en el que hay una diferencia de potencial de 10 kV. Considere que la separación entre las placas es $d = 0.010$ mm y que el área de cada placa es $A = 1\ \text{cm}^2$.

Solución El número de electrones por segundo que chocan contra la superficie de la placa desde el material es la frecuencia de colisión, f, aproximadamente igual a 10^{30} por segundo por centímetro cuadrado para casi todos los metales. De éstos, sólo la fracción dada por el coeficiente de transmisión T "puede perforar" un túnel a través de la barrera de potencial en el espacio entre las placas y así registrarse como una corriente a través del dispositivo. Así, la tasa de emisión de electrones para una placa de 1 cm^2 de área es

$$\lambda = fT(E) = 1 \times 10^{30} \exp(-\mathcal{E}_c/\mathcal{E})$$

El campo eléctrico $\mathcal{E}$ en el hueco es 10 kV/0.010 mm = 1×10^9 V/m. Al usar esto y $\mathcal{E}_c = 5.5 \times 10^{10}$ V/m se obtiene para la exponencial $\exp\{-55\} = 1.30 \times 10^{-24}$ y una tasa de emisión de $\lambda = 1.30 \times 10^6$ electrones por segundo. Debido a que cada electrón transporta una carga $e = 1.69 \times 10^{-19}$ C, la corriente de tunelaje es

$$I = 2.1 \times 10^{-13}\ \text{A} = 0.21\ \text{pA}$$

Decaimiento α

El decaimiento de elementos radiactivos con la emisión de partículas α (núcleos de helio compuestos por dos protones y dos neutrones) fue uno de los rompecabezas más duraderos a los cuales se aplicó el incipiente campo de la mecánica cuántica poco después de su aparición en 1926. El que las partículas α sean un producto de la desintegración de elementos como radio, torio y uranio ya estaba bien documentado en 1900, aunque ciertas características de este decaimiento permanecieron siendo un misterio, que finalmente fue resuelto en 1928 por los ahora clásicos trabajos de George Gamow, R. W. Gurney y E. U. Condon. Su contribución fue reconocer que el recientemente descubierto efecto túnel subyace en los dos aspectos más intrigantes del decaimiento α:

- Todas las partículas α emitidas desde cualquier fuente poseen casi la misma energía y, para todos los emisores conocidos, emergen con energías cinéticas en el mismo intervalo estrecho, aproximadamente desde 4 hasta 9 MeV.
- En contraste con la uniformidad de las energías, la vida media del emisor (el tiempo necesario para que decaiga la mitad de la sustancia emisora) varía sobre un intervalo enorme —¡más de 20 órdenes de magnitud!— depediendo del elemento emisor (tabla 7.1).

Por ejemplo, las partículas alfa emergen del torio con una energía cinética igual a 4.05 MeV, apenas inferior a la mitad de las partículas alfa emitidas por el polonio (8.95 MeV). Sin embargo, la vida media del torio es 1.4×10^{10} años, en comparación con sólo ¡3×10^{-7} *segundos* de la vida media del polonio!

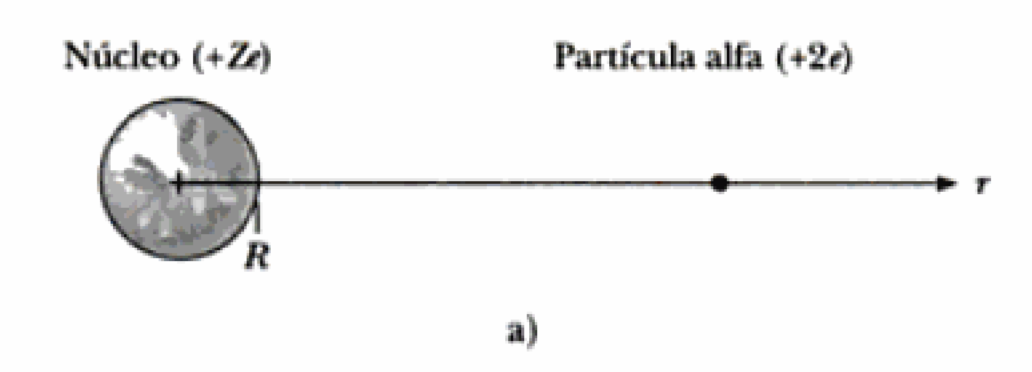
Gamow atribuyó este sorprendente comportamiento a una partícula α preformada que va de un lado a otro en el interior del núcleo del elemento radiactivo (padre) que termina por cruzar a través de la barrera de potencial para escapar como un producto del decaimiento detectable (figura 7.9a). Mientras se encuentra en el interior del núcleo padre, la partícula alfa es virtualmente libre, aunque está confinada al pozo de potencial nuclear debido a la fuerza nuclear. Una vez fuera del núcleo, la partícula alfa experimenta únicamente la repulsión de Coulomb del núcleo emisor (hijo). (La fuerza nuclear sobre la partícula alfa fuera del núcleo es insignificante debido a su alcance tan corto, $\approx 10^{-15}$ m.) En la figura 7.9b se muestra el diagrama de energía potencial para la partícula alfa como una función de la distancia r desde el núcleo emisor. El radio nuclear R mide aproximadamente 10^{-14} m, o bien, 10 fm [observe que 1 fm (fermi) = 10^{-15} m] para núcleos pesados;[2] más allá de esto sólo existe la energía de repulsión de Coulomb, $U(r) = kq_1q_2/r$, entre la partícula alfa doblemente cargada ($q_1 = +2e$) y un núcleo hijo con número

Tabla 7.1 Características de algunos emisores α comunes

Elemento	Energía α	Vida media*
$^{212}_{84}$Po	8.95 MeV	2.98×10^{-7} s
$^{240}_{96}$Cm	6.40 MeV	27 días
$^{226}_{88}$Ra	4.90 MeV	1.60×10^{3} años
$^{232}_{90}$Th	4.05 MeV	1.41×10^{10} años

*Observe que las vidas medias varían sobre 24 órdenes de magnitud cuando la energía α cambia por un factor de 2.

[2]El fermi (fm) es una unidad de distancia de uso común en física nuclear.



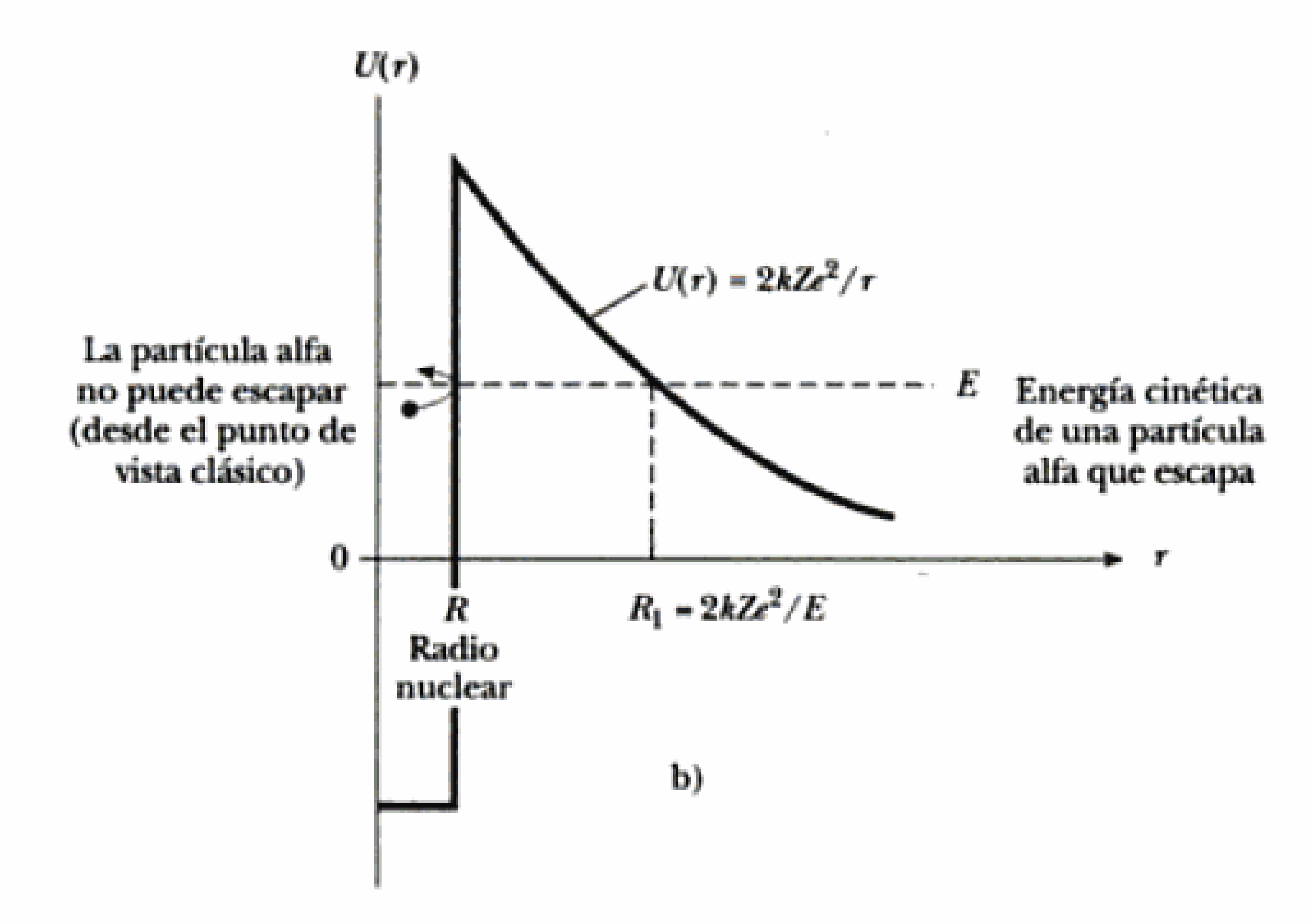


Figura 7.9 a) Decaimiento α de un núcleo radiactivo. b) Energía potencial vista por una partícula α emitida con una energía E. R es el radio nuclear, aproximadamente igual a 10^{-14} m, o 10 fm. Las partículas α a través de la barrera de potencial entre R y R_1 escapan del núcleo, por lo que no son detectadas como productos del decaimiento radiactivo.

atómico Z ($q_2 = +Ze$). Desde el punto de vista clásico, incluso una partícula alfa de 9 MeV atrapada inicialmente en el núcleo carecería de energía suficiente para superar la barrera de Coulomb ($\approx$ 30 MeV de alto) y escapar. Pero la partícula α, con sus atributos ondulatorios, puede cruzar *a través* de la barrera para salir por el otro lado. La energía total E de la partícula α en el interior del núcleo se transforma en la energía cinética observada de la partícula α emergente una vez que ha escapado. **Lo que explica el amplio intervalo de vidas medias observadas para los emisores de partículas α es la sensibilidad del ritmo de tunelaje a pequeños cambios en la energía de la partícula.**

Tunelaje a través de la barrera de Coulomb

La probabilidad de tunelaje y la tasa del decaimiento asociado se calculan de manera bastante semejante a como se hace para la emisión de campo, salvo que la forma de la barrera en este caso es coulombiana, más que triangular. Los detalles de este cálculo se proporcionan en el ejemplo 13.9 (capítulo 13), con el siguiente resultado

Coeficiente de transmisión para partículas α de un núcleo inestable

$$T(E) = \exp\left\{-4\pi Z\sqrt{\frac{E_0}{E}} + 8\sqrt{\frac{ZR}{r_0}}\right\} \tag{7.13}$$

En esta expresión, $r_0 = \hbar^2/m_\alpha ke^2$ es una especie de radio de "Bohr" para la partícula α, cuya masa es $m_\alpha = 7\,295\ m_e$, de modo que el valor de r_0 es $a_0/7$

295 = 7.25 × 10^{-5} Å, o bien, 7.25 fm. A su vez, la longitud r_0 define una unidad de energía conveniente E_0 análoga a la de Rydberg en la física atómica:

$$E_0 = \frac{ke^2}{2r_0} = \left(\frac{ke^2}{2a_0}\right)\left(\frac{a_0}{r_0}\right) = (13.6 \text{ eV})(7\,295) = 0.0993 \text{ MeV}$$

Para obtener tasas del decaimiento, $T(E)$ debe multiplicarse por el número de colisiones por segundo que una partícula α experimenta contra la barrera nuclear. Esta frecuencia de colisiones f es el recíproco del tiempo de tránsito de la partícula α que cruza el núcleo, o bien, $f = v/2R$, donde v es la velocidad de la partícula α en el interior del núcleo. En la mayor parte de los casos, f es aproximadamente igual a 10^{21} colisiones por segundo (vea el problema 17). Entonces, la tasa del decaimiento λ (la probabilidad de emisión de partículas α por unidad de tiempo) es

$$\lambda = fT(E) \approx 10^{21} \exp\{-4\pi Z\sqrt{E_0/E} + 8\sqrt{Z(R/r_0)}\}$$

El recíproco de λ tiene dimensiones de tiempo y está relacionada con la vida media del emisor $t_{1/2}$ como

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda} \tag{7.14}$$

EJEMPLO 7.6 Cálculo de las vidas medias del torio y del polonio

Utilice el modelo de tunelaje que acaba de presentarse para calcular la vida media para el decaimiento α de los elementos radiactivos torio y polonio. La energía de las partículas alfa expulsadas es 4.05 MeV y 8.95 MeV, respectivamente, y el tamaño nuclear es aproximadamente igual a 9 fm en ambos casos.

Solución Para el torio ($Z = 90$), el núcleo hijo posee un número atómico $Z = 88$, que corresponde al elemento radio. Al usar $E = 4.05$ MeV y $R = 9$ fm, para el factor de transmisión $T(E)$ de la ecuación 7.13, se encuentra

$$\exp\{-4\pi(88)\sqrt{(0.0993/4.05)} + 8\sqrt{88(9/7.25)}\} = \exp\{-89.542\} = 1.3 \times 10^{-39}$$

Al tomar $f = 10^{21}$ H, para la tasa del decaimiento α, se obtiene el valor $\lambda = 1.29 \times 10^{-18}$ partículas alfa por segundo. La vida media asociada es, según la ecuación 7.14,

$$t_{1/2} = \frac{0.693}{1.3 \times 10^{-18}} = 5.4 \times 10^{17} \text{ s} = 1.7 \times 10^{10} \text{ años}$$

lo cual se compara favorablemente con el valor real para el torio, 1.4 × 10^{10} años.

Si la especie radiactiva es polonio ($Z = 84$), el elemento hijo es plomo, con $Z = 82$. Al usar $E = 8.95$ MeV para la energía de desintegración, para el factor de transmisión se obtiene

$$\exp\{-4\pi(82)\sqrt{(0.0993/8.95)} + 8\sqrt{82(9/7.25)}\} = \exp\{-27.825\} = 8.2 \times 10^{-13}$$

Si se supone que f permanece sin cambio como 10^{21} colisiones por segundo, para este caso se obtiene $\lambda = 8.2 \times 10^{8}$ partículas alfa por segundo y una vida media

$$t_{1/2} = \frac{0.693}{8.2 \times 10^{8}} = 8.4 \times 10^{-10} \text{ s}$$

La vida media medida del polonio es 3 × 10^{-7} s.

En vista de lo tosco del método, ambas estimaciones deben considerarse satisfactorias. Además, los cálculos muestran de manera evidente cómo un factor de sólo 2 en la energía de desintegración conduce a vidas medias ¡que difieren por más de 26 órdenes de magnitud!

El proceso del decaimiento radiactivo también puede entenderse en términos de la evolución temporal de un estado no estacionario; en este caso, aquel que representa a la partícula α inicialmente confinada dentro del núcleo padre. En esta situación es complicado resolver la ecuación de Schrödinger para la función de onda dependiente del tiempo, por lo que lo mejor es realizar estudios numéricos. Quien tenga interés en este tema puede con-

sultar el sitio en la red http://info.brookscole.com/mp3e para más detalles al respecto y una simulación completamente mecánico-cuántica del decaimiento α de núcleo inestable. Seleccione QMTools Simulations → Leaky Wells (Tutorial) y siga las instrucciones que ahí se proporcionan.

Inversión de la molécula de amoniaco

La "inversión" de la molécula de amoniaco es otro ejemplo de tunelaje, en este caso para todo un átomo. La configuración de equilibrio de la molécula de amoniaco (NH_3) se muestra en la figura 7.10a: el átomo de nitrógeno está ubicado en el vértice de la pirámide, cuya base es el triángulo equilátero formado por los tres átomos de hidrógeno. Pero este equilibrio no es realmente estable; en efecto, hay una segunda posición de equilibrio para el átomo de hidrógeno en el lado opuesto del plano formado por los átomos de hidrógeno. Con sus dos posiciones de equilibrio, el átomo de nitrógeno de la molécula de amoniaco constituye un **oscilador doble,** que puede modelarse usando el potencial que se muestra en la figura 7.10b. Un átomo de nitrógeno inicialmente situado en un lado del plano de simetría no permanece ahí de manera indefinida, ya que existe la probabilidad de que pueda "perforar un túnel" a través de la barrera del oscilador para salir del otro lado. Cuando ocurre esto, la molécula se *invierte* (figura 7.10c). Pero el proceso no se detiene ahí: el átomo de nitrógeno, que ahora se encuentra en el lado opuesto del plano de simetría, ¡tiene la probabilidad de "cruzar" de regreso a través de la barrera para volver a su posición inicial! La molécula no sólo experimenta una inversión, sino que va de un lado a otro repetidamente, alternando así entre las dos configuraciones clásicas de equilibrio. La frecuencia de "oscilación" se fija por el ritmo de tunelaje, y resulta ser bastante elevada, del orden de 10^{10} Hz (¡el intervalo de microondas del espectro electromagnético!).

Representación de oscilador doble de la molécula de amoniaco

La probabilidad de tunelaje para inversión puede calcularse con la ecuación 7.10. El potencial del oscilador doble que se muestra en la figura 7.10b se describe mediante la función de energía potencial

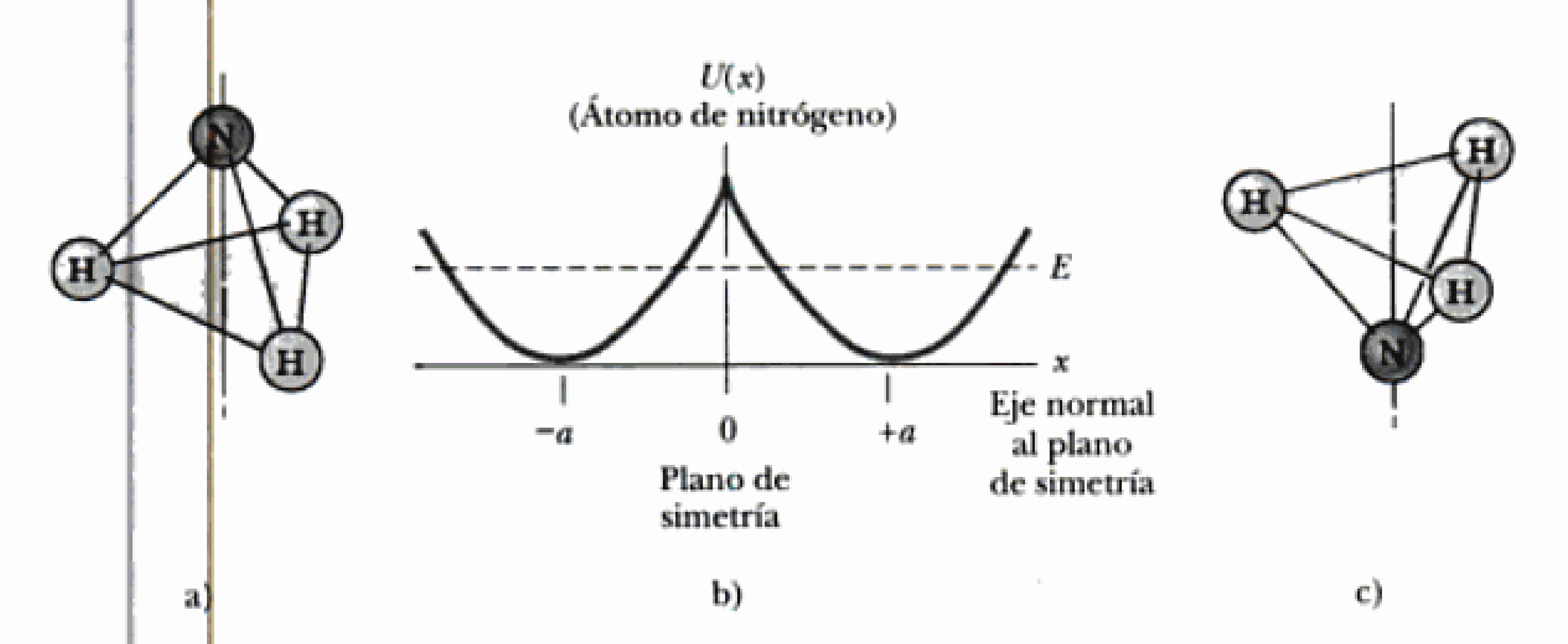


Figura 7.10 a) Molécula de amoniaco, NH_3. En equilibrio, el átomo de nitrógeno se sitúa en el vértice de una pirámide cuya base es el triángulo equilátero formado por los tres átomos de hidrógeno. Por simetría, para el átomo de nitrógeno existe una segunda posición de equilibrio en el lado opuesto al plano formado por los átomos de hidrógeno. b) Energía potencial vista por el átomo de nitrógeno a lo largo de una línea perpendicular al plano de simetría. Los dos puntos de equilibrio en $-a$ y $+a$ generan el potencial del oscilador doble mostrado. Un átomo de nitrógeno puede moverse de un lado a otro del túnel a través de la barrera, de un punto de equilibrio a otro, con el resultado de que la molécula alterna entre la configuración normal en el inciso a) y la configuración invertida que se muestra en el inciso c).

$$U(x) = \tfrac{1}{2}M\omega^2(|x| - a)^2 \tag{7.15}$$

donde ω es la frecuencia clásica de vibración para el átomo de nitrógeno alrededor de cualquiera de los puntos de equilibrio $x = \pm a$. Se supone que el átomo de nitrógeno posee la energía mínima de oscilación $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$. Desde el punto de vista clásico, hay cuatro puntos de retorno para los cuales $U(x) = E$ (vea la figura 7.10b): los límites de la integral de tunelaje son el par más próximo a $x = 0$, y están dados por $x = \pm(a - A)$, donde A es la amplitud de oscilación para el átomo de nitrógeno en un simple pozo de oscilador. La amplitud de oscilación A se encuentra a partir de la conservación de la energía al reconocer que ahí toda la energía está en forma potencial: $\frac{1}{2}\hbar\omega = \frac{1}{2}M\omega^2A^2$, o bien,

$$A = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega}} \tag{7.16}$$

Debido a que la integral de tunelaje es simétrica con respecto a $x = 0$, ésta puede escribirse como

$$\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m}\int_{-(a-A)}^{a-A}\sqrt{U(x) - E}\,dx = \frac{4}{A^2}\int_0^{a-A}\sqrt{(x-a)^2 - A^2}\,dx$$

donde $U(x)$ y E se han expresado en términos de A, por medio de la ecuación 7.16. La integral a la derecha puede evaluarse en términos de funciones hiperbólicas,[3] con el resultado

$$\frac{4}{A^2}\int_0^{a-A}\sqrt{(x-a)^2 - A^2}\,dx = \operatorname{senh}(2y_0) - 2y_0$$

donde y_0 se define por la relación $\cosh(y_0) = a/A$. Así, el coeficiente de transmisión es

$$T = e^{-[\operatorname{senh}(2y_0) - 2y_0]} \tag{7.17}$$

Para obtener el ritmo de tunelaje λ (y su recíproco, el tiempo de tunelaje) es necesario multiplicar T por la frecuencia con la que el átomo de nitrógeno choca contra la barrera de potencial. Para un átomo que oscila alrededor de su posición de equilibrio, ésta es la frecuencia de oscilación $f = \omega/2\pi$. A partir de la ecuación 7.16, se observa que f está relacionada con la amplitud de oscilación como $f = \hbar/2\pi MA^2$.

El ritmo de tunelaje depende en gran medida de los valores elegidos para a y A. Para la distancia de equilibrio desde el plano de simetría, se toma $a = 0.38$ Å, un valor experimental obtenido a partir de mediciones de la difracción de rayos X.[4] La amplitud de oscilación no es observable en forma directa, aunque su valor puede calcularse a partir de $U(0)$, la altura de la barrera de potencial en $x = 0$, la cual se sabe es igual a 0.25690 eV. Al usar las ecuaciones 7.15 y 7.16, y tomar $M = 14$ u para la masa del átomo de

$$A = \left(\frac{\hbar^2a^2}{2MU(0)}\right)^{1/4} = \left(\frac{(1.973\ \text{keV}\cdot\text{Å}/c)^2(0.38\,\text{Å})^2}{2(14)(931.50\times 10^3\ \text{keV}/c^2)(0.2569\times 10^{-3}\ \text{keV})}\right)^{1/4}$$

$$= 0.096\,\text{Å}$$

[3]Introduzca una nueva variable de integración con la sustitución $x - a = -A\cosh(y)$, y aplique las propiedades de las funciones coseno y seno hiperbólicos, $\cosh(y) = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$, $\operatorname{senh}(y) = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y})$, para obtener la forma final.

[4]B. H. Brandsen y C. J. Joachain, *Physics of Atoms and Molecules*, Nueva York, John Wiley and Sons, Inc., 1983, p. 456.

Esto subestima al verdadero valor de A porque M se ha identificado (incorrectamente) como la masa del átomo de nitrógeno. De hecho, M debe de ser la *masa reducida* del grupo nitrógeno-hidrógeno, alrededor de 2.47 u.[5] Con esta corrección, se encuentra $A = 0.148$ Å y un ritmo de tunelaje $\lambda = fT \approx 2.4 \times 10^{12}$ Hz. El ritmo de tunelaje observado, 2.4×10^{12} Hz, sugiere un valor algo menor para A. Al tanteo se encuentra que el ritmo de tunelaje verdadero se reproduce con $A = 0.125$Å, todavía una cifra razonable para la amplitud de oscilación del átomo de nitrógeno en la molécula de amoniaco.

Observe que, debido al tunelaje, el átomo de nitrógeno a uno u otro lado del plano de simetría *no constituye* un estado estacionario de la molécula de amoniaco, ya que la probabilidad de encontrarlo ahí varía con el tiempo. De hecho, el comportamiento oscilatorio surge debido a una simple combinación de dos estados estacionarios de energía casi igual para el átomo de nitrógeno en este entorno. Esta superposición de estados estacionarios tan próximos entre sí (en energía) tiene aplicaciones que van más allá de este ejemplo. Para más información, consulte http://info.brookscole.com/mp3e, seleccione QMTools Simulations → Two-Center Potentials (Tutorial), y siga las instrucciones que ahí se proporcionan.

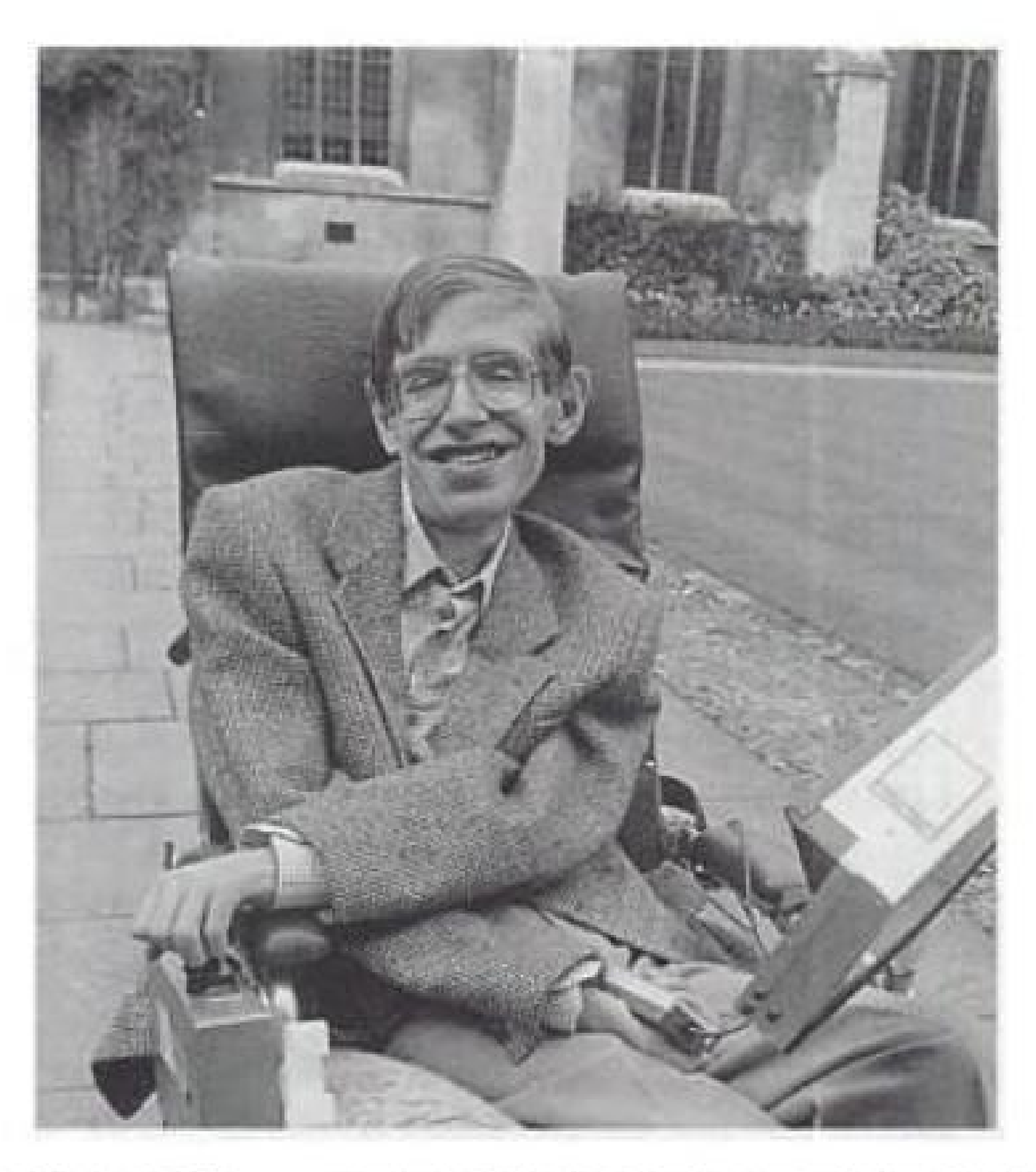
Debido a que la frecuencia de oscilación se encuentra en el intervalo de las microondas, la molécula de amoniaco puede funcionar como un amplificador de este tipo de radiación. El **máser** (amplificador paramagnético) **de amoniaco** opera según este principio. Debido a la pequeña diferencia de energía entre el primer estado excitado y el estado base de la molécula de amoniaco, el vapor de este elemento a temperatura ambiente posee aproximadamente el mismo número de moléculas en ambos estados. Ya que los dos estados tienen momentos dipolares eléctricos opuestos, se separan con fácilidad al hacerlo pasar a través de un campo eléctrico no uniforme. De esta manera, es posible producir vapor de amoniaco con las grandes concentraciones, poco frecuentes, de moléculas excitadas necesarias para crear la inversión de población necesaria para la operación del máser. La desexcitación espontánea al estado base de una molécula libera un fotón (en la región de las microondas) que, a su vez, induce la desexcitación de otras moléculas. El resultado —bastante semejante a una reacción en cadena— produce una cascada de fotones: un estallido intenso de radiación coherente de microondas. La operación de máseres y rayos láser se analiza con más detalle en el capítulo 12 y en nuestro sitio en la red en http://info.brookscole.com/mp3e.

Decaimiento de agujeros negros

Una vez dentro del horizonte del evento, nada —incluso la luz— puede escapar a la fuerza de atracción gravitacional de un agujero negro.[6] Ésta era la opinión aceptada hasta 1974, cuando el brillante astrofísico británico Stephen Hawking propuso que los agujeros negros son, en efecto, objetos radiantes, que emiten una variedad de partículas a través de un mecanismo que implica el tunelaje de la barrera de potencial (gravitacional) que rodea al agujero negro. El grosor de esta barrera es proporcional al tamaño del agujero negro, de modo que la probabilidad de que ocurra un evento de tunelaje de inicio puede ser extremadamente pequeña. No obstante, a medida que el agujero negro

[5]En este modo de oscilación, los tres átomos de hidrógeno se mueven al unísono como si fuesen un sólo objeto de masa igual a 3 u. La masa reducida se refiere al par que consiste de esta masa total y la masa del átomo de nitrógeno (14 u).

[6]En el ensayo de Clifford Will, "The Renaissance of General Relativity", en nuestro sitio en la red, hay una breve introducción a los agujeros negros.



Stephen W. Hawking (1942–), astrofísico británico que ha realizado aportaciones fundamentales a problemas de cosmología, incluyendo la teoría de los agujeros negros. (*MMP/Manni Mason's Pictures.*)

emite partículas, su masa y tamaño disminuyen de manera continua, facilitando que más partículas "perforen un túnel" de salida. De esta forma, la emisión continúa a un ritmo creciente, hasta que, por último, el agujero negro ¡se emita a sí mismo hasta desaparecer en un clímax explosivo! Así, el escenario de Hawking lleva inexorablemente al decaimiento y desaparición final de cualquier agujero negro.

Los cálculos indican que un agujero negro con la masa del Sol sobrevivirá al decaimiento por tunelaje alrededor de 10^{66} años. Por otra parte, un agujero negro con la masa de sólo mil millones de toneladas y aproximadamente del tamaño de un protón (se cree que tales miniagujeros negros se formaron justo después de la gran explosión que originó el universo) debieron evaporarse casi por completo en los 10 mil millones de años que transcurrieron desde el origen del universo, y agujeros negros un poco más pesados deberían seguir evaporándose fuertemente. Una gran parte de la energía emitida por tales agujeros sería en forma de rayos gamma. En efecto, se han observado rayos gamma provenientes del espacio interestelar, aunque en cantidades y con propiedades que pueden explicarse fácilmente de otra forma. En la actualidad, no se ha podido observar ninguna evidencia convincente de que existan agujeros negros evaporándose en el universo.

RESUMEN

Para potenciales que representan barreras, los estados estacionarios no están localizados, sino extendidos por todo el espacio de forma que describen dispersión de partículas. Cuando una onda de materia encuentra una barrera de potencial, parte de ella es reflejada por la barrera y parte es transmitida a través de ésta. En términos de partículas, un objeto que choca contra la barrera

no rebota o penetra de manera predecible, sino que sólo es posible asignar probabilidades para la reflexión y la transmisión. Estas probabilidades están dadas por el **coeficiente de reflexión *R*** y el **coeficiente de transmisión *T*,** respectivamente. Para cualquier valor de la energía de la partícula *E*, estos dos coeficientes de dispersión deben satisfacer la **regla de la adición:**

$$R(E) + T(E) = 1 \tag{7.5}$$

que implica el hecho de que la partícula es reflejada o transmitida. Debido a su naturaleza ondulatoria, una partícula tiene una probabilidad diferente de cero de penetrar la barrera, incluso si no posee energía suficiente para hacerlo desde el punto de vista clásico. Este proceso, denominado **tunelaje,** es el mecanismo básico que subyace en los fenómenos de **emisión de campo, decaimiento** α de núcleos radiactivos, **inversión de la molécula de amoniaco, radiación de Hawking** de agujeros negros, y muchos más. La probabilidad de que una partícula con masa *m* y energía *E* "perfore un túnel" a través de una barrera de forma arbitraria $U(x)$ está dada aproximadamente por

$$T(E) \approx \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m}\int\sqrt{U(x) - E}\,dx\right) \tag{7.10}$$

La integral en la ecuación 7.10 se toma sobre el intervalo de *x*, donde $U(x) > E$, denominado la **región clásicamente prohibida** porque en este intervalo el valor de la energía cinética de una partícula clásica debe ser negativo (¡algo imposible!).

BIBLIOGRAFÍA ADICIONAL SUGERIDA

1. Muchos de los temas presentados en este capítulo también son tratados casi al mismo nivel en el libro de A. P. French y E. F. Taylor: *An Introduction to Quantum Physics*, Nueva York, W. W. Norton and Company, Inc., 1978.
2. Aspectos experimentales de microscopía de emisión de campo y técnicas analíticas superficiales relacionadas son abordados por P. F. Kane en el capítulo 6 del libro *Characterization of Solid Surfaces*, Nueva York, Plenum Press, 1974, pp. 13-146.
3. Para explicaciones amenas sobre tunelaje de agujeros negros, consulte el artículo de S. W. Hawking, "The Quantum Mechanics of Black Holes", *Sci. Am.*, enero de 1977, pp. 34-40; y el de J. D. Beckenstein, "Black-hole Thermodynamics", *Phys. Today*, enero de 1980, pp. 24-31. Para conocer una fascinante perspectiva histórica de estos descubrimientos desde su interior, escrita por uno de los participantes, consulte la obra de K. Thorne, *Black Holes and Time Warps*, Nueva York, W. W. Norton & Company, Inc., 1994.

PREGUNTAS

1. Considere una partícula con energía *E* que incide sobre una barrera de potencial de altura $U > E$. ¿Cómo varía la amplitud de la onda reflejada a medida que se reduce la altura de la barrera? ¿Cómo cambia la amplitud de la onda incidente?
2. Un electrón y un protón con el mismo valor de energía encuentran la misma barrera de potencial. ¿Para cuál de ellos es mayor la probabilidad de transmisión? ¿Por qué?
3. En física clásica, sólo las *diferencias* en energía tienen importancia física. Analice cómo se aplica esta afirmación a la dispersión cuántica de partículas al estudiar cómo el hecho de agregar un potencial constante U_0 en todas partes afecta a los coeficientes de reflexión y transmisión de la barrera.
4. Suponga que una partícula con energía *E* se encuentra en el interior de una barrera cuya altura *U* es mayor que *E*. ¿La partícula tiene una energía cinética negativa? Explique su respuesta.
5. Explique cómo una barrera cuyo ancho es *L* podría considerarse ancha para penetración de protones, aunque al mismo tiempo se considere estrecha para penetración de electrones.
6. Analice la conveniencia de representar a las funciones de onda y a las barreras de potencial en la misma gráfica, como en la figura 7.2a. ¿Puede una onda cuya cresta cae por abajo de la parte superior de una barrera cuadrada penetrarla alguna vez? Explique su respuesta.

PROBLEMAS

7.1 Barrera cuadrada

1. Una partícula que incide sobre el escalón de potencial del ejemplo 7.4 con cierta energía $E < U$ se describe por la función de onda

$$\psi(x) = \tfrac{1}{2}[(1 + i)e^{ikx} + (1-i)e^{-ikx}] \qquad \text{para } x \leq 0$$

$$\psi(x) = e^{-kx} \qquad \text{para } x \geq 0$$

a) Compruebe por cálculo directo que en este caso el coeficiente de reflexión es igual a la unidad. b) ¿Cómo debe relacionarse k con E para que $\psi(x)$ sea solución de la ecuación de Schrödinger en la región a la izquierda del escalón de potencial ($x \leq 0$)? ¿A la derecha del escalón ($x > 0$)? ¿Qué indica esto sobre la razón E/U? c) Evalúe la profundidad de penetración $\delta = 1/k$ para protones de 10 MeV que inciden en este escalón.

2. Considere el escalón de potencial del ejemplo 7.4 en el caso en que $E > U$. a) Analice la ecuación de Schrödinger a la izquierda del escalón para encontrar la forma de la solución en el intervalo $x < 0$. Haga lo mismo a la derecha del escalón para obtener la forma de la solución para $x > 0$. Complete la solución aplicando cualesquiera condiciones de frontera y de correspondencia que puedan ser necesarias. b) Obtenga una expresión para el coeficiente de reflexión R en este caso, y demuestre que puede escribirse en la forma

$$R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}$$

donde k_1 y k_2 son los números de onda para las ondas incidente y transmitida, respectivamente. También escriba una expresión para el coeficiente de transmisión T usando la regla de la adición que cumplen estos coeficientes. c) Evalúe R y T en los casos límite de $E \to U$ y $E \to \infty$. Los resultados, ¿son sensibles? Explique su respuesta. (Esta situación es semejante a la reflexión y transmisión parcial de la luz que choca contra una interfase, separando dos medios distintos.)

3. Use los resultados del problema anterior para calcular la cantidad de protones de 25 MeV que se reflejan y la de los que se transmiten por un escalón de potencial de 20 MeV. ¿Cómo cambian sus respuestas si los protones se sustituyen por electrones?

4. Un haz de electrones de 0.100 mA con energía cinética de 54 eV penetra en una región bien definida de *menor* potencial, donde la energía cinética de los electrones aumenta por 10 eV. ¿Qué corriente es reflejada en la frontera? (Esto simula dispersión de electrones a incidencia normal desde una superficie metálica, como en el experimento de Davisson-Germer.)

5. a) El tunelaje de partículas a través de barreras que son altas o anchas (o ambas cosas) es muy poco probable. Demuestre que para una barrera cuadrada con

$$\frac{2mUL^2}{\hbar^2} >> 1$$

y energías de las partículas bastante inferiores a la altura de la barrera ($E \ll U$) la probabilidad de transmisión, es aproximadamente

$$P \approx 16\,\frac{E}{U}\,e^{-2[\sqrt{2m(U-E)}/\hbar]L}$$

(Algunas veces, la combinación UL^2 se denomina *intensidad* de la barrera.) b) Estime numéricamente el factor exponencial en P para cada uno de los siguientes casos: 1) un electrón con $U - E = 0.01$ eV y $L = 0.1$ nm; 2) un electrón con $U - E = 1$ eV y $L = 0.1$ nm; 3) una partícula α ($m = 6.7 \times 10^{-27}$ kg) con $U - E = 10^6$ eV y $L = 10^{-15}$ m; y 4) una bola de boliche ($m = 8$ kg) con $U - E = 1$ J y $L = 2$ cm (esto corresponde a la bola que pasa por una barrera de 2 cm de ancho y demasiado alta para que pueda deslizarse).

6. Un haz de electrones incide sobre una barrera de 5 eV de alto y 1 nm de ancho. Escriba un programa de computadora sencillo para encontrar qué energía deben tener los electrones si 0.1% de ellos cruzan la barrera.

7. Empezando con las condiciones de continuidad, ecuaciones 7.8, obtenga el resultado para el coeficiente de transmisión de una barrera cuadrada dado en la ecuación 7.9 (válido cuando la partícula carece de energía suficiente para penetrar la barrera desde el punto de vista clásico: $E < U$).

8. Use el applet Java disponible en nuestro sitio en la red (http://info.brookscole.com/mp3e), y seleccione QMTools Simulations → Problem 7.8) para investigar la dispersión de electrones por una barrera cuadrada de 1 Å de ancho y 10 eV de alto, en el caso en que la energía del electrón sea igual a la altura de la barrera, $E = U$. ¿Cuál es la forma de la función de onda en la región de la barrera? Determine el coeficiente de transmisión a esta energía, y compare su resultado con el que predice la ecuación 7.9. ¿Qué predice la física clásica para la probabilidad de transmisión en este caso?

9. Use el applet Java mencionado en el problema anterior para obtener los coeficientes de transmisión y reflexión para un electrón de 5 eV que incide sobre una barrera cuadrada de 1 Å de grosor y 10 eV de alto. Compruebe la regla de la adición, ecuación 7.5, y compare su resultado para $T(E)$ con el predicho por la ecuación 7.9. ¿Cuál debe ser el ancho de la barrera para transmitir *protones* de 5 eV con la misma probabilidad?

10. *Resonancias de dispersión.* Use el applet Java disponible en nuestro sitio en la red (http://info.brookscole.com/mp3e), seleccione QMTools Simulations → Problem 7.10) para encontrar las dos energías mínimas E para las que se tiene una transmisión perfecta para dispersión de electrones por una barrera cuadrada de 1 Å de ancho y 10 eV de alto (busque reflexiones de amplitud cero mientras hace variar E). Para cada energía utilice la característica "Trace" a fin de estimar la longitud de onda λ del electrón en la barrera. (*Sugerencia:* Utilice el Zoom para tener una vis-

ta más cercana de la función de onda en la barrera, así como mayor precisión.) Compare λ con el ancho L de la barrera y analice sus descubrimientos en términos de la interferencia de ondas reflejadas desde los bordes de entrada y salida de la barrera (vea el ejemplo 7.3).

11. *El efecto Ramsauer-Townsend.* Considere la dispersión de partículas desde el pozo de potencial que se muestra en la figura P7.11. a) Explique por qué las ondas reflejadas desde los bordes del pozo $x = 0$ y $x = L$ se cancelan por completo si $2L = \lambda_2$, donde λ_2 es la longitud de onda de De Broglie de la partícula en la región 2. b) Escriba expresiones para las funciones de onda en las regiones 1, 2 y 3. Establezca las condiciones de continuidad necesarias sobre Ψ y $\partial\Psi/\partial x$ para demostrar explícitamente que $2L = \lambda_2$ no conduce a ninguna onda reflejada en la región 1. [Éste es un modelo rudimentario del efecto de Ramsauer-Townsend que se observa en las colisiones de electrones lentos con átomos de gases nobles como argón, kriptón y xenón.

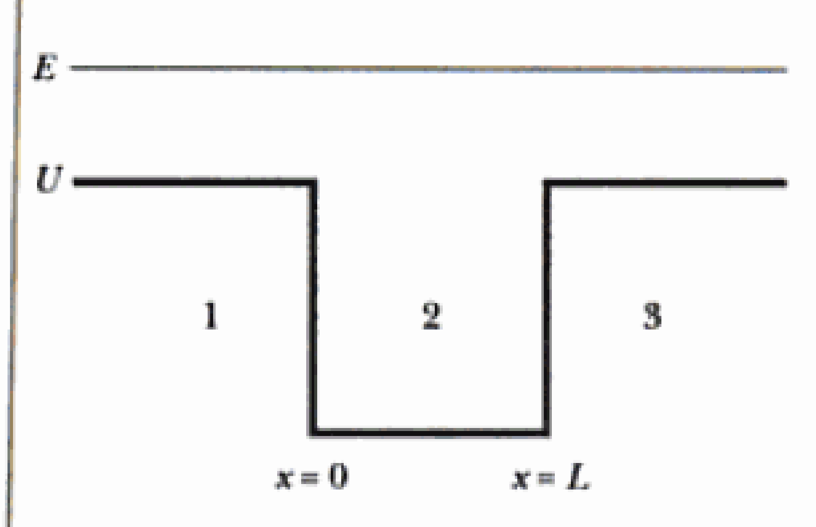


Figura P7.11

Los electrones que apenas poseen la energía necesaria se difractan alrededor de estos átomos como si en su trayectoria no hubiese ningún obstáculo (transmisión perfecta). El efecto es particular de los gases nobles debido a que sus configuraciones de capas cerradas producen átomos con fronteras externas abruptas.]

12. Un potencial interesante por su sencillez es el *pozo delta*, que puede entenderse como un pozo cuadrado de ancho L y profundidad S/L en el límite $L \to 0$ (figura P7.12). El límite es tal que S, el producto de la profundidad del pozo con su ancho, permanece fijo a un valor finito conocido como intensidad del pozo. El efecto de un pozo delta es introducir una discontinuidad en la pendiente de la función de onda en el punto en que se localiza el pozo, aunque la onda en sí sigue siendo continua ahí. En particular, puede demostrarse que

$$\left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{0+} - \left.\frac{d\psi}{dx}\right|_{0-} = -\frac{2mS}{\hbar^2}\psi(0)$$

para un pozo delta, de intensidad S, situado en $x = 0$. a) Resuelva la ecuación de Schrödinger a ambos lados del pozo ($x < 0$ y $x > 0$) para el caso de partículas que inciden por la izquierda con energía $E > 0$. Observe que a estas regiones las partículas son libres, de modo que $U(x) = 0$. b) Aplique la condición de continuidad de ψ y la condición en la pendiente en $x = 0$. Resuelva las ecuaciones resultantes para obtener el coeficiente de transmisión T como una función de la energía E de la partícula. Bosqueje $T(E)$ para $E \geq 0$. c) Si se considera que E es negativa, se encuentra que $T(E)$ diverge para cierta energía particular E_0. Encuentre este valor E_0. (Como es el caso, E_0 es la energía de un *estado ligado* en el pozo delta. El cálculo ilustra una técnica general,

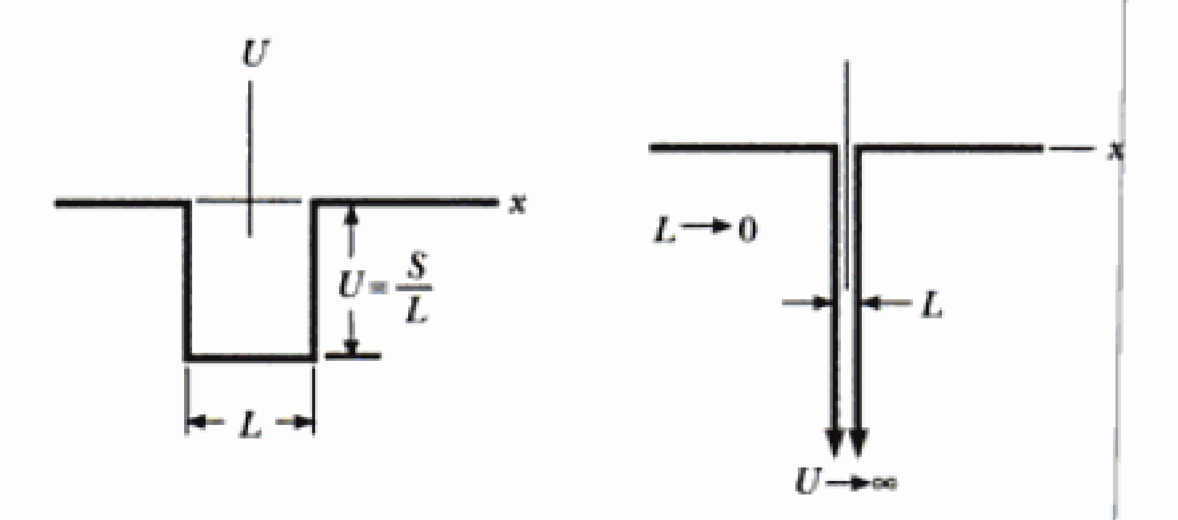


Figura P7.12

donde se buscan los estados ligados entre las singularidades de los coeficientes de dispersión para un pozo de potencial de forma arbitraria.) d) ¿Qué fracción de las partículas incidentes sobre el pozo con energía $E = |E_0|$ son transmitidas y qué fracción reflejadas?

13. Obtenga directamente una expresión para el coeficiente de reflexión $R(E)$ para el pozo delta del problema 12 y compruebe la regla de la adición

$$R(E) + T(E) = 1$$

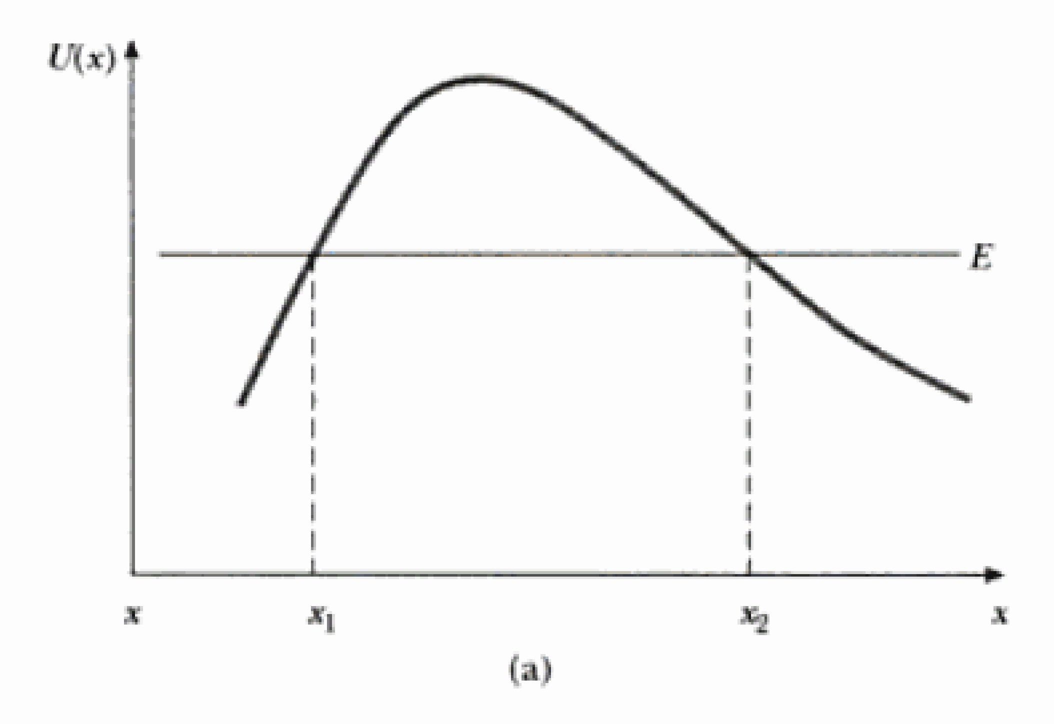
para todas las energías de la partícula $E > 0$.

14. Manteniendo una velocidad constante de 0.8 m/s, una canica rueda de un lado a otro en el interior de una caja de zapatos. Haga una estimación del orden de magnitud de la probabilidad de que la canica escape a través de la pared de la caja por tunelaje cuántico. Escriba las cantidades que considere como datos y los valores que mida o estime para éstos.

7.2 Penetración de barrera

15. Una barrera de forma arbitraria puede aproximarse como una sucesión de barreras cuadradas, como se muestra en la figura P7.15. Escriba el coeficiente de transmisión para esta barrera usando el resultado de la ecuación 7.9 para cada una de las barreras individuales, suponiendo que la intensidad de la onda transmitida para una barrera se convierte en la intensidad de la onda incidente para la barrera inmediatamente después en la sucesión. Demuestre que la forma de la ecuación 7.10 se recupera en el caso en que $E < U$ y $\alpha L \gg 1$.

16. Considere una partícula α confinada en un núcleo de torio. Modele el potencial nuclear como un pozo cuadrado seminfinito con una pared infinitamente alta en $r = 0$ y una pared de 30 MeV de altura en el radio nuclear $R = 9$ fm. Utilice el método iterativo descrito en el ejemplo 6.8 para estimar los valores mínimos de ener-



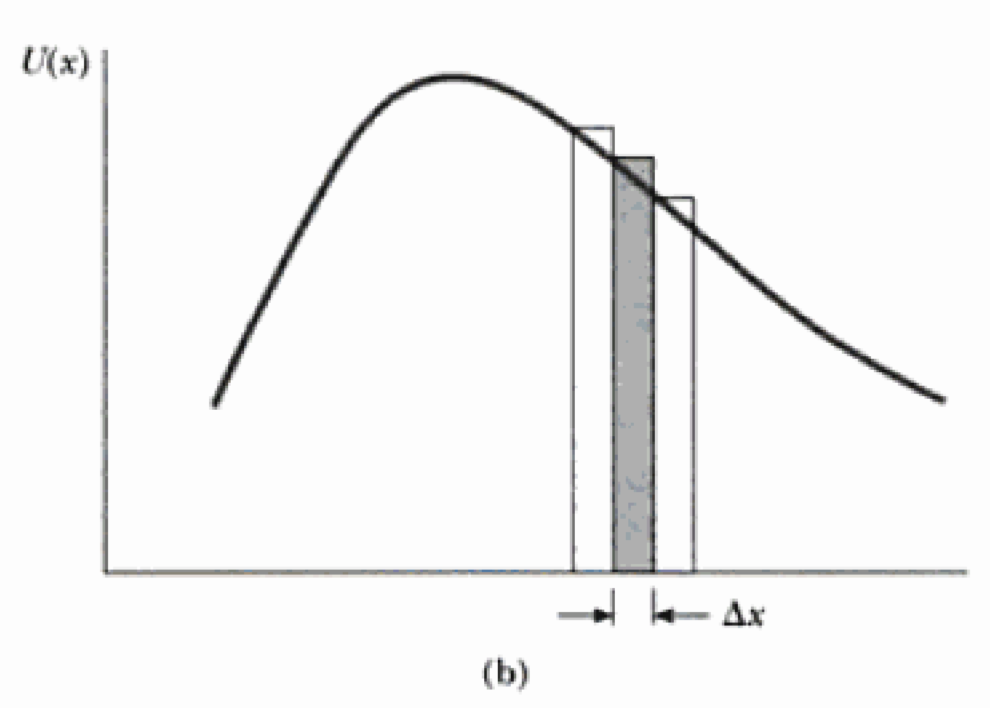


Figura P7.15

gía y velocidad permitidos para la partícula α. ¿Qué conclusión puede obtener si se observa que la partícula α *expulsada* posee una energía cinética de 4.05 MeV?

17. La frecuencia de intentos de una partícula α por escapar del núcleo es el número de veces por segundo que la partícula choca contra la barrera nuclear. Calcule esta frecuencia de colisión en el modelo de tunelaje para el decaimiento α del torio, suponiendo que la partícula α se comporta como una verdadera partícula dentro del núcleo con una energía *total* igual a la energía cinética observada del decaimiento. Para este caso, el núcleo hijo (radio), tiene $Z = 88$ y un radio de 9 fm. Considere para la barrera nuclear global 30 MeV, medidos desde la parte inferior del pozo nuclear hasta la parte superior de la barrera de Coulomb (vea la figura 7.8).

18. Compruebe la afirmación que se hizo en la sección 7.2 en el sentido de que los electrones de un metal chocan contra la superficie a un ritmo aproximado de 10^{30} por segundo por centímetro cuadrado. Haga lo anterior calculando la frecuencia de colisión de los electrones en un cubo de cobre metálico con una arista de 1 cm y con una cara de la superficie del cubo. Suponga que cada átomo de cobre contribuye con un electrón de conducción al metal (la valencia química del cobre es +1) y que estos electrones de conducción se mueven libremente con una energía cinética igual a 7 eV. De hecho, no todos los electrones tienen esta energía; consulte el capítulo 10.

19. *Tunelaje resonante.* Las heteroestructuras formadas a partir de semiconductores integrados por capas poseen características importantes para muchos dispositivos electrónicos modernos. Aquí se utiliza la simulación por computadora para estudiar el tunelaje en un "emparedado" de tres capas de arseniuro de galio/arseniuro de galio aluminio ($GaAs-Ga_{1-x}Al_xAs$). La capa GaAs constituye un pozo de potencial entre dos barreras de confinamiento formadas por las capas $Ga_{1-x}Al_xAs$. Cuando la energía del electrón incidente coincide con la de un estado ligado en el pozo central, ocurre una transmisión extraordinariamente grande (tunelaje resonante) a través del dispositivo. El applet Java que simula este dispositivo puede encontrarse en (http://info.brookscole.com/mp3e) QMTools Simulations → Problem 7.19. Las barreras miden 0.25 eV de alto y 5 nm de ancho, y la separación entre ellas es un hueco del mismo ancho. Observe que los electrones en estos materiales se comportan como electrones libres con una masa efectiva $m^* = 0.067m_e$, sólo una fracción del valor del electrón libre. Empezando con $E = 0$, aumente en forma gradual la energía del electrón a fin de encontrar el valor mínimo para transmisión pico. Investigue el ancho de la resonancia haciendo variar aún más la energía del electrón hasta que $T(E)$ descienda a la mitad de su valor pico. (En la práctica, la energía del electrón incidente se fija y el dispositivo se "sintoniza" hasta obtener resonancia mediante la aplicación de un voltaje de polarización idóneo que modifica las energías de estados ligados del pozo central.)

20. *Inversión de la molécula de amoniaco.* La inversión de la molécula de amoniaco puede simularse utilizando el applet Java disponible en nuestro sitio en la red (http://info.brookscole.com/mp3e QMTools Simulations → Problem 7.20). La energía potencial es el oscilador doble de la ecuación 7.15 con valores paramétricos elegidos para modelar el átomo de nitrógeno en NH_3 (como se analizó en el texto) y una masa reducida de 2.47 u para el átomo en este entorno. a) Encuentre y muestre los dos estados estacionarios inferiores del átomo de nitrógeno en la molécula de amoniaco. Describa el aspecto de estas funciones de onda (simetría, número de nodos, etc.). b) Construya un estado inicial (no estacionario) para el átomo al mezclar las dos ondas estacionarias de la misma amplitud. Describa este estado. ¿Qué implica para la ubicación inicial del átomo? c) Analice la evolución temporal del estado construido en el inciso b). Compruebe que el átomo oscila entre las dos posiciones en equilibrio y determine la frecuencia "de oscilación". Al multiplicar esta frecuencia por la constante de Planck se obtiene una energía característica para este proceso. ¿Cómo se compara esta energía característica con la separación energética de los estados estacionarios? Explique su respuesta (vea el problema 6.38).

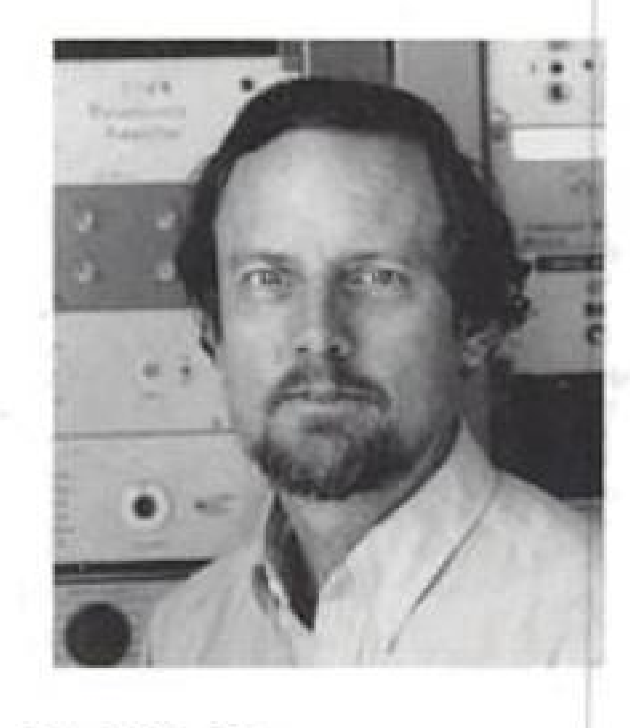
MICROSCOPIO DE TUNELAJE POR BARRIDO



Roger A. Freedman

La idea fundamental de la física cuántica, que las partículas poseen propiedades ondulatorias y viceversa, es de los más raros descubrimientos que se han realizado en la ciencia. Debido a este hecho, y a que la mecánica cuántica analiza principalmente entes muy pequeños, podría parecer que tal idea tiene poca aplicación práctica. Como se mostrará en este ensayo, no obstante, uno de los fenómenos básicos de la física cuántica (el tunelaje de partículas) constituye el aspecto central de un aparato bastante práctico que es uno de los microscopios más poderosos que se hayan construido alguna vez. Este aparato, el microscopio de tunelaje por barrido, o STM (Scanning Tunneling Microscope), permite a los físicos obtener imágenes altamente detalladas de superficies, con una resolución comparable al tamaño de un simple átomo. Tales imágenes prometen revolucionar el conocimiento que se tiene sobre estructuras y procesos a escala atómica.

Antes de analizar cómo funciona el STM, primero presentamos una muestra de lo que es capaz de hacer. En la figura 1 se observa una imagen, obtenida con este microscopio, de la superficie de una pieza de oro. Es fácil ver que la superficie no es uniformemente plana, sino que es una serie de terrazas separadas por pasos que miden un átomo de altura. En las terrazas se aprecian corrugaciones suaves, provocadas por reordenamientos sutiles de los átomos de oro.



Paul K. Hansma

Departmento de Física,
Universidad de California,
Santa Barbara

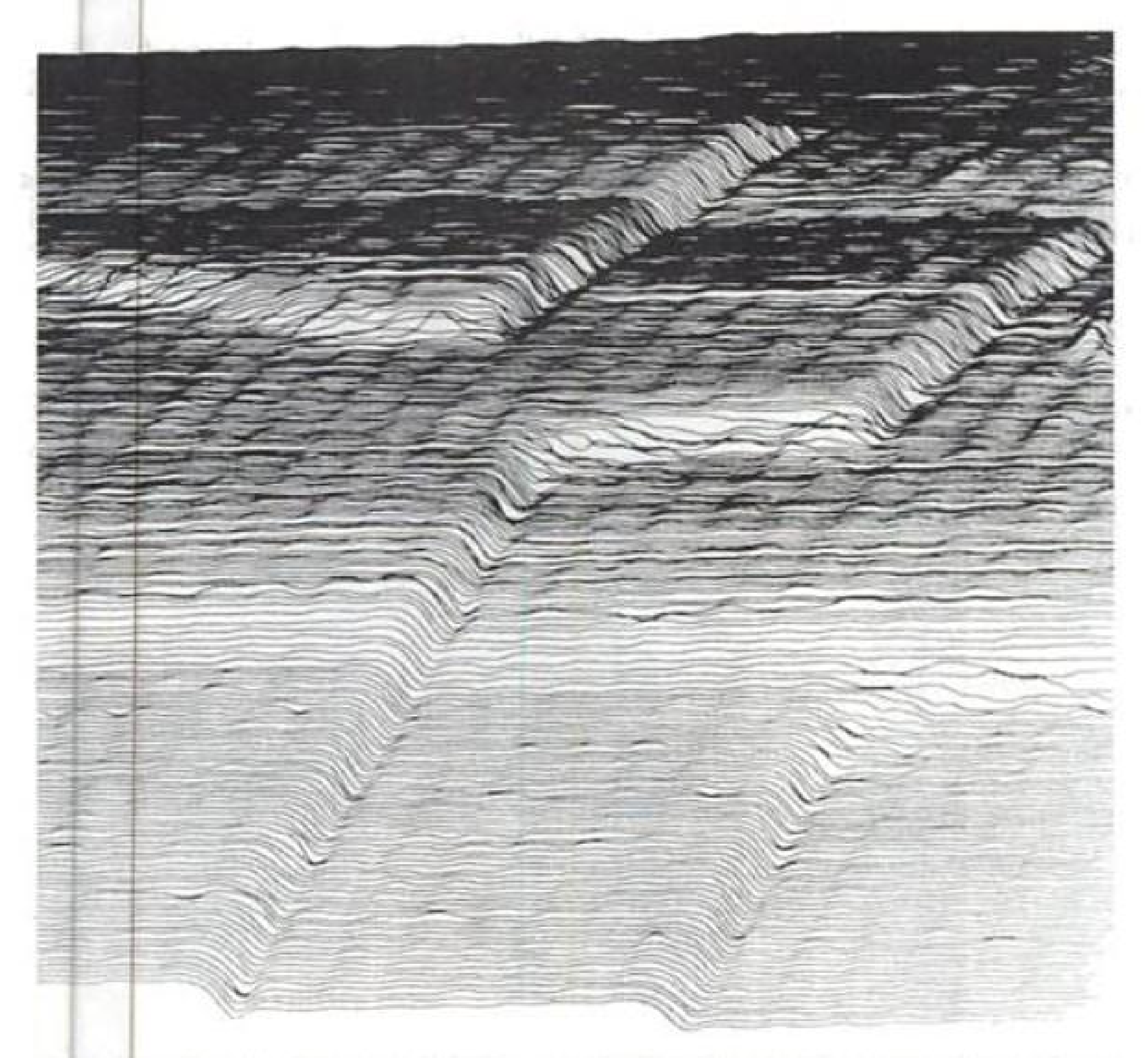


Figura 1 Imagen de la superficie de oro cristalino obtenida con el uso de un microscopio de tunelaje por barrido. La distancia entre barridos consecutivos es aproximadamente igual a 1.5 Å. La figura es del artículo de G. Binning, H. Rohrer, Ch. Gerber y E. Stoll, *Surface Sci.* 144:321, 1984.

Lo que hace que el STM sea tan extraordinario es lo fino de los detalles que pueden verse en imágenes como la figura 1. La *resolución* en esta imagen (es decir, el tamaño del detalle más pequeño que puede discernirse), mide aproximadamente 2 Å (2×10^{-10} m). En un microscopio común, la resolución está limitada por la longitud de onda de las ondas utilizadas para formar la imagen. Así, un microscopio óptico tiene una resolución no mejor que 2000 Å, aproximadamente la mitad de la longitud de onda de la luz visible, por lo que jamás puede mostrar los detalles que se muestran en la figura 1. Los microscopios electrónicos pueden tener una resolución de 2 Å al utilizar ondas electrónicas de longitud de onda igual a 4 Å o más cortas. A partir de la fórmula de De Broglie, $\lambda = h/p$, la cantidad de movimiento p del electrón necesaria para obtener esta longitud de onda es igual a 3 100 eV/c, lo que corresponde a una velocidad del electrón $v = p/m_e = 1.8 \times 10^6$ m/s. Electrones desplazándose a esta velocidad tan alta penetrarían en el interior de la pieza de oro de la figura 1, con lo cual sería imposible obtener información acerca de cada átomo en la superficie.

La imagen de la figura 1 fue lograda por Gerd Binning, Heinrich Rohrer y sus colaboradores en el IBM Research Laboratory de Zurich, Suiza. Binning y Rohrer inventaron el STM y compartieron el premio Nobel de Física de 1986 por su trabajo. La importancia de este aparato es tal que, a diferencia de la mayoría de los premios Nobel, que se otorgan décadas después de la presentación del trabajo que los amerita, Binning y Rohrer fueron galardonados con este premio apenas seis años después de sus primeros experimentos con el STM.

En la figura 2 se muestra el diseño de un STM. La idea básica que sustenta su funcionamiento es muy sencilla, como se muestra en la figura 3. Una sonda conductora con una punta muy aguda se aproxima a la superficie que desea estudiarse. Debido a que ésta es atraída hacia los iones positivos de la superficie, un electrón en la superficie posee una energía total menor a la que tiene un electrón situado en el espacio vacío

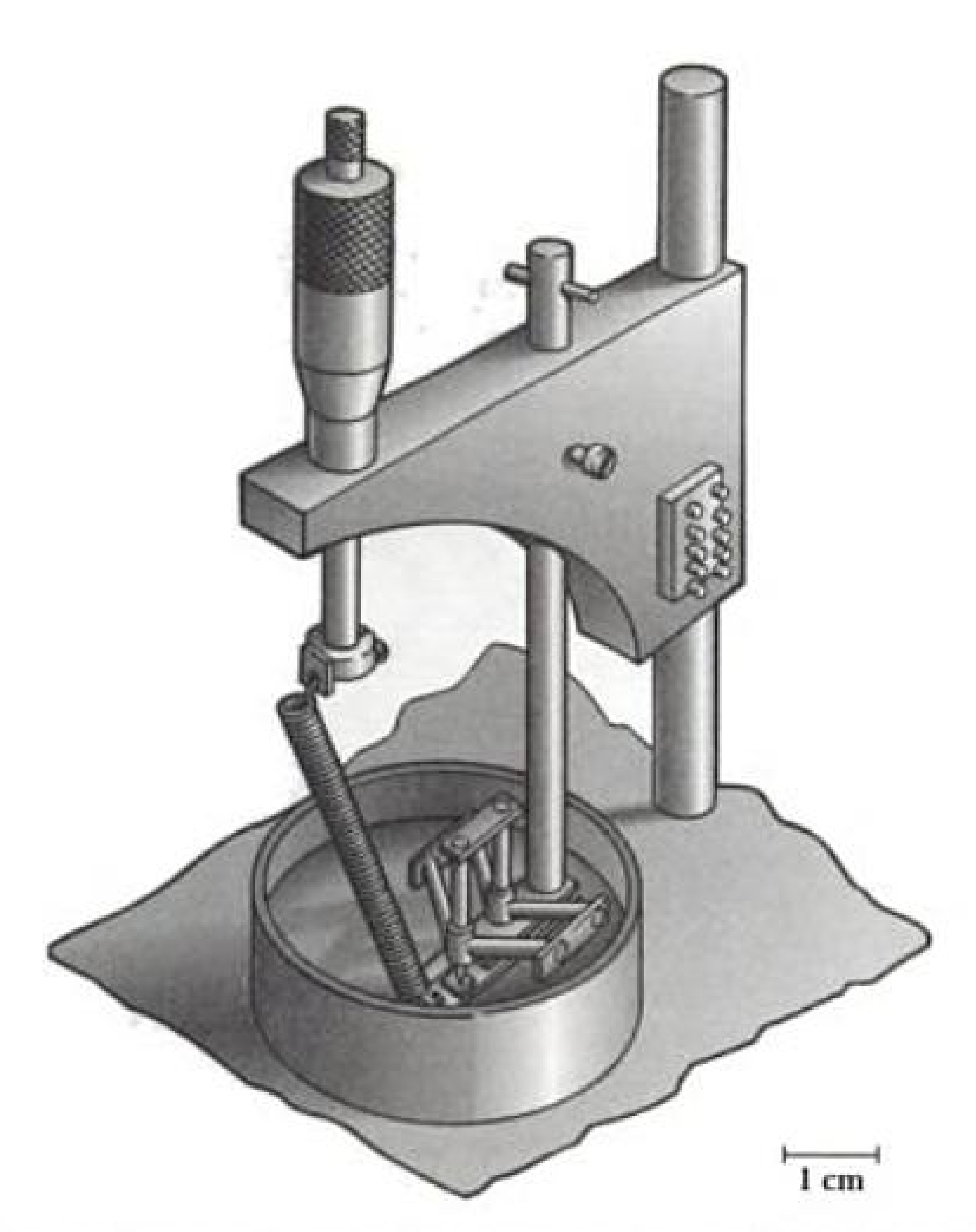


Figura 2 Diseño para un microscopio de tunelaje por barrido (STM, por sus iniciales en inlglés). La muestra a estudiar se monta sobre una lámina en el disco cilíndrico. La sonda se extiende debajo del tripié izquierdo. El micrómetro conectado al resorte se utiliza para posicionar la muestra.

entre la superficie y la punta. Esto mismo es válido para un electrón en la punta. En mecánica newtoniana clásica, los electrones no pueden moverse entre la superficie y la punta porque les falta energía para escapar de cualquiera de estos materiales. Pero debido a que los electrones cumplen las leyes de la mecánica cuántica, pueden "cruzar" a través de la barrera de espacio vacío entre la superficie y la punta. A continuación se estudiará la operación del STM en términos del análisis del fenómeno de tunelaje presentado en la sección 7.1.

Para un electrón en el aparato de las figuras 2 y 3, una gráfica de la energía como función de la posición se vería como la figura 7.2b. La coordenada horizontal en esta figura representa la posición del electrón. Ahora L debe interpretarse como la distancia entre la superficie y la punta, de modo que coordenadas inferiores a 0 se refieren a posiciones en el interior de la superficie del material y coordenadas superiores a L se refieren a posiciones en el interior de la punta. La altura $U = q\phi$ de la barrera es la diferencia de energía potencial entre un electrón fuera del material y un electrón en éste. Es decir, un electrón en la superficie o en la punta tiene una energía potencial $-U$ comparada con uno en el vacío. (Por el momento, se supone que la superficie y la punta son del mismo material. En breve comentaremos esta suposición.) La energía cinética de un electrón en la superficie es E, de modo que para remover a un electrón de la superficie debe proporcionársele una cantidad de energía igual a $(U - E)$. Así, $(U - E)$ es la función trabajo de un electrón en la superficie.

Para la curva de energía potencial de la figura 7.2b, sería de esperar que hubiese tunelaje de la superficie a la punta como en la dirección opuesta. En un STM, la dirección en que los electrones tienden a cruzar la barrera se controla aplicando un voltaje entre la superficie y la punta. Con tunelaje preferencial de la superficie a la punta, ésta muestrea la distribución de electrones dentro y sobre la superficie. Debido a este voltaje "de polarización", las funciones trabajo de la superficie y de la punta son diferentes, y proporcionan una dirección preferida de tunelaje. Éste también es automáticamente el caso si la superficie y la punta fueran de materiales distintos. Además, la parte superior de la barrera en la figura 7.2b no sería plana, sino que estaría inclinada para reflejar el campo eléctrico entre la superficie y la punta. No obstante, si la energía U de la barrera es grande en comparación con la diferencia en las funciones trabajo de la superficie y la punta, y si el voltaje de polarización fuese pequeño en comparación con $\phi = U/q$, estas complicaciones pueden ignorarse en los cálculos. Luego, todos los resultados proporcionados en la sección 7.1 para una barrera cuadrada pueden aplicarse a un STM. En el artículo de P. K. Hansma y J. Tersoff y en el discurso de aceptación del premio Nobel de Binning y Rohrer (consulte la bibliografía adicional sugerida) pueden encontrarse análisis detallados de los efectos que resultan cuando se incluyen estas complicaciones.

La escala de longitud característica para tunelaje se establece a través de la función trabajo $(U - E)$. Para un valor típico $(U - E) = 4$ eV, esta escala de longitud es

$$\delta = \frac{\hbar}{\sqrt{2m_e(U-E)}} = \frac{\hbar c}{\sqrt{2m_e c^2(U-E)}} = \frac{1.973 \text{ keV}\cdot\text{Å}}{\sqrt{2(511 \text{ keV})(4\times 10^{-3}\text{ keV})}}$$
$$= 0.98 \text{ Å} \approx 1.0 \text{ Å}$$

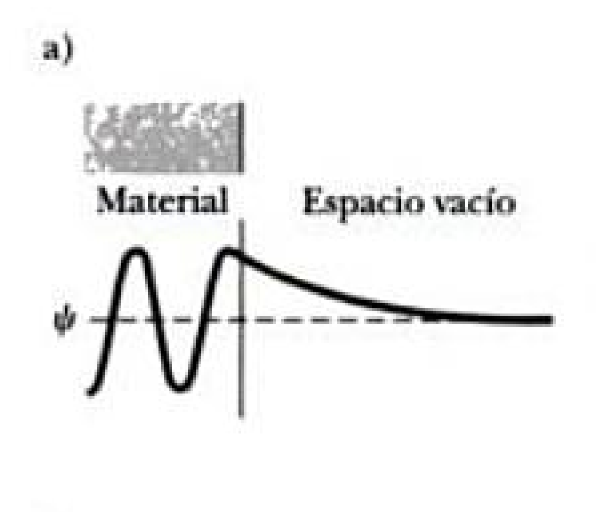
La probabilidad de que un electrón dado cruce a través de la barrera es justo el coeficiente de transmisión T (ecuación 7.9). Si la separación L entre la superficie y la punta no es pequeña en comparación con δ, entonces la barrera es "ancha" y puede utilizarse el resultado aproximado del problema 5 para T. La corriente de electrones que cruzan a través de la barrera es simplemente proporcional a T. Puede demostrarse que la densidad de la corriente de tunelaje es

$$j = \frac{e^2 V}{4\pi^2 L\delta\hbar} e^{2L/\delta}$$

En esta expresión, e es la carga del electrón y V es el voltaje de polarización entre la superficie y la punta.

A partir de esta expresión puede verse que el STM es muy sensible a la separación L entre la superficie y la punta. Esto se debe a la dependencia exponencial de la corriente de tunelaje con respecto a L (dependencia que es mucho más importante que aquella

a)



b)

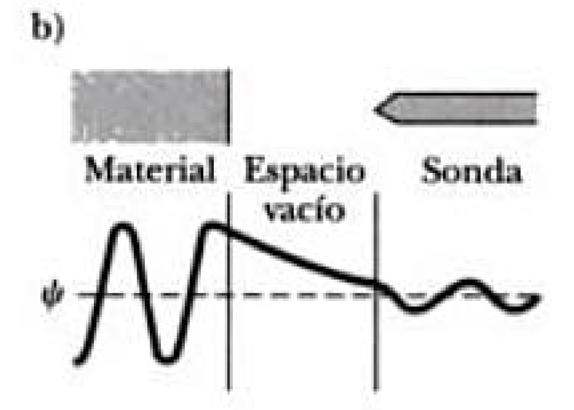


Figura 3 a) Función de onda de un electrón en la superficie del material a estudiar. La función de onda se extiende más allá de la superficie dentro de la región vacía. b) La punta aguda de una sonda conductora se acerca a la superficie. La función de onda de un electrón superficial penetra en la punta, de modo que éste puede cruzar de la superficie a la punta. Compare esta figura con la figura 7.2a.

con respecto a $1/L$). Como ya se vio, típicamente $\delta \approx 1$ Å. Por tanto, incrementar la distancia L justamente por 0.01 Å provoca que la corriente de tunelaje se multiplique por un factor $e^{-2(0.01\ \text{Å})/(1.0\ \text{Å})} \approx 0.98$; es decir, la corriente disminuye 2%, un cambio que es mensurable. Para una distancia L mayor que 10 Å (es decir, algo mayor que unos cuantos diámetros atómicos), esencialmente no se da tunelaje. Esta sensibilidad a L constituye la base de la operación del STM: el monitoreo de la corriente de tunelaje, a medida que la punta explora la superficie, proporciona una medida de la topografía de ésta. Es así como el STM puede medir la altura de las características superficiales en un intervalo inferior a 0.01 Å, o aproximadamente la centésima parte de un diámetro atómico.

El STM también cuenta con una excelente resolución lateral; es decir, resolución de características en el plano de la superficie. Lo anterior se debe a que las puntas utilizadas son, en efecto, *bastante* puntiagudas, de hecho por lo general miden de ancho sólo un átomo o dos en su extremo final. Así, la punta muestrea los electrones superficiales sólo en una región muy pequeña que mide aproximadamente 2 Å de ancho, de modo que puede "ver" detalles bastante finos. Usted podría pensar, quizá, que la fabricación de tales puntas es en extremo difícil; pero, de hecho, es relativamente fácil de hacer. Algunas veces basta con afilar la punta utilizando una piedra de amolar fina (e, incluso, con lija) para hacer que los átomos de la punta se reordenen por sí mismos en una configuración atómicamente puntiaguda. (Si esto le sorprende, no es el único. Binning y Rohrer no se sorprendieron menos al descubrir esto.)

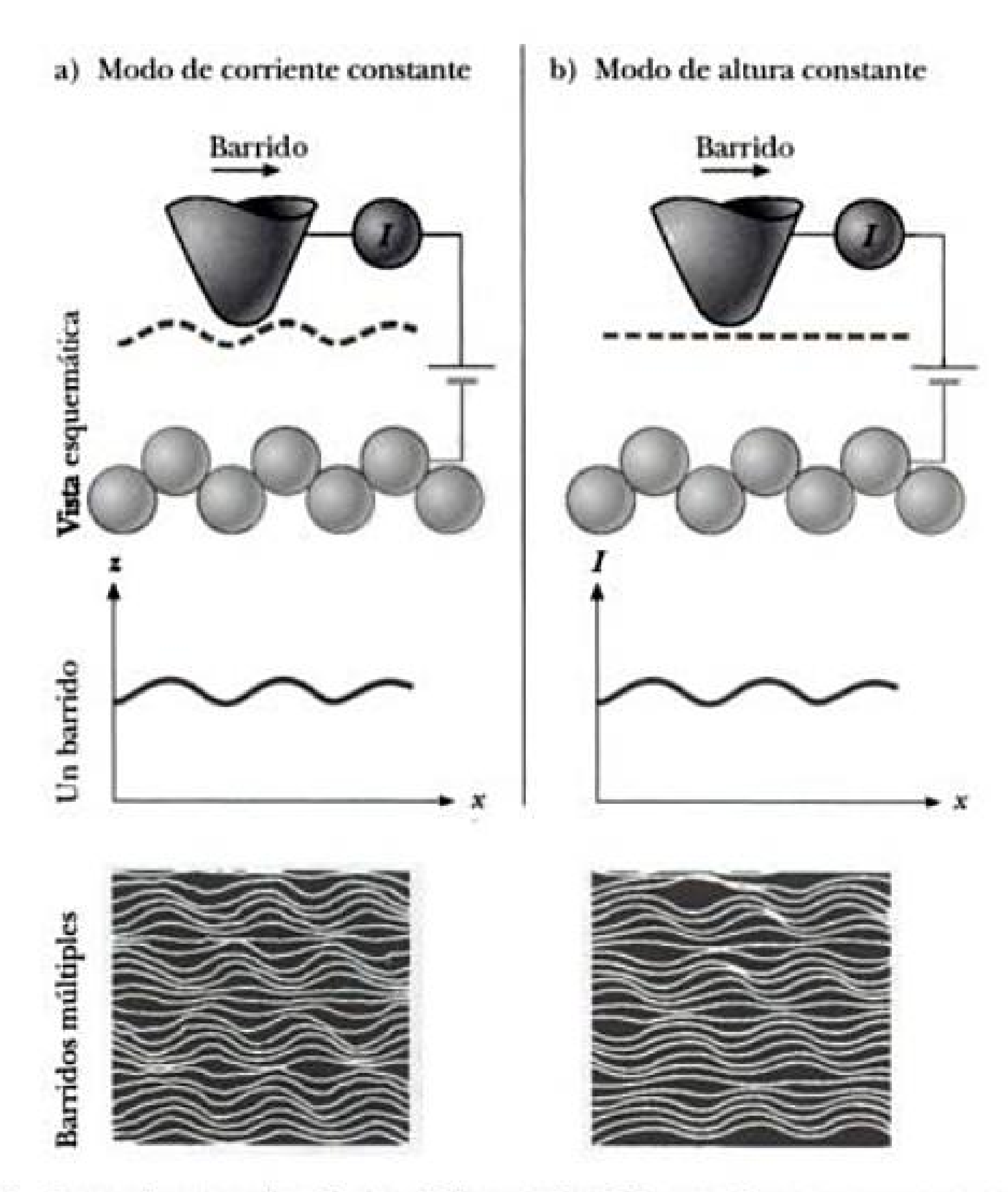


Figura 4 Los microscopios de tunelaje por barrido pueden operarse ya sea en a) el modo de corriente constante o b) el modo de altura constante. Las imágenes de la superficie de grafito fueron obtenidas por Richard Sonnenfeld en la Universidad de California en Santa Barbara. El modo de altura constante fue usado por primera vez por A. Bryant, D. P. E. Smith y C. F. Quate, *Appl. Phys. Lett.* 48:832, 1986.

Los dos modos de operar el STM se muestran en la figura 4. En el modo de **corriente constante** (figura 4a), primero se establece un voltaje de operación conveniente (típicamente entre 2 mV y 2 V) entre la superficie y la punta. Luego, la punta se aproxima lo suficiente a la superficie para obtener una corriente de tunelaje mensurable. Luego, la punta barre la superficie mientras se mide la corriente de tunelaje I. Una red de realimentación cambia la posición vertical de la punta, z, para mantener constante la corriente de tunelaje, así como la separación entre la superficie y la punta. Una imagen de la superficie se obtiene al graficar z contra la posición lateral (x, y). El esquema más sencillo para graficar la imagen se muestra en la gráfica debajo de la vista esquemática. La altura z se grafica contra la posición de exploración (o barrido) x. Una imagen consta de varias exploraciones desplazadas lateralmente entre sí en la dirección y.

El modo de corriente constante, históricamente el primero en ser utilizado, presenta la ventaja de que puede usarse para explorar superficies que no son atómicamente planas (como en la figura 1). La red de realimentación, no obstante, requiere que la exploración se efectúe de una manera relativamente lenta. Como resultado, la muestra que está siendo explorada debe mantenerse fija en su sitio durante periodos relativamente largos a fin de evitar distorsión en la imagen.

De forma alternativa, en el **modo de altura constante** (figura 4b) la punta explora la superficie a un voltaje constante y una altura casi constante, mientras se monitorea la corriente. En este caso, la red de realimentación responde sólo con la rapidez necesaria para mantener constante la corriente media, lo cual significa que la punta mantiene la misma separación media con respecto a la superficie. Así, la imagen es una gráfica de la corriente I contra la posición lateral (x, y), como se muestra en la gráfica abajo del esquema. De nuevo, las exploraciones múltiples a lo largo de x se muestran desplazadas lateralmente en la dirección y. La imagen muestra la variación sustancial de la corriente de tunelaje, mientras la punta pasa sobre características superficiales como átomos individuales. El modo de altura constante permite una exploración mucho más rápida de superficies atómicamente planas (100 veces más rápido que en el modo de corriente constante), ya que no es necesario mover la punta de arriba abajo sobre el "terreno" de la superficie. Esta exploración rápida significa que para obtener la imagen de una superficie sólo se requiere un breve "tiempo de exposición". Al hacer una secuencia de estas imágenes, los investigadores podrían estudiar en tiempo real aquellos procesos donde las superficies se reordenan a sí mismas, produciendo así una "película" de STM.

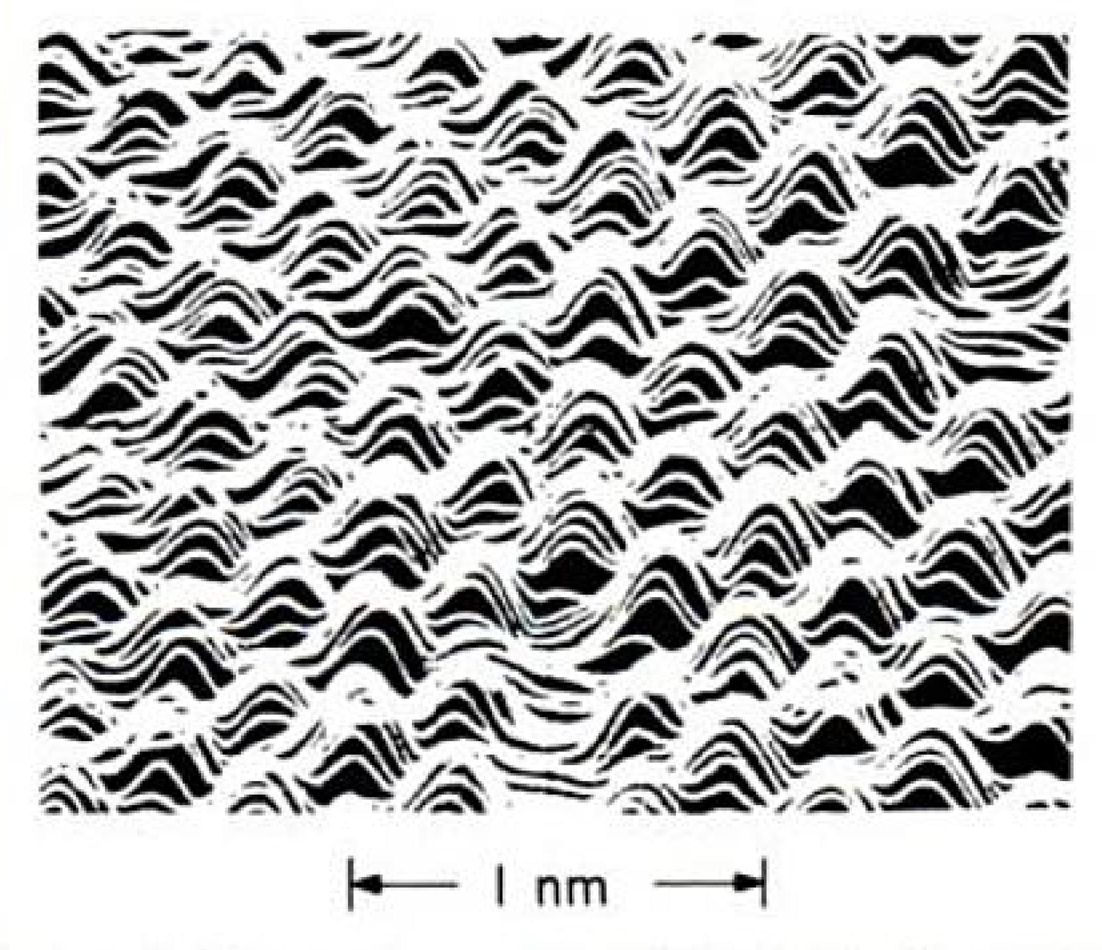


Figura 5 Imagen de átomos sobre una superficie de disulfuro de tantalio (TaS_2) inmerso en nitrógeno líquido; 1 nm = 10^{-9} m = 10 Å. La figura es del artículo de C. G. Slough, W. W. McNairy, R. V. Coleman, B. Drake y P. K. Hansma, *Phys. Rev.* B34:994, 1986.

Se han obtenido imágenes de átomos individuales sobre una variedad de superficies, incluyendo las de los denominados *materiales por capas*, donde los átomos están ordenados de manera natural en capas bidimensionales. En la figura 5 se muestra un ejemplo de átomos que están sobre uno de estos materiales por capas. En esta imagen no sólo es fascinante ver los átomos individuales, sino también observar que, de hecho, faltan algunos átomos. Específicamente, en la figura 5 hay tres átomos faltantes. ¿Puede encontrar los sitios que les corresponden?

Otro aspecto extraordinario de la imagen por STM de la figura 5 es que se obtuvo con la superficie y la punta inmersas en nitrógeno líquido. Antes, en este ensayo, se supuso que el espacio entre la superficie y la punta debe estar vacío, aunque pueda ocurrir, en efecto, tunelaje de electrones no sólo a través del vacío, sino a través de gases y líquidos, e incluso agua. Esto parece bastante sorprendente porque se considera que el agua, en especial el agua que contiene sales disueltas, es un conductor. Pero el agua es sólo un conductor *iónico*. Para electrones, el agua actúa como un aislante, de la misma forma en que el vacío se comporta como un aislante. Así, los electrones pueden circular por el agua sólo por tunelaje, lo que hace posible la microscopía de tunelaje "submarina" por barrido.

Como ejemplo, en la figura 6 se muestran átomos individuales de carbono sobre una superficie de grafito, la cual se obtuvo para una superficie inmersa en una solución recubierta de plata, que es sumamente conductora para iones, aunque se comporta como un aislante para los electrones. (Los lados de la sonda conductora fueron revestidos con un material no conductor, de modo que la corriente predominante en ella proviene de electrones que han cruzado a través de la punta expuesta. El diseño del STM, que se utilizó para obtener esta imagen en particular, es el que se muestra en la figura 2.) Sonnenfeld y Schardt observaron átomos sobre esta superficie de grafito antes de recubrirla con plata, después de enchaparla con "islas" de átomos de plata, y luego de que la plata fue estabilizada electroquímicamente desde la superficie. Su trabajo ilustra cómo el STM puede ser utilizado para observar procesos que se llevan a cabo a escala atómica.

Los STM originales eran aparatos de laboratorio, aunque en la actualidad ya hay STM comerciales disponibles. La figura 7 muestra la imagen de una superficie de grafito en aire, obtenida con uno de estos STM comerciales. Observe la alta calidad de esta imagen y los anillos reconocibles de los átomos de carbono. Quizá pueda ver que tres de los seis átomos de carbono en cada anillo *aparecen* más abajo que los tres restantes. De hecho, los seis átomos están al mismo nivel, pero los tres que parecen estar más aba-

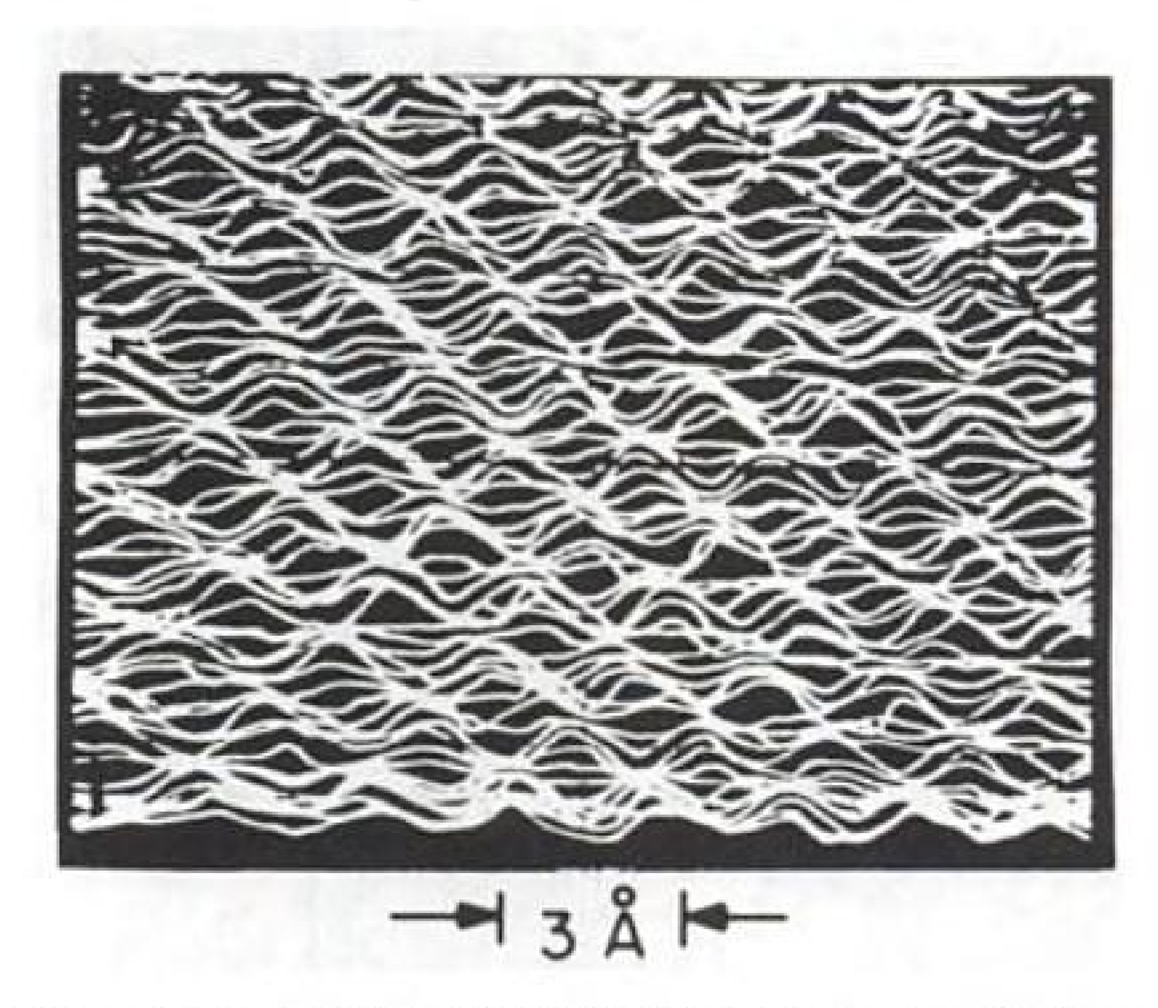


Figura 6 Imagen de un electrodo de grafito en un electrolito utilizado para chapeado de plata. La figura es del artículo de R. Sonnenfeld y B. Schardt, *Appl. Phys. Lett.* 49:1172, 1986.

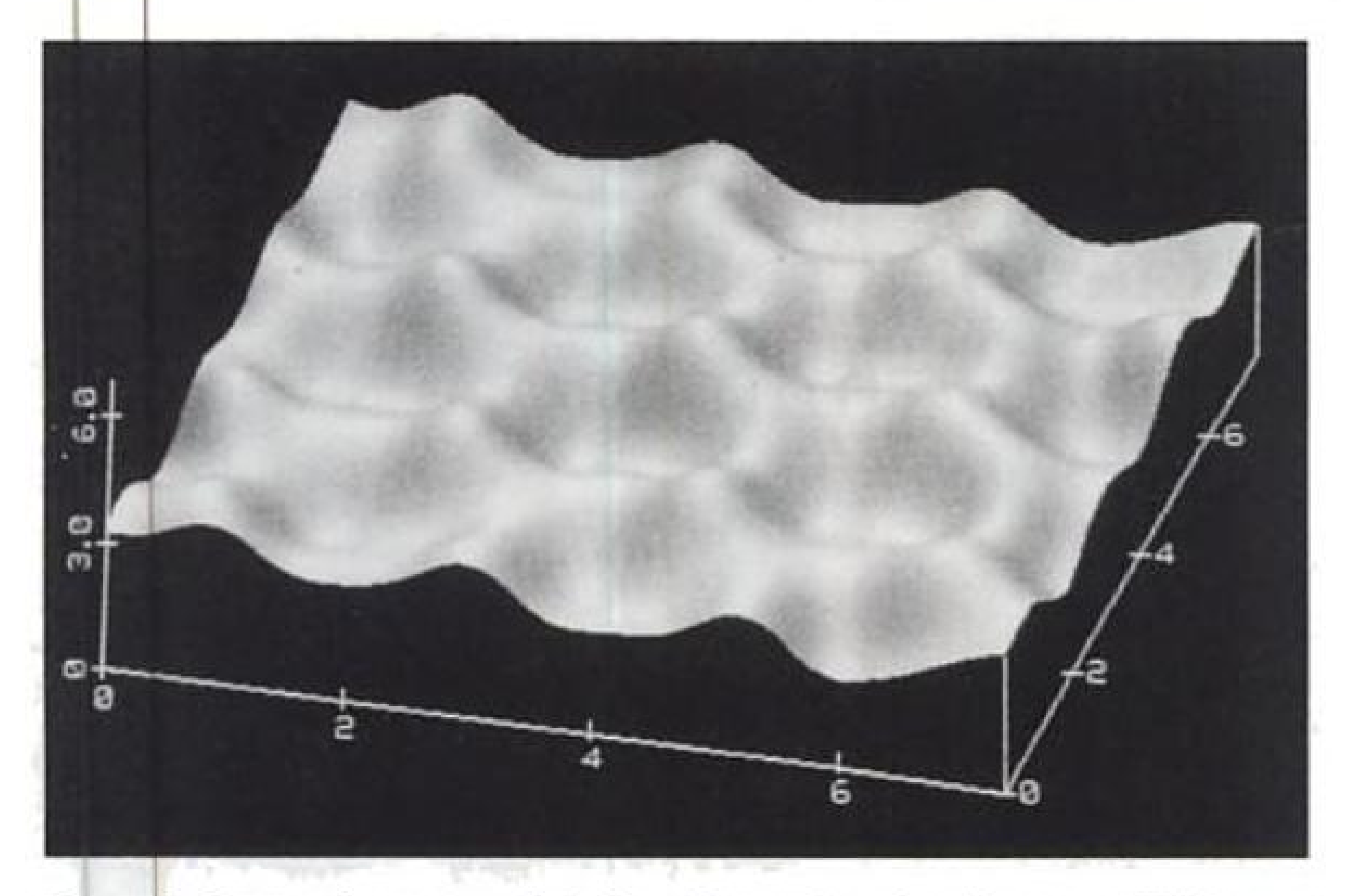


Figura 7 Imagen de una superficie de grafito en aire, obtenida con un STM comercial, el nanoscopio II de Digital Instruments en Goleta, California.

jo están ligados a átomos de carbono que se encuentran directamente debajo de ellos en la capa atómica subyacente. Los átomos en la capa superficial que parecen estar más arriba no se encuentran directamente sobre átomos subsuperficiales y, por tanto, no están ligados a átomos de carbono debajo de ellos. Para los átomos que parecen estar más arriba, algo de la densidad de electrones que hubiera estado implicada en la ligadura de los átomos debajo de la superficie se extiende en el espacio que está por arriba de esta superficie. Esta densidad adicional de electrones hace que estos átomos se vean más arriba en la figura 7, ya que lo que el STM mapea es la topografía de la distribución de electrones.

La disponibilidad de instrumentos comerciales debe acelerar el uso de la microscopía de tunelaje por barrido en varias aplicaciones. Algunas de éstas son los electrodos de caracterización para electroquímica (mientras el electrodo permanece en el electrolito), la caracterización de la aspereza de superficies, la medición de la calidad de las rejillas ópticas e, incluso, la formación de imágenes de réplicas de estructuras biológicas.

Quizá lo más extraordinario acerca de la microscopía de tunelaje por barrido es que su operación se basa en un fenómeno mecánico cuántico —el tunelaje—, que ya hacia la década de 1920 se comprendía bastante bien, aunque el STM mismo no fue inventado sino hasta la década de 1980. ¿Qué otras aplicaciones de la mecánica cuántica estarán esperando su turno para ser descubiertas?

BIBLIOGRAFÍA ADICIONAL SUGERIDA

G. Binning, H. Rohrer, Ch. Gerber y E. Weibel, *Phys. Rev. Lett.* 49:57, 1982. La primera descripción del microscopio de tunelaje por barrido.

G. Binnig y H. Rohrer, *Sci. Am.*, agosto de 1985, p. 50. Descripción básica del STM y sus aplicaciones.

C. F. Quate, *Phys. Today*, agosto de 1986, p. 26. Una revisión del campo de la microscopía de tunelaje por barrido, incluyendo comentarios sobre cómo fue desarrollada.

P. K. Hansma y J. Tersoff, *J. Appl. Phys.* 61:R1, 1987. Una revisión completa del "estado del arte" en microscopía de tunelaje por barrido..

G. Binnig y H. Rohrer, *Rev. Mod. Phys.* 95:615, 1987. Texto del discurso pronunciado con motivo de la recepción del premio Nobel de Física en 1986.

8

Mecánica cuántica en tres dimensiones

Contenido del capítulo

Hasta el momento se ha mostrado cómo la mecánica cuántica puede utilizarse para describir el movimiento en una dimensión. Aunque el caso unidimensional ilustra características fundamentales de sistemas como la cuantización de la energía, se requiere un tratamiento tridimensional completo para las aplicaciones en física atómica, física de estado sólido y nuclear que se encontrarán en capítulos posteriores. En este capítulo se extienden los conceptos de la mecánica cuántica de una a tres dimensiones y se exploran las predicciones de la teoría para el sistema real más simple: el átomo de hidrógeno.

La introducción de nuevos grados de libertad (y las coordenadas adicionales necesarias para describirlos) conlleva un aumento desproporcionado en el nivel de dificultad matemática. Para orientar nuestra investigación, dependeremos de las ideas clásicas para ayudarnos a identificar las observables que son candidatas probables para la cuantización. Éstas deben provenir de las filas de las denominadas *observables nítidas* que, con pocas excepciones, son las mismas que las constantes del movimiento clásico.

8.1 PARTÍCULA EN UNA CAJA TRIDIMENSIONAL

Los mecanismos de la mecánica ondulatoria en tres dimensiones se analizarán a través del ejemplo de una partícula confinada en una "caja" cúbica. La caja tiene una arista que mide L de longitud y ocupa la región $0 < x, y, z < L$, como se muestra en la figura 8.1. Se supone que las paredes de la caja son *lisas*, de modo que sólo se ejercen fuerzas perpendiculares a la superficie, y que las colisiones contra las paredes son elásticas. Una partícula clásica podría oscilar dentro de la caja, chocando contra las paredes. En cada colisión, la componente normal a la pared de la cantidad de movimiento de la partícula se in-

vierte (cambia de signo), mientras que las otras dos componentes de la cantidad de movimiento permanecen sin cambio (figura 8.2). Así, las colisiones preservan la magnitud de cada componente de la cantidad de movimiento, además de la energía total de la partícula. Así, estas cuatro cantidades: $|p_x|$, $|p_y|$, $|p_z|$ y E son constantes del movimiento clásico, por lo que debe ser posible encontrar estados cuánticos para los cuales todas sean nítidas.[1]

La función de onda Ψ en tres dimensiones es una función de $\mathbf{r}$ y de t. De nuevo, la magnitud de Ψ determina la densidad de probabilidad $P(\mathbf{r}, t) = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$, que ahora es una *probabilidad por unidad de volumen*. Al multiplicar por el elemento de volumen $dV(= dx\, dy\, dz)$ se obtiene la probabilidad de encontrar a la partícula dentro del elemento de volumen dV en el punto $\mathbf{r}$ en el instante t.

Debido a que la partícula está confinada en la caja, la función de onda Ψ debe ser cero en las paredes y en el exterior. La función de onda dentro de la caja se encuentra a partir de la ecuación de Schrödinger,

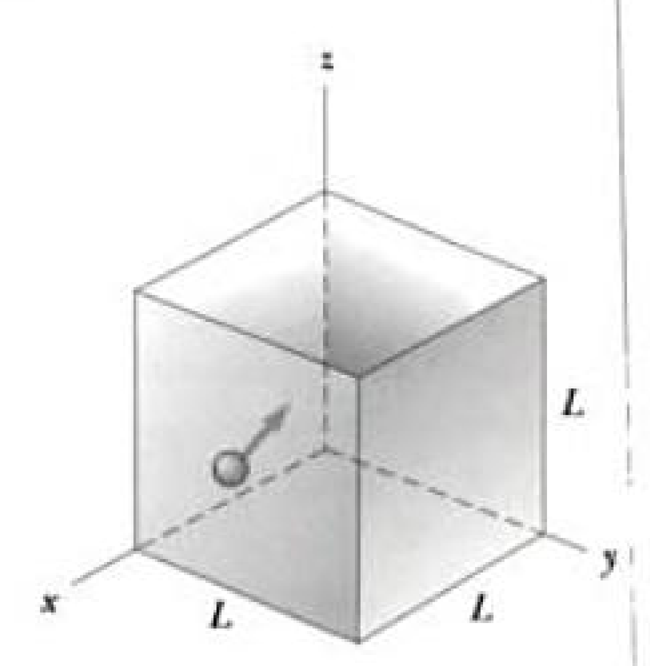


Figura 8.1 Partícula confinada a moverse en una caja cúbica cuya arista es L. Dentro de la caja, $U = 0$. La energía potencial es infinita en las paredes y fuera de la caja.

Ecuación de Schrödinger en tres dimensiones

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + U(\mathbf{r})\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{8.1}$$

Se observa que $\partial^2/\partial x^2$, en el caso unidimensional, se sustituye en tres dimensiones por el **laplaciano,**

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{8.2}$$

donde $U(\mathbf{r})$ sigue siendo la energía potencial, aunque ahora es una función de todas las coordenadas espaciales: $U(\mathbf{r}) = U(x, y, z)$. En efecto, el laplaciano, junto con la constante por la que se multiplica, es justo el operador de energía cinética de la tabla 6.2 extendido a fin de incluir las contribuciones a la energía cinética debido al movimiento en cada una de las tres direcciones mutuamente perpendiculares:

$$\begin{aligned}-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\\ &= [K_x] + [K_y] + [K_z]\end{aligned} \tag{8.3}$$

Esta forma es consistente con la convicción de que los ejes cartesianos identifican direcciones espaciales independientes pero lógicamente equivalentes. Con esta identificación del operador de energía cinética en tres dimensiones, el lado izquierdo de la ecuación 8.1 nuevamente es el operador hamiltoniano $[H]$ aplicado a Ψ, y el lado derecho es el operador de energía $[E]$ aplicado a Ψ (consulte la sección 6.8). Así como ocurre en el caso de una dimensión, la ecuación de Schrödinger asegura la equivalencia de estos dos operadores cuando se aplican a la función de onda de cualquier sistema físico.

Los **estados estacionarios** son aquellos en los que todas las probabilidades son constantes en el tiempo, y están dadas por soluciones de la ecuación de Schrödinger en la forma separable,

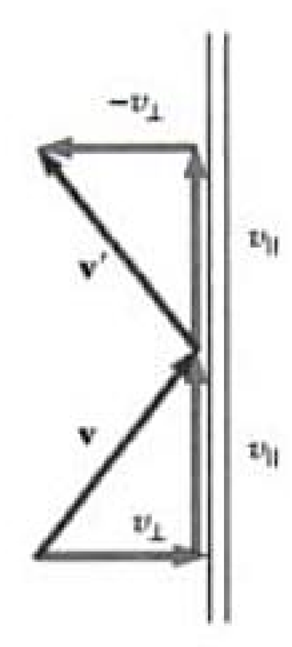


Figura 8.2 Cambio en la velocidad (o en la cantidad de movimiento) de una partícula durante una colisión contra la pared de una caja. Para una colisión elástica con una pared lisa, la componente normal a la pared se invierte, aunque las componentes tangenciales permanecen sin cambio.

[1]Recuerde de la sección 6.7 que las observables nítidas son aquellas para las cuales no hay distribución estadística de valores medidos. En efecto, las funciones de onda cuánticas están típicamente identificadas por las observables nítidas para ese estado. (Por ejemplo, los estados del oscilador de la sección 6.6 están indexados por el número cuántico n, que especifica el valor nítido de la energía de la partícula, E. En este caso, los valores nítidos de energía también están *cuantizados*; es decir, limitados a los valores discretos $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega$. Se concluye que cualquier observable nítida es constante en el tiempo (a menos que el operador correspondiente implique de manera explícita al tiempo). Lo inverso —esto es, que existen estados cuánticos para los cuales todas las constantes del movimiento clásico son nítidas—, no siempre es verdadero, aunque ocurre tan a menudo que puede funcionar como una regla práctica.

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \tag{8.4}$$

Con esta dependencia con respecto al tiempo, el lado derecho de la ecuación 8.1 se reduce a $\hbar\omega\Psi$, dejando que $\psi(\mathbf{r})$ satisfaga la **ecuación de Schrödinger independiente con respecto al tiempo** para una partícula cuya energía es $E = \hbar\omega$:

Ecuación de Schrödinger independiente del tiempo

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \tag{8.5}$$

Debido a que la partícula es libre dentro de la caja, la energía potencial se toma como $U(\mathbf{r}) = 0$ para $0 < x, y, z < L$. En este caso, la función de onda espacial también es separable; es decir, es posible encontrar, de la ecuación 8.5 con $U(\mathbf{r}) = 0$, soluciones de la forma del producto

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi(x, y, z) = \psi_1(x)\psi_2(y)\psi_3(z) \tag{8.6}$$

Al sustituir la ecuación 8.6 en la ecuación 8.5 y dividir cada término entre la función $\psi(x, y, z)$ se obtiene (para $U(\mathbf{r}) = 0$)

$$-\frac{\hbar^2}{2m\psi_1}\frac{d^2\psi_1}{dx^2} - \frac{\hbar^2}{2m\psi_2}\frac{d^2\psi_2}{dy^2} - \frac{\hbar^2}{2m\psi_3}\frac{d^2\psi_3}{dz^2} = E$$

En esta forma las variables independientes están aisladas: el primer término a la izquierda depende sólo de x; el segundo, sólo de y, y el tercero, sólo de z. Para satisfacer la ecuación en *todas partes* dentro del cubo, cada uno de estos términos debe reducirse a una constante:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m\psi_1}\frac{d^2\psi_1}{dx^2} &= E_1 \\ -\frac{\hbar^2}{2m\psi_2}\frac{d^2\psi_2}{dy^2} &= E_2 \\ -\frac{\hbar^2}{2m\psi_3}\frac{d^2\psi_3}{dz^2} &= E_3 \end{aligned} \tag{8.7}$$

Los estados estacionarios de una partícula confinada a un cubo se obtienen a partir de estas tres ecuaciones separadas. Las energías E_1, E_2 y E_3 son **constantes de separación** y representan la energía de movimiento a lo largo de los tres ejes cartesianos x, y y z. De acuerdo con esta identificación, la ecuación de Schrödinger requiere que $E_1 + E_2 + E_3 = E$.

La primera de las ecuaciones 8.7 es la misma que para el pozo cuadrado infinito en una dimensión. Soluciones independientes de esta ecuación son sen k_1x y cos k_1x, donde $k_1 = \sqrt{2mE_1/\hbar^2}$ es el número de onda de la oscilación. No obstante, sólo sen k_1x cumple la condición de que la función de onda debe desaparecer en la pared $x = 0$. El requisito de que la función de onda también desaparezca en la pared opuesta $x = L$ implica que $k_1L = n_1\pi$, donde n_1 es cualquier entero positivo. En otras palabras, debe ser posible ajustar un número entero de semilongitudes de onda en la caja a lo largo de la dirección x. Se concluye que la magnitud de la cantidad de movimiento de la partícula a lo largo de esta dirección debe ser uno de los valores especiales

$$|p_x| = \hbar k_1 = n_1\frac{\pi\hbar}{L} \qquad n_1 = 1, 2, \ldots$$

Consideraciones idénticas aplicadas a las dos ecuaciones restantes muestran que las magnitudes de la cantidad de movimiento de la partícula en las tres direcciones están cuantizadas similarmente:

$$|p_x| = \hbar k_1 = n_1 \frac{\pi\hbar}{L} \qquad n_1 = 1, 2, \ldots$$
$$|p_y| = \hbar k_2 = n_2 \frac{\pi\hbar}{L} \qquad n_2 = 1, 2, \ldots \qquad (8.8)$$
$$|p_z| = \hbar k_3 = n_3 \frac{\pi\hbar}{L} \qquad n_3 = 1, 2, \ldots$$

Valores permitidos de las componentes de la cantidad de movimiento para una partícula en una caja

Observe que $n_i = 0$ no está permitido, ya que esta elección conduce a una ψ_i que también es cero y a una función de onda $\psi(\mathbf{r})$ que desaparece en todas partes. Debido a que las cantidades de movimiento están restringidas de esta manera, la energía de la partícula (cinética) está limitada a los siguientes valores discretos:

$$E = \frac{1}{2m}\left(|p_x|^2 + |p_y|^2 + |p_z|^2\right) = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\} \qquad (8.9)$$

Energías discretas permitidas para una partícula en una caja

Así pues, confinar a la partícula en el cubo sirve para cuantizar su cantidad de movimiento y energía según las ecuaciones 8.8 y 8.9. Observe que **para especificar el estado cuántico se requieren tres números cuánticos, que corresponden a los tres grados de libertad independientes para una partícula en el espacio.** Estos números cuánticos especifican los valores asumidos por las observables nítidas para este sistema.

Al reunir los resultados anteriores se observa que los estados estacionarios para esta partícula son

$$\begin{aligned}\Psi(x, y, z, t) &= A\,\mathrm{sen}(k_1x)\mathrm{sen}(k_2y)\mathrm{sen}(k_3z)e^{-i\omega t} && \text{para } 0 < x, y, z < L \\ &= 0 && \text{en caso contrario}\end{aligned} \qquad (8.10)$$

La constante A se escoge para satisfacer el requisito de normalización. El ejemplo 8.1 muestra que $A = (2/L)^{3/2}$ para el estado base, y este resultado continúa siendo válido también para los estados excitados.

EJEMPLO 8.1 Normalización de las funciones de onda de la caja

Encuentre el valor de la constante A que normaliza la función de onda de la ecuación 8.10, que tiene la menor energía.

Solución El estado de menor energía está descrito por $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, o bien, $k_1 = k_2 = k_3 = \pi/L$. Debido a que Ψ es diferente de cero sólo para $0 < x, y, z < L$, la integral de densidad de probabilidad sobre el volumen de este cubo debe ser igual a la unidad:

$$1 = \int_0^L dx \int_0^L dy \int_0^L dz\, |\Psi(x, y, z, t)|^2$$
$$= A^2\left\{\int_0^L \mathrm{sen}^2(\pi x/L)\,dx\right\}\left\{\int_0^L \mathrm{sen}^2(\pi y/L)\,dy\right\} \times \left\{\int_0^L \mathrm{sen}^2(\pi z/L)\,dz\right\}$$

Al usar $2\,\mathrm{sen}^2\,\theta = 1 - \cos 2\theta$ se obtiene

$$\int_0^L \mathrm{sen}^2(\pi x/L)\,dx = \frac{L}{2} - \frac{L}{4\pi}\,\mathrm{sen}(2\pi x/L)\Big|_0^L = \frac{L}{2}$$

El mismo resultado se obtiene para las integrales sobre y y z. Así pues, la normalización requiere

$$1 = A^2\left(\frac{L}{2}\right)^3$$

o bien

$$A = \left(\frac{2}{L}\right)^{3/2}$$

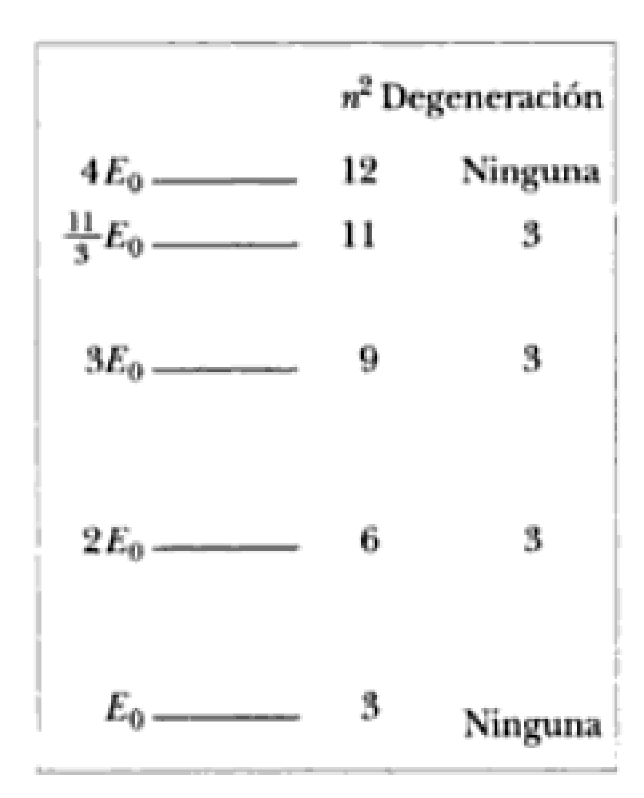


Figura 8.3 Diagrama de los niveles energéticos para una partícula confinada en una caja cúbica. La energía en el estado base es $E_0 = 3\pi^2\hbar^2/2mL^2$, y $n^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$. Observe que casi todos los niveles están degenerados.

Ejercicio 1 ¿Con qué probabilidad se encontrará a la partícula descrita por la función de onda del ejemplo 8.1 en el volumen $0 < x, y, z < L/4$?

Respuesta 0.040, o alrededor de 4%.

Ejercicio 2 Modele un defecto en un cristal como una caja tridimensional, cuya arista mide 5 Å de longitud, para encontrar los valores de la cantidad de movimiento y energía para un electrón atrapado en el sitio del defecto, suponiendo que el electrón está en su estado base.

Respuesta $|p_x| = |p_y| = |p_z| = 1.24$ keV/c, $E = 4.51$ eV.

El estado base, para el que $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, tiene energía

$$E_{111} = \frac{3\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

Existen *tres* primeros estados excitados, que corresponden a las tres combinaciones diferentes de n_1, n_2 y n_3, cuyos cuadrados suman 6. Es decir, se obtiene la misma energía para las tres combinaciones $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $n_3 = 1$, o bien, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 3$, o bien, $n_1 = 1$, $n_2 = 1$, $n_3 = 2$. La energía del primer estado excitado es

$$E_{211} = E_{121} = E_{112} = \frac{6\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

Observe que cada uno de los primeros estados excitados está caracterizado por una función de onda distinta: ψ_{211} tiene longitud de onda L a lo largo del eje x y longitud de onda $2L$ a lo largo de los ejes y y z; pero, para ψ_{121} y ψ_{112}, la longitud de onda más corta es a lo largo de los ejes y y z, respectivamente.

Siempre que estados diferentes tienen la misma energía, se dice que este nivel energético es **degenerado.** En el ejemplo que acaba de describirse, el primer estado excitado es tres veces (o está triplemente) degenerado. Este sistema posee estados degenerados debido al alto grado de simetría asociado con la forma cúbica de la caja. La degeneración podría removerse, o *cancelarse*, si los lados de la caja fuesen de longitudes diferentes (vea el ejemplo 8.3). De hecho, la separación de los niveles originalmente degenerados aumenta con el grado de asimetría.

La figura 8.3 es un diagrama de niveles de energía que muestra los cinco primeros niveles de una partícula en una caja cúbica: en la tabla 8.1 se enumeran los números cuánticos y las degeneraciones de los distintos niveles. En la figura 8.4 se muestran las gráficas generadas por computadora de la densidad de probabilidad $|\psi(x, y, z)|^2$ para el estado base y los primeros estados excitados de una partícula en una caja. Observe que las probabilidades para los primeros estados excitados (degenerados) difieren sólo en su orientación con respecto a los ejes coordenados, de nuevo una reflexión de la simetría cúbica impuesta por el potencial de la caja.

EJEMPLO 8.2 El segundo estado excitado

Determine las funciones de onda y la energía para el segundo nivel excitado de una partícula en una caja cúbica cuya arista mide L. ¿Cuál es la degeneración de este nivel?

Solución El segundo nivel excitado corresponde a las tres combinaciones de los números cuánticos $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$, o bien, $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $n_3 = 2$, o bien, $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$. Las funciones de onda correspondientes en el interior de la caja son

$$\Psi_{221} = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi y}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{L}\right)e^{-iE_{221}t/\hbar}$$

$$\Psi_{212} = A \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi y}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi z}{L}\right)e^{-iE_{212}t/\hbar}$$

$$\Psi_{122} = A \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi y}{L}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi z}{L}\right)e^{-iE_{122}t/\hbar}$$

El nivel es triplemente degenerado, ya que cada una de estas funciones de onda posee la misma energía,

$$E_{221} = E_{212} = E_{122} = \frac{9\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

Tabla 8.1 Números cuánticos y degeneraciones de los niveles energéticos para una partícula confinada en una caja cúbica*

n_1	n_2	n_3	n^2	Degeneración
1	1	1	3	Ninguna
1	1	2	6	Triple
1	2	1	6	
2	1	1	6	
1	2	2	9	Triple
2	1	2	9	
2	2	1	9	
1	1	3	11	Triple
1	3	1	11	
3	1	1	11	
2	2	2	12	Ninguna

**Nota*: $n^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$.

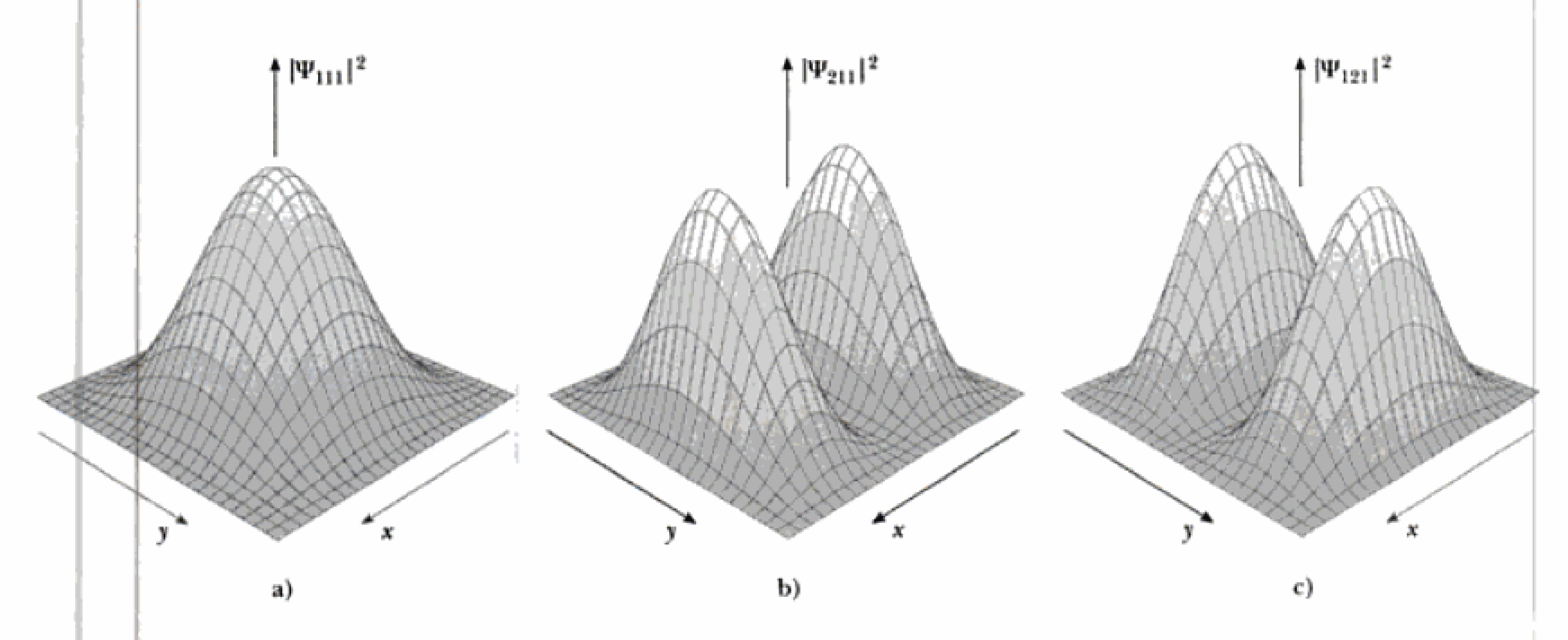


Figura 8.4 Densidad de probabilidad (no normalizada) para una partícula en una caja: a) estado base, $|\Psi_{111}|^2$; b) y c) primeros estados excitados, $|\Psi_{211}|^2$ y $|\Psi_{121}|^2$, respectivamente. Las gráficas muestran $|\Psi|^2$ en el plano $z = \frac{1}{2}L$. En este plano, $|\Psi_{112}|^2$ (no aparece) es sinónimo de $|\Psi_{111}|^2$.

EJEMPLO 8.3 Cuantización en una caja rectangular

Obtenga una fórmula para las energías permitidas de una partícula confinada en una caja rectangular cuyas aristas miden L_1, L_2 y L_3 de longitud. ¿Cuál es la degeneración del primer estado excitado?

Solución Para una caja cuya arista mide L_1 de longitud en la dirección x, ψ es cero en las paredes si L_1 es un número entero de semilongitudes de onda. Así, la magnitud de la cantidad de movimiento de la partícula en esta dirección está cuantizada como

$$|p_x| = \hbar k_1 = n_1 \frac{\pi\hbar}{L_1} \qquad n_1 = 1, 2, \ldots$$

De manera semejante, para las otras dos direcciones, se tiene

$$|p_y| = \hbar k_2 = n_2 \frac{\pi\hbar}{L_2} \qquad n_2 = 1, 2, \ldots$$

$$|p_z| = \hbar k_3 = n_3 \frac{\pi\hbar}{L_3} \qquad n_3 = 1, 2, \ldots$$

Las energías permitidas son

$$E = (|p_x|^2 + |p_y|^2 + |p_z|^2)/2m$$
$$= \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left\{\left(\frac{n_1}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{L_3}\right)^2\right\}$$

La energía mínima ocurre nuevamente para $n_1 = n_2 = n_3 = 1$. Al incrementar uno de los enteros por 1 se obtiene el siguiente nivel más bajo, o primer estado excitado. Si L_1 es la dimensión más grande, entonces $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $n_3 = 1$ produce el menor incremento de energía y describe el primer estado excitado. Además, en la medida en que L_2 y L_3 no sean iguales a L_1, el primer nivel excitado es no degenerado; es decir, no hay ningún otro estado con esta energía. Si L_2 o L_3 son iguales a L_1, el nivel es doblemente degenerado; si los tres son iguales, el nivel es triplemente degenerado. Así, mientras mayor sea la simetría, se encuentran más degeneraciones.

8.2 FUERZAS CENTRALES Y MOMENTO ANGULAR

La formulación de mecánica cuántica en coordenadas cartesianas es la forma natural para generalizar de una dimensión a dimensiones más altas, aunque a menudo no es la mejor para una aplicación dada. Por ejemplo, un electrón atómico es atraído hacia el núcleo del átomo por la fuerza de Coulomb que existe entre cargas opuestas. Éste es un ejemplo de **fuerza central;** es decir, una fuerza dirigida hacia un punto fijo. El núcleo es el centro de fuerza, y las coordenadas a elegir en esta situación son las coordenadas esféricas r, θ, ϕ centradas en el núcleo (figura 8.5). Si la fuerza central es conservativa, la energía de la partícula (cinética más potencial) permanece constante y E se

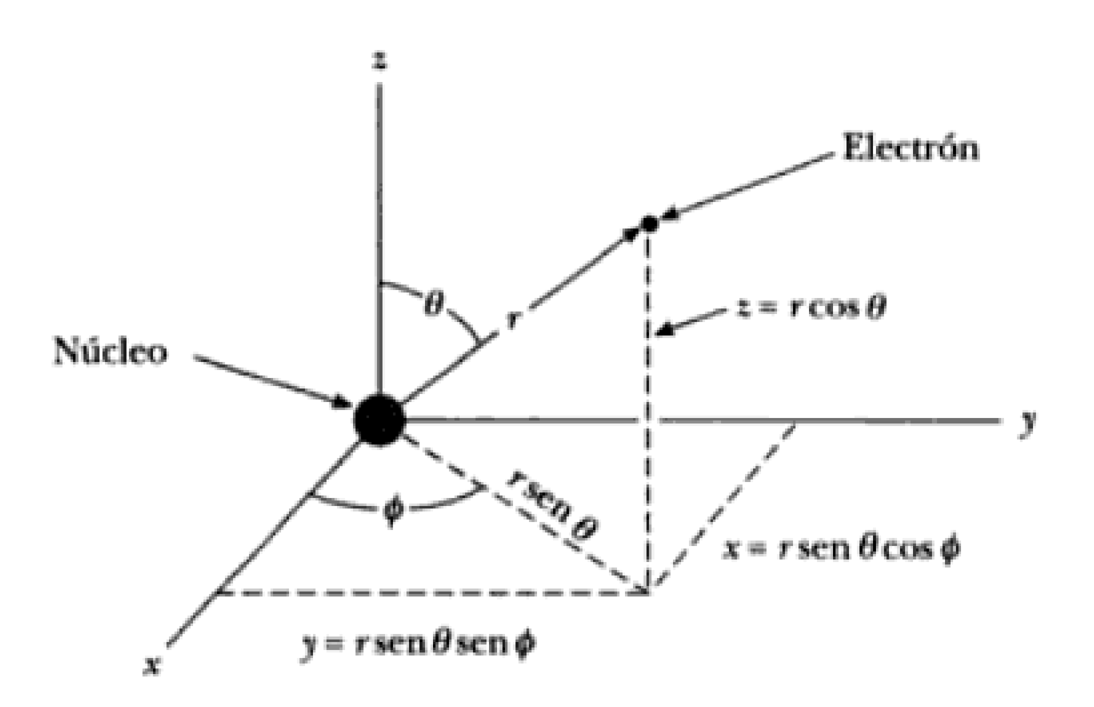


Figura 8.5 La fuerza central sobre un electrón atómico está dirigida hacia un punto fijo: el núcleo. Las coordenadas a elegir aquí son las esféricas, r, θ, ϕ, centradas en el núcleo.

convierte en una candidata para ser cuantizable. En ese caso, los estados cuánticos son ondas estacionarias $\psi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, con $\omega = E/\hbar$, donde E es el valor nítido de la energía de la partícula.

Pero para fuerzas centrales, el momento angular **L** alrededor del centro de fuerza también es constante (una fuerza central no ejerce una torca alrededor de su centro de fuerza), y podría esperarse que sea posible encontrar funciones de onda para las cuales las tres componentes del momento angular tomen valores nítidos. Lo anterior impone severas restricciones sobre la forma de la función de onda. De hecho, estas restricciones son tan severas que es imposible encontrar una función de onda que las cumpla todas a la vez; es decir, ¡no todas las componentes del momento angular pueden conocerse simultáneamente!

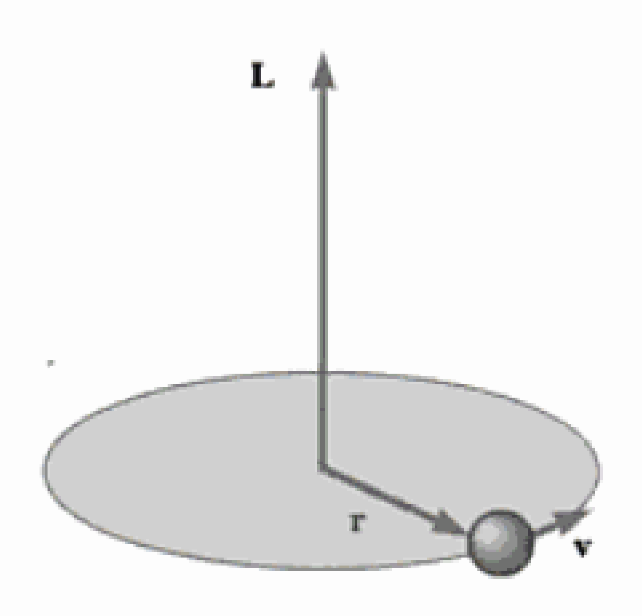


Figura 8.6 El momento angular **L** de una partícula en órbita es perpendicular al plano de la órbita. Si se conociera con precisión la dirección de **L**, sabríamos cuál es la coordenada y la cantidad de movimiento en la dirección perpendicular a la órbita, lo que violaría el principio de incertidumbre.

El dilema es una remembranza de la incapacidad que se tiene para especificar simultáneamente la posición y la cantidad de movimiento de una partícula. En efecto, si la dirección de **L** se conociera de manera precisa, la partícula estaría confinada al plano orbital (el plano perpendicular al vector **L**) y su coordenada en la dirección normal a este plano se conocería de manera exacta, y sin cambio (figura 8.6). En ese caso, sin embargo, la partícula podría no tener cantidad de movimiento fuera del plano orbital, de modo que su cantidad de movimiento lineal perpendicular a este plano también sería conocida (igual a cero), en violación al principio de incertidumbre. El razonamiento recién proporcionado puede refinarse a fin de establecer un principio de incertidumbre para el momento angular: **es imposible especificar simultáneamente cualesquiera dos componentes del momento angular.** O bien, si una componente de **L** es nítida, entonces las dos restantes deben ser "vagas".[2]

Principio de incertidumbre para el momento angular

Entonces, además de E y una componente de **L**, ¿qué más podría estar cuantizado, o ser nítido, para fuerzas centrales? La respuesta se encuentra en la siguiente observación: con sólo una componente de **L** nítida, no hay redundancia en que la magnitud $|\mathbf{L}|$ también sea nítida. De esta forma, E, $|\mathbf{L}|$ y una componente de **L**, por ejemplo L_z, se convierten en observables nítidas sujetas a cuantización en el problema de la fuerza central.

Las funciones de onda para las que ambas, $|\mathbf{L}|$ y L_z, son nítidas se obtienen directamente a partir de la separación de variables en la ecuación de Schrödinger para una fuerza central. La función de onda independiente del tiempo en coordenadas esféricas r, θ, ϕ se toma como el producto

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \tag{8.11}$$

Separación de variables para la función de onda de estado estacionario

y la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, ecuación (8.5), se escribe en estas coordenadas usando la forma en coordenadas esféricas del laplaciano:[3]

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\frac{2}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial \theta} + \csc^2\theta\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right]$$

[2]El momento angular es una excepción al razonamiento de que las constantes del movimiento clásico corresponden a observables nítidas en mecánica cuántica. La falla tiene su origen en otra máxima —el principio de incertidumbre— que sienta precedente. La única instancia en que dos o más componentes del momento angular pueden conocerse con exactitud es el caso trivial $L_x = L_y = L_z = 0$.

[3]El laplaciano en coordenadas esféricas puede encontrarse en cualquier texto científico más avanzado, o obtenerse a partir de la forma cartesiana siguiendo los razonamientos presentados en la sección 8.4.

Después de dividir cada término de la ecuación 8.5 entre $R\Theta\Phi$, lo que queda es

$$\frac{-\hbar^2}{2mR}\left[\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right]-\frac{\hbar^2}{2m\Theta}\frac{1}{r^2}\left[\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right]-\frac{\hbar^2}{2m\Phi}\frac{1}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+U(r)=E$$

Observe que ahora derivadas normales sustituyen a las parciales y que $U(\mathbf{r})$ se convierte simplemente en $U(r)$ para una fuerza central anclada en el origen. La dependencia con respecto a ϕ puede aislarse multiplicando cada término por $r^2\operatorname{sen}^2\theta$ para obtener, luego de reordenar términos,

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=-\operatorname{sen}^2\theta\left\{\frac{r^2}{R}\left[\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right]+\frac{1}{\Theta}\left[\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right]+\frac{2mr^2}{\hbar^2}[E-U(r)]\right\} \quad (8.12)$$

De esta forma, el lado izquierdo es una función sólo de ϕ, mientras que el lado derecho depende sólo de r y θ. Debido a que estas variables son independientes, la igualdad de ambos lados requiere que cada uno se reduzca a una constante. Siguiendo las normas establecidas, esta constante de separación se escribe como $-m_\ell^2$ donde, m_ℓ es el **número cuántico magnético.**[4]

Al igualar el lado izquierdo de la ecuación 8.12 con $-m_\ell^2$ se obtiene una ecuación para $\Phi(\phi)$:

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=-m_\ell^2\Phi(\phi) \quad (8.13)$$

Una solución de la ecuación 8.13 es $\Phi(\phi)=\exp(im_\ell\phi)$; ésta es periódica, con un periodo 2π si m_ℓ se restringe a valores enteros. La periodicidad es necesaria aquí ya que todas las propiedades físicas que se derivan de la función de onda deben permanecer sin cambio al hacer la sustitución $\phi\rightarrow\phi+2\pi$, donde ambos describen el mismo punto en el espacio (vea la figura 8.5).

Al igualar el lado derecho de la ecuación 8.12 con $-m_\ell^2$ después de reordenar los términos se obtiene

$$\frac{r^2}{R}\left[\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right]+\frac{2mr^2}{\hbar^2}[E-U(r)]=-\frac{1}{\Theta}\left[\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right]+\frac{m_\ell^2}{\operatorname{sen}^2\theta} \quad (8.14)$$

En esta ecuación las variables r y θ están separadas, el lado izquierdo es una función sólo de r y el lado derecho es una función sólo de θ. De nuevo, cada lado debe reducirse a una constante. Con lo anterior se obtienen dos ecuaciones más, una para cada una de las funciones restantes $R(r)$ y $\Theta(\theta)$, y se

[4]Esta aparentemente peculiar forma de escribir el multiplicador constante se basa en el significado físico de la función $\Phi(\phi)$ y se analiza con bastante detalle en la sección 8.4 (opcional). Aquel que esté interesado en el tema deberá consultar esa sección, donde se encuentra un tratamiento conciso del problema de la fuerza central cuántica basado en los métodos del operador que presentamos en la sección 6.8.

introduce una segunda constante de separación, que se escribe como $\ell(\ell + 1)$. Para igualar el lado derecho de la ecuación 8.14 con $\ell(\ell + 1)$ se requiere que $\Theta(\theta)$ cumpla

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \cot\theta \frac{d\Theta}{d\theta} - m_\ell^2 \csc^2\theta\Theta(\theta) = -\ell(\ell + 1)\Theta(\theta) \qquad (8.15)$$

ℓ se denomina **número cuántico orbital.** Para que $\psi(\mathbf{r})$ sea una función de onda aceptable, $\Theta(\theta)$ también debe estar acotada y ser monovaluada, condiciones que se cumplen para funciones que satisfacen la ecuación 8.15 sólo si ℓ es un entero no negativo y, entonces, sólo si m_ℓ está limitado a valores absolutos no mayores que ℓ. Las soluciones resultantes $\Theta(\theta)$ son polinomios en $\cos\theta$ conocidos como **polinomios de Legendre asociados.** Para tener una fácil referencia, en la tabla 8.2 se enumeran algunos de estos polinomios. Los productos $\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ especifican la dependencia angular completa de la función de onda de la fuerza central, se conocen como **armónicos esféricos** y se denotan por $Y_\ell^{m_\ell}(\theta, \phi)$. En la tabla 8.3 se proporcionan algunos armónicos esféricos. Las constantes que constituyen en el primer factor se escogen para normalizar estas funciones.[5]

Tabla 8.2 Algunos polinomios asociados de Legendre $P_\ell^{m_\ell}(\cos\theta)$

$P_0^0 = 1$
$P_1^0 = 2\cos\theta$
$P_1^1 = \operatorname{sen}\theta$
$P_2^0 = 4(3\cos^2\theta - 1)$
$P_2^1 = 4\operatorname{sen}\theta\cos\theta$
$P_2^2 = \operatorname{sen}^2\theta$
$P_3^0 = 24(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$
$P_3^1 = 6\operatorname{sen}\theta(5\cos^2\theta - 1)$
$P_3^2 = 6\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta$
$P_3^3 = \operatorname{sen}^3\theta$

Tabla 8.3 Los armónicos esféricos $Y_\ell^{m_\ell}(\theta, \phi)$

$Y_0^0 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$
$Y_1^0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot \cos\theta$
$Y_1^{\pm1} = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot e^{\pm i\phi}$
$Y_2^0 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}} \cdot (3\cos^2\theta - 1)$
$Y_2^{\pm1} = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta \cdot e^{\pm i\phi}$
$Y_2^{\pm2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cdot \operatorname{sen}^2\theta \cdot e^{\pm 2i\phi}$
$Y_3^0 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{7}{\pi}} \cdot (5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$
$Y_3^{\pm1} = \mp\frac{1}{8}\sqrt{\frac{21}{\pi}} \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot (5\cos^2\theta - 1) \cdot e^{\pm i\phi}$
$Y_3^{\pm2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{105}{2\pi}} \cdot \operatorname{sen}^2\theta \cdot \cos\theta \cdot e^{\pm 2i\phi}$
$Y_3^{\pm3} = \mp\frac{1}{8}\sqrt{\frac{35}{\pi}} \cdot \operatorname{sen}^3\theta \cdot e^{\pm 3i\phi}$

[5]La normalización es tal que la integral de $|Y_\ell^{m_\ell}|^2$ sobre la superficie de una esfera con radio unitario es igual a 1.

Prosiguiendo con las observaciones anteriores, las constantes de separación $\ell(\ell + 1)$ y m_ℓ deben relacionarse con las observables nítidas $|\mathbf{L}|$, L_z y E para fuerzas centrales. La relación se establece con los razonamientos más detallados que se presentan en la sección 8.4, con el resultado

El momento angular y su componente z están cuantizadas

$$|\mathbf{L}| = \sqrt{\ell(\ell + 1)}\hbar \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots$$
$$L_z = m_\ell \hbar \qquad m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \ell \tag{8.16}$$

Se observa que la restricción sobre el número cuántico magnético m_ℓ a valores entre $-\ell$ y $+\ell$, que se obtienen con bases puramente matemáticas a partir de variables de separación, tiene una interpretación física evidente: ¡la componente z del momento angular, L_z, jamás debe exceder la magnitud del vector, $|\mathbf{L}|$! Observe, también, que ℓ y m_ℓ son números cuánticos sólo para el momento angular; su relación con la energía E de la partícula debe depender de la función de energía potencial $U(r)$ y está prescrita junto con la función de onda radial $R(r)$ en la etapa final del procedimiento de separación.

Para obtener $R(r)$, se vuelve a la ecuación 8.14 y el lado izquierdo se iguala con $\ell(\ell + 1)$. Volviendo a reordenar los términos, se encuentra que $R(r)$ debe cumplir

Ecuación de onda radial

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right] + \frac{\ell(\ell + 1)\hbar^2}{2mr^2}R(r) + U(r)R(r) = ER(r) \tag{8.17}$$

Ésta, es la **ecuación de onda radial** determina la parte radial de la función de onda ψ y las energías E permitidas de la partícula. Debido a que la ecuación contiene el número cuántico orbital ℓ, se espera que cada orbital de momento angular origine una onda radial diferente y una energía distinta. En contraste, el número cuántico magnético m_ℓ no aparece en ninguna parte de esta ecuación. Así, la onda radial y la energía de la partícula permanecen iguales para los diferentes valores de m_ℓ consistentes con un valor dado de ℓ. En particular, **para un ℓ fijo la energía E de la partícula es independiente de m_ℓ, y de esta forma es por lo menos $2\ell + 1$ veces degenerada.** Esta degeneración —una propiedad de todas las fuerzas centrales— surge de la simetría esférica del potencial e ilustra nuevamente la profunda relación entre la simetría y la degeneración de los estados cuánticos.

La reducción a partir de la ecuación de Schrödinger a la ecuación de onda radial representa un avance enorme y es válida para cualquier fuerza central. Sin embargo, la tarea de resolver esta ecuación para un potencial específico $U(r)$ es difícil, y a menudo requiere métodos bastante sofisticados. En la sección 8.5 se aborda esta tarea para el caso importante del electrón en el átomo de hidrógeno.

EJEMPLO 8.4 Número cuántico orbital para una piedra

Una piedra de 1 kg de masa se hace girar en un círculo horizontal de 1 m de radio con un periodo de revolución igual a 1 s. ¿Qué valor del número cuántico orbital ℓ describe este movimiento?

Solución La velocidad de la piedra en su órbita es

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi(1\text{ m})}{1\text{ s}} = 6.28\text{ m/s}$$

La magnitud del momento angular correspondiente es

$$|\mathbf{L}| = mvR = (1\text{ kg})(6.28\text{ m/s})(1\text{ m})$$
$$= 6.28\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$

Pero el momento angular está cuantizado como $\sqrt{\ell(\ell + 1)}\hbar$, que es aproximadamente $\ell\hbar$ cuando ℓ es grande. Así,

$$\ell \approx \frac{|\mathbf{L}|}{\hbar} = \frac{6.28\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}}{1.055 \times 10^{-34}\text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}} = 5.96 \times 10^{34}$$

De nuevo, se observa que los objetos macroscópicos están descritos por números cuánticos enormes, de modo que a esta escala la cuantización no es evidente.

EJEMPLO 8.5 Una revisión del átomo de Bohr

Analice la cuantización del momento angular en el modelo de Bohr. ¿Qué número cuántico orbital describe al electrón en la primera órbita de Bohr del hidrógeno?

Solución El momento angular en el átomo de Bohr se cuantiza según el postulado de Bohr

$$|\mathbf{L}| = mvr = n\hbar$$

con $n = 1$ para la primera órbita de Bohr. Al comparar esto con el resultado de la mecánica cuántica, ecuación 8.14, se ve que ¡las dos reglas son incompatibles! La magnitud $|\mathbf{L}|$ jamás puede ser un múltiplo entero de $\hbar$: el mínimo valor diferente de cero consistente con la ecuación 8.16 es $|\mathbf{L}| = \sqrt{2}\hbar$ para $\ell = 1$.

Con imparcialidad para Bohr, debe señalarse que su modelo no diferencia entre la cuantización de **L** y la cuantización de sus componentes a lo largo de los ejes coordenados. Desde el punto de vista clásico, el sistema de coordenadas siempre puede orientarse de modo que quede alineado con uno de los ejes, por ejemplo el eje z a lo largo de la dirección de **L**. En ese caso, **L** puede identificarse con $|L_z|$. El postulado de Bohr en esta forma coincide con la cuantización de L_z en la ecuación 8.16 ¡e indica $\ell = 1$ para la primera órbita de Bohr! Este resultado contradictorio resulta de una aseveración falsa; a saber, que es posible orientar un eje coordenado a lo largo de la dirección **L**. ¡La liberad de hacer esto debe abandonarse si las reglas de cuantización de la ecuación 8.16 son correctas! Esta sorprendente conclusión es uno de los grandes misterios de la física cuántica y está implícita en el concepto de cuantización del espacio que se estudiará en la siguiente sección.

8.3 CUANTIZACIÓN DEL ESPACIO

Para funciones de onda que satisfacen tanto la ecuación 8.13 y 8.15, la magnitud del momento angular orbital $|\mathbf{L}|$, y L_z, la proyección de **L** a lo largo del eje z, son nítidas y están cuantizadas según las condiciones impuestas por los números cuánticos orbital y magnético, respectivamente. Juntos, ℓ y m_ℓ especifican la orientación del vector de momento angular **L**. El hecho de que la dirección de **L** esté cuantizada con respecto a un eje arbitrario (el eje z) se denomina **cuantización del espacio.**

A continuación se estudiarán las posibles orientaciones de **L** para un valor dado del número cuántico orbital ℓ. Recuerde que m_ℓ puede tomar valores que varían de $-\ell$ hasta $+\ell$. Si $\ell = 0$, entonces $m_\ell = 0$ y $L_z = 0$. De hecho, para este caso $|\mathbf{L}| = 0$, de modo que todas las componentes de **L** son 0. Si $\ell = 1$, entonces los valores positivos de m_ℓ son -1, 0 y $+1$, por lo que L_z puede ser $-\hbar$, 0 o $+\hbar$, Si $\ell = 2$, m_l puede ser -2, -1, 0, $+1$ o $+2$, lo cual corresponde a valores de L_z iguales a $-2\hbar$, $-\hbar$, 0, $+\hbar$ o $+2\hbar$, etc. En la figura 8.7a se muestra una visualización clásica del álgebra que describe la cuantización del espacio para el caso $\ell = 2$. Observe que **L** jamás puede alinearse con el eje z, ya que L_z debe ser menor que la magnitud del momento angular total L. Desde una perspectiva tridimensional, **L** debe estar en la superficie de un cono que forma un ángulo θ con el eje z, como se muestra en la figura 8.7b. A partir de la figura se observa que θ también está cuantizado y que sus valores están dados por la relación

$$\cos\theta = \frac{L_z}{|\mathbf{L}|} = \frac{m_\ell}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \tag{8.18}$$

Las orientaciones de L están restringidas (cuantizadas)

Desde el punto de vista clásico, θ puede tomar cualquier valor; es decir, el vector de momento angular **L** puede apuntar en cualquier dirección. Según la mecánica cuántica, las orientaciones posibles de **L** son aquellas que están de acuerdo con la ecuación 8.18. Además, estas direcciones especiales no tienen nada que ver con las fuerzas que actúan sobre la partícula, suponiendo sólo

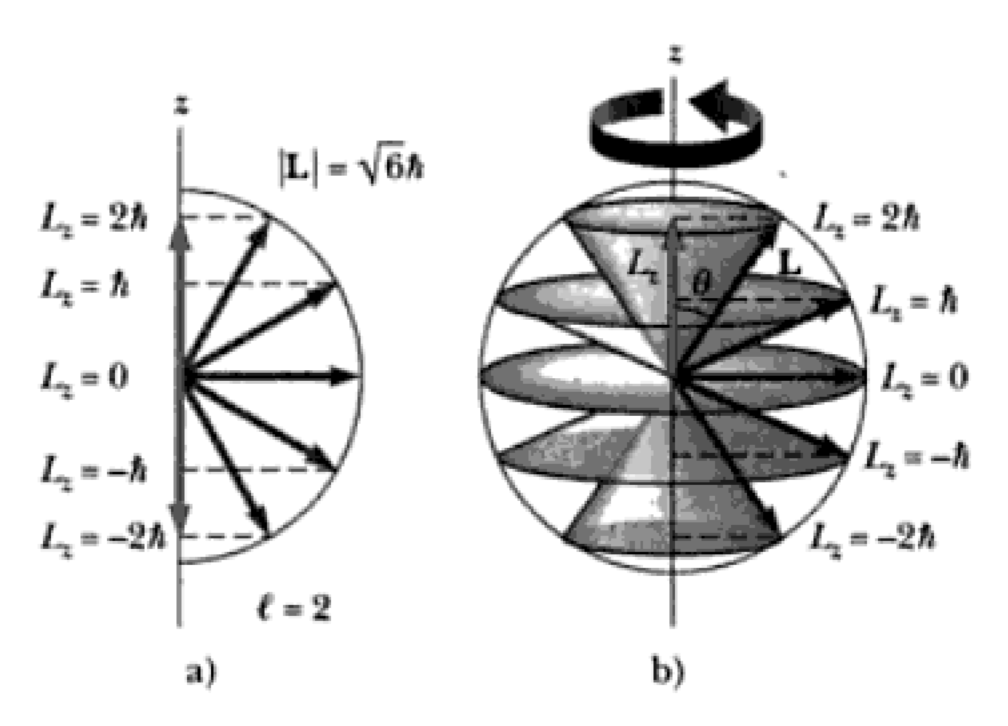


Figura 8.7 a) Proyecciones permitidas del momento angular orbital para el caso $\ell = 2$. b) Desde una perspectiva tridimensional, el vector de momento angular orbital **L** está sobre la superficie de un cono. El carácter vago de L_x y L_y puede describirse si permitimos que **L** preceda alrededor del eje *z*, de modo que L_x y L_y cambien continuamente mientras L_z mantiene el valor fijo $m_\ell \hbar$.

que éstas sean centrales. Así, **la regla de la ecuación 8.18 no tiene su origen en la ley de fuerza, sino que se deduce a partir de la estructura del espacio en sí;** de ahí el nombre *cuantización del espacio.*

La figura 8.7 es engañosa en cuanto a mostrar **L** con una dirección específica, para la cual las tres *componentes* L_x, L_y y L_z se conocen con exactitud. Como ya se mencionó, no existe ningún estado cuántico en el que esta condición sea cierta. Si L_z es nítida, entonces L_x y L_y deben ser vagas. Por consiguiente, es más apropiado visualizar el vector **L** de la figura 8.7b como si tuviera un movimiento de precesión alrededor del eje *z* que trazara el perfil de un cono en el espacio. Esto permite que las componentes L_x y L_y cambien de manera continua mientras L_z mantiene el valor fijo $m_\ell \hbar$.[6]

EJEMPLO 8.6 Cuantización del espacio para un electrón atómico

Considere un electrón atómico en el estado $\ell = 3$. Calcule la magnitud $|\mathbf{L}|$ del momento angular total y los valores permitidos de L_z y θ.

Solución Con $\ell = 3$, la ecuación 8.16 proporciona

$$|\mathbf{L}| = \sqrt{3(3+1)}\,\hbar = 2\sqrt{3}\,\hbar$$

Los valores permitidos de L_z son $m_\ell \hbar$, con $m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2$ y ± 3. Así, se obtiene

$$L_z = -3\hbar, -2\hbar, -\hbar, 0, \hbar, 2\hbar, 3\hbar$$

Por último se obtienen los valores permitidos de θ a partir de

$$\cos\theta = \frac{L_z}{|\mathbf{L}|} = \frac{m_\ell}{2\sqrt{3}}$$

Al sustituir los valores para m_ℓ se obtiene

$$\cos\theta = \pm 0.866, \quad \pm 0.577, \quad \pm 0.289 \quad \text{y} \quad 0$$

o bien

$$\theta = \pm 30°, \quad \pm 54.8°, \quad \pm 73.2° \quad \text{y} \quad 90°$$

[6]Sólo se pretende que el carácter de esta precesión del vector clásico para retratar la vaguedad inherente en L_x y L_y sea sugerente. En efecto, los promedios cuánticos $\langle L_x \rangle$ y $\langle L_y \rangle$ con sus promedios sobre *el tiempo* han sido identificados en una representación clásica, aunque de hecho ambas formas de promediar son muy distintas.

Ejercicio 3 Compare los ángulos mínimos entre **L** y el eje z para el electrón del ejemplo 8.6 y para la piedra de 1 kg del ejemplo 8.4.

Respuesta 30° para el electrón, aunque sólo 2.3×10^{-16} grados para la piedra.

8.4 CUANTIZACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR Y DE LA ENERGÍA

OPCIONAL

En la sección 8.2 se vio que el momento angular desempeña un papel esencial en la cuantización de sistemas que poseen simetría esférica. Aquí se proporciona un desarrollo adicional de las propiedades del momento angular desde el punto de vista de la mecánica cuántica y se muestra con más detalle cómo las consideraciones del momento angular facilitan la solución de la ecuación de Schrödinger para fuerzas centrales.

El tratamiento aquí presentado se basa en los métodos del operador presentados en la sección 6.8, que el lector debe revisar en este momento. En particular, la condición de la función propia

$$[Q]\Psi = q\Psi \tag{8.19}$$

utilizada ahí como una *prueba* para observables nítidas se transforma aquí en una herramienta para descubrir la forma de la función de onda incógnita Ψ. (Recuerde que $[Q]$ denota el operador para algúna observable Q y que q es el valor nítido de esa observable cuando se mide en un sistema descrito por la función de onda Ψ.) Ahora la ecuación 8.19 se considera como una *restricción* impuesta sobre la función de onda Ψ que garantiza que el observable Q asuma el valor nítido q en ese estado. Mientras más observables nítidas sea posible identificar para algún sistema, más se puede aprender de antemano acerca de la función de onda que describe ese sistema. **Con pocas excepciones, las observables nítidas son justo aquellas que son constantes el movimiento clásico.** (Consulte la nota de pie de página 1.)

Considere la energía de la partícula. Si la energía total es constante, debe ser posible encontrar funciones de onda Ψ para las cuales E es una observable nítida. En caso contrario, mediciones repetidas realizadas en sistemas idénticos revelarían una distribución estadística de valores para la energía de la partícula, lo cual es inconsistente con la idea de una cantidad que no cambia con el tiempo. Así, la conservación de la energía sugiere $\Delta E = 0$ lo que, a su vez, requiere que Ψ sea una función propia del operador de energía

$$[E]\Psi = E\Psi$$

Debido a que $[E] = i\hbar\, \partial/\partial t$, esta condición de valor propio la cumplen las ondas estacionarias $\psi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, donde $E = \hbar\omega$ es el valor nítido de la energía de la partícula.

El razonamiento para la energía también es válido para otras constantes del movimiento clásico.[7] Si las únicas fuerzas son centrales, el momento angular alrededor del centro de fuerza es una constante del movimiento. Ésta es una cantidad vectorial $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, cuyas componentes rectangulares están expresadas en términos de las componentes de posición y cantidad de movimiento como

$$L_z = (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_z = xp_y - yp_x$$

y así sucesivamente. De la misma forma, los *operadores* para el momento angular se encuentran a partir de los *operadores* de coordenadas y la cantidad de movimiento. Por el capítulo 6, el operador para x es justo la coordenada en sí, y el operador de la

[7]Para esta regla hay excepciones. Por ejemplo, un electrón atómico no puede tener a la vez las tres componentes nítidas del momento angular, aun cuando en este caso todas las componentes son constantes desde el punto de vista clásico. Para tales observables *incompatibles*, la mecánica cuántica adopta la interpretación más amplia de una cantidad conservada como aquella donde el *valor medio no cambia con el tiempo*, sin importar cuál sea el estado inicial del sistema. Con esta definición, todas las componentes del momento angular para un electrón atómico permanecen constantes, aunque sólo una puede ser nítida en un estado dado.

cantidad de movimiento en esta dirección es $(\hbar/i)\ \partial/\partial x$. Relaciones semejantes deben cumplirse para las direcciones identificadas como y y z,[8] de modo que el operador para L_z se convierte en

$$[L_z] = [x][p_y] - [y][p_x] = \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{8.20}$$

El momento angular encuentra su expresión natural en las coordenadas esféricas de la figura 8.5. Un poco de geometría aplicada a la figura 8.5 muestra que las ecuaciones de transformación de coordenadas esféricas a coordenadas cartesianas son

$$\begin{aligned} z &= r\cos\theta \\ x &= r\,\text{sen}\,\theta\cos\phi \\ y &= r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi \end{aligned} \tag{8.21}$$

Las transformaciones inversas son

$$\begin{aligned} r &= \{x^2 + y^2 + z^2\}^{1/2} \\ \cos\theta &= \frac{z}{r} = z\{x^2 + y^2 + z^2\}^{-1/2} \\ \tan\phi &= \frac{y}{x} \end{aligned} \tag{8.22}$$

El procedimiento para transcribir operadores como $[L_z]$ de forma cartesiana a forma esférica es directa, aunque tediosa. Por ejemplo, al aplicar una vez la regla de la cadena se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial \phi}$$

para cualquier función f. A la izquierda se considera que f está expresada como una función de x, y, z, pero a la derecha la misma función está expresada en términos de r, θ, ϕ. Las derivadas parciales $\partial r/\partial z$, etc., deben tomarse con auxilio de las ecuaciones de transformación, manteniendo fijas a x y y. La más simple de éstas es $\partial\phi/\partial z$. A partir de las transformaciones inversas en las ecuaciones 8.22, se observa que ϕ es independiente de z, de modo que $\partial\phi/\partial z = 0$. A partir de las mismas ecuaciones se encuentra que

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{1}{2}\{x^2 + y^2 + z^2\}^{-1/2}(2z) = \frac{z}{r} = \cos\theta$$

Para obtener $\partial\theta/\partial z$ se deriva implícitamente la segunda de las ecuaciones 8.22 para obtener

$$-\text{sen}\,\theta\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\partial\{\cos\theta\}}{\partial z} = z(-\tfrac{1}{2})\{x^2 + y^2 + z^2\}^{-3/2}(2z) + \{x^2 + y^2 + z^2\}^{-1/2}$$

Al volver a convertir el lado derecho a coordenadas esféricas se obtiene

$$-\text{sen}\,\theta\frac{\partial\theta}{\partial z} = -\frac{(r\cos\theta)^2}{r^3} + \frac{1}{r} = \frac{1-\cos^2\theta}{r} = \frac{\text{sen}^2\,\theta}{r}$$

o bien, $\partial\theta/\partial z = -\text{sen}\,\theta/r$. Al reunir los resultados anteriores se tiene

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\theta} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\text{sen}\,\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

[8]Para el operador de la cantidad de movimiento a lo largo de cada eje se utiliza la forma unidimensional que se proporcionó en el capítulo 6, ($[p_x] = (\hbar/i)\partial/\partial x$, etc.), la cual es consistente con la convicción de que los ejes cartesianos identifican direcciones espaciales independientes pero lógicamente equivalentes.

De igual manera, es posible obtener representaciones esféricas para $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ y, finalmente, para los operadores mismos del momento angular:

$$[L_x] = i\hbar\left\{\operatorname{sen}\phi\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right\}$$

$$[L_y] = -i\hbar\left\{\cos\phi\,\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\operatorname{sen}\phi\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right\} \tag{8.23}$$

$$[L_z] = -i\hbar\,\frac{\partial}{\partial\phi}$$

Observe que los operadores de momento angular en forma esférica no contienen la coordenada radial r, ¡nuestra recompensa por haber elegido el sistema de coordenadas idóneo! Al insistir en que el momento angular sea nítido en el estado cuántico Ψ, y utilizando las formas diferenciales (ecuaciones 8.23) para los operadores de momento angular, es posible encontrar cómo la función de onda depende de los ángulos esféricos θ y ϕ *sin que se conozcan los detalles de la fuerza central.*

L_z es nítida: el número cuántico magnético

Para que L_z sea nítida, la función de onda $\Psi = \psi(r)e^{-i\omega t}$ debe ser una función propia de $[L_z]$, o bien,

$$-i\hbar\,\frac{\partial\psi}{\partial\phi} = L_z\psi \tag{8.24}$$

donde L_z es el valor propio (un número). La ecuación 8.24 expresa que la dependencia funcional de ψ con el ángulo azimutal ϕ es

$$\psi(\mathbf{r}) = Ce^{iL_z\phi/\hbar} \tag{8.25}$$

donde C sigue siendo cualquier función de r y θ. No obstante, deben restringirse los valores que L_z toma. Debido a que el efecto de incrementar ϕ por 2π radianes es volver al mismo punto espacial (vea la figura 8.5), la función de onda también debe regresar a su valor inicial; es decir, las soluciones representadas por la ecuación 8.25 deben ser periódicas en ϕ con periodo 2π. Esto se cumple si $L_z/\hbar$ es cualquier entero, por ejemplo, m_ℓ o $L_z = m_\ell\hbar$. El número cuántico magnético m_ℓ indica el valor (nítido) para la componente z del momento angular en el estado descrito por Ψ.

Debido a que todas las componentes de **L** son constantes para fuerzas centrales, se sigue requiriendo que la función de onda de la ecuación 8.25 también sea una función propia del operador para una segunda componente del momento angular, por ejemplo, $[L_x]$, de modo que L_z y L_x podrían ser ambas nítidas en el estado ψ. Para que ψ sea una función propia de $[L_x]$ con valor propio L_x, se requiere

$$i\hbar\left\{\operatorname{sen}\phi\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\,\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right\} = L_x\psi$$

Esta relación debe cumplirse para todos los valores de θ y ϕ. En particular, el requisito para $\theta = 0$ es

$$i\hbar\cot\theta\,\frac{\partial\psi}{\partial\phi} = L_x\psi$$

Debido a que Ψ varía exponencialmente con ϕ, según la ecuación 8.25, la derivada indicada puede tomarse y evaluarse en $\phi = 0$ para obtener

$$(-L_z\cot\theta)\,\psi = L_x\psi$$

que puede cumplirse para *toda* θ, sólo si $L_x = L_z = 0$ o si ψ se hace cero. Una dificultad semejante se presenta si trata de hacer que L_y sea nítida junto con L_z. Por consiguiente, **a menos que el momento angular sea exactamente cero (todas**

las componentes), ¡no hay ninguna función de onda para la que dos o más componentes sean nítidas en forma simultánea!

$|\mathbf{L}|$ es nítida: el número cuántico orbital

Para avanzar aún más, es necesario considerar otras constantes del movimiento clásico. Además de cada componente del momento angular, la magnitud $|\mathbf{L}|$ del vector también es constante y se convierte en candidata para ser una observable que pueda hacerse nítida junto con L_z. Considere simplemente la magnitud al cuadrado $L^2 = \mathbf{L}\cdot\mathbf{L}$. El operador para L^2 es

$$[L]^2 = [L_x]^2 + [L_y]^2 + [L_z]^2$$

Al usar las ecuaciones 8.23, se encuentra la forma para $[L^2]$ en coordenadas esféricas:

$$[L^2] = -\hbar^2\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \csc^2\theta\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right\} \tag{8.26}$$

Para que L^2 sea nítida se requiere $[L^2]\psi = |\mathbf{L}|^2\psi$, o bien,

$$-\hbar^2\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \csc^2\theta\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right\} = |\mathbf{L}|^2\psi$$

Pero por la ecuación 8.24 se observa que derivar ψ con respecto a ϕ equivale a multiplicar por $iL_z/\hbar = im_\ell$, de modo que la última ecuación se reduce a

$$-\hbar^2\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta} - m_\ell^2\csc^2\theta\psi\right\} = |\mathbf{L}|^2\psi \tag{8.27}$$

Para funciones de onda que cumplen la ecuación 8.27, la magnitud del momento angular es nítida con valor $|\mathbf{L}|$. La ecuación describe la dependencia de ψ con respecto al ángulo polar θ. Las soluciones no son funciones elementales, aunque es posible investigarlas aplicando técnicas más avanzadas. Los resultados de tal investigación se reportan en la sección 8.2 y se repiten aquí para obtener una visión más completa es posible encontrar soluciones físicamente aceptables de la ecuación 8.27 en el supuesto de que $|\mathbf{L}| = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar$, donde ℓ, el número cuántico orbital, debe ser un entero no negativo. Además, el número cuántico magnético, que también aparece en la ecuación 8.27, debe limitarse como $|m_\ell| \leq \ell$. Con estas restricciones, las soluciones de la ecuación 8.27 son los polinomios asociados de Legendre en cos θ, denotados por $P_\ell^{m_\ell}(\cos\theta)$. Para facilitar su consulta, en la tabla 8.2 se enumeran varios de estos polinomios; usted puede comprobar por sustitución directa que cumplen la ecuación 8.27 para los valores apropiados de ℓ y m_ℓ.

Los polinomios asociados de Legendre pueden multiplicarse por $\exp(im_\ell\phi)$ y seguir cumpliendo la ecuación orbital 8.27. En efecto, los productos $P_\ell^{m_\ell}(\cos\theta)$ satisfacen tanto la ecuación 8.24 como la 8.27; así, representan ondas para las cuales $|\mathbf{L}|$ y L_z son simultáneamente nítidas. Excepto por una constante multiplicativa, éstos son justo los armónicos esféricos $Y_\ell^{m_\ell}(\theta, \phi)$ que se presentaron en la sección 8.2.

E es nítida: la ecuación de onda radial

Para que la energía sea constante, E debe ser una observable nítida. La función de estado estacionario $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ resulta de imponer la condición de valor propio para el operador de energía $[E]$; pero, ¿qué ocurre con el otro operador de energía $[H] = [K] + [U]$ (el hamiltoniano)? De hecho, pedir que $[H]\Psi = E\Psi$ equivale a escribir la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para $\psi(\mathbf{r})$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + U(\mathbf{r})\psi = E\psi \tag{8.28}$$

debido a que $[U] = U(\mathbf{r})$, el operador de energía cinética $[K]$ en tres dimensiones no es otro sino

$$[K] = \frac{[p_x]^2 + [p_y]^2 + [p_z]^2}{2m} = \frac{(\hbar/i)^2[(\partial/\partial x)^2 + (\partial/\partial y)^2 + (\partial/\partial z)^2]}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$$

La función esférica del laplaciano que se proporcionó en la sección 8.2 puede usarse para escribir $[K]$ en coordenadas esféricas:

$$[K] = -\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \csc^2\theta\,\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]\right\}$$

Al comparar esto con la representación esférica para $[L^2]$ a partir de la ecuación 8.26, se demuestra que $[K]$ es la suma de dos términos,

$$[K] = [K_{\text{rad}}] + [K_{\text{orb}}] = [K_{\text{rad}}] + \frac{1}{2mr^2}[L^2] \tag{8.29}$$

que representan las contribuciones por separado a la energía cinética, dibidas a las componentes orbital y radial de movimiento. La comparación también proporciona la forma esférica de $[K_{\text{rad}}]$:

$$[K_{\text{rad}}] = -\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right\} \tag{8.30}$$

Estas expresiones para $[K]$ son completamente generales. Cuando se aplican a ondas para las cuales $|\mathbf{L}|$ es nítida, no obstante, el *operador* $[L^2]$ puede sustituirse por el *número* $|\mathbf{L}|^2 = \ell(\ell + 1)\hbar^2$. Por consiguiente, la ecuación de Schrödinger (ecuación 8.28) se convierte en

$$[K_{\text{rad}}]\psi(\mathbf{r}) + \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2}\psi(\mathbf{r}) + U(r)\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \tag{8.31}$$

Para fuerzas centrales, todos los términos en esta ecuación, incluyendo a $U(r)$, sólo implican la coordenada esférica r: ¡las variables angulares θ y ϕ ya se han eliminado al imponer el requisito de que ψ sea una función propia de $[L^2]$! Se concluye que las soluciones de la ecuación 8.31 toman la forma de una onda radial $R(r)$ multiplicada por un armónico esférico:

$$\psi(\mathbf{r}) = R(r)\,Y_\ell^{m_\ell}(\theta, \phi) \tag{8.32}$$

El armónico esférico puede separarse de cada término de la ecuación 8.31, sustituyendo $\psi(\mathbf{r})$ por $R(r)$. El resultado es justo la ecuación de onda radial de la sección 8.2; ésta determina la función de onda radial $R(r)$ y las energías E permitidas de la partícula, una vez que se ha especificado la función de energía potencial $U(r)$.

8.5 EL ÁTOMO DE HIDRÓGENO-IONES HIDROGENOIDES

En esta sección se estudia el átomo de hidrógeno desde el punto de vista de la mecánica cuántica. Su sencillez hace del átomo de hidrógeno el elemento de prueba idóneo para comparar la teoría con la experimentación. Además, el átomo de hidrógeno es el sistema prototipo para los numerosos iones y átomos complejos de los elementos más pesados. En efecto, nuestro estudio del átomo de hidrógeno permite, en última instancia, comprender la tabla periódica de los elementos, uno de los mayores triunfos de la física cuántica.

El objeto de interés es el electrón en órbita (con su masa m y carga $-e$), atrapado por la fuerza de atracción electrostática en el núcleo (con su masa mucho mayor M y carga $+Ze$), donde Z es el número atómico. La elección $Z = 1$

describe al átomo de hidrógeno, mientras que para el helio simplemente ionizado (He^+) y para el litio doblemente ionizado (Li^{2+}), se toma $Z = 2$ y $Z = 3$, respectivamente. A aquellos iones que sólo tienen un electrón, como He^+ y Li^{2+}, se les conoce como **hidrogenoides.** Debido a que $M >> m$, se supondrá que el núcleo no se mueve, sino que simplemente ejerce la fuerza de atracción que liga al electrón. Ésta es la fuerza de Coulomb, cuya energía potencial asociada es

$$U(r) = \frac{k(+Ze)(-e)}{r} = -\frac{kZe^2}{r} \tag{8.33}$$

donde k es la constante de Coulomb.

El átomo de hidrógeno constituye un problema de fuerza central; según la sección 8.2, los estados estacionarios para cualquier fuerza central son

$$\Psi(r, \theta, \phi, t) = R(r) Y_\ell^{m_\ell}(\theta, \phi) e^{-i\omega t} \tag{8.34}$$

donde $Y_\ell^{m_\ell}(\theta, \phi)$ es un armónico esférico de la tabla 8.3. La función de onda radial $R(r)$ se encuentra a partir de la ecuación de onda radial de la sección 8.2,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right] + \frac{\ell(\ell + 1)\hbar^2}{2mr^2}R(r) + U(r)R(r) = ER(r) \tag{8.17}$$

$U(r)$ es la energía potencial de la ecuación 8.33. Los demás términos en la izquierda de la ecuación 8.17 están asociados con la energía cinética del electrón. El término proporcional a $\ell(\ell + 1)\hbar^2 = \langle|\mathbf{L}^2|\rangle$ es la contribución orbital a la energía cinética, K_{orb}. Para ver esto, considere una partícula en órbita circular, donde toda la energía cinética está en forma orbital (ya que la distancia al centro permanece fija). Para tal partícula, $K_{orb} = \frac{1}{2}mv^2$ y $|\mathbf{L}| = mvr$. Al eliminar la velocidad v de la partícula, se obtiene

$$K_{orb} = \frac{m}{2}\left(\frac{|\mathbf{L}|}{mr}\right)^2 = \frac{|\mathbf{L}|^2}{2mr^2} \tag{8.35}$$

Aunque este resultado se dedujo para órbitas circulares, representa correctamente la contribución orbital a la energía cinética de una masa m en movimiento general, con momento angular **L.**[9]

Las dirivadas en la ecuación 8.17 son la contribución radial a la energía cinética; es decir, representan la contribución proveniente del movimiento del electrón en dirección al núcleo o alejándose de éste. El término en el extremo izquierdo es justo lo que debió escribirse para la energía cinética de una onda de materia $\psi = R(r)$ asociada con movimiento a lo largo de la línea coordenada señalada por r. Pero, ¿qué importancia debe asociarse al primer término de derivada, dR/dr? De hecho, la presencia de este término es evidencia de que *la onda de materia unidimensional efectiva no es R(r), sino rR(r)*. Como sustento de esta afirmación, se observa que

$$\frac{d^2(rR)}{dr^2} = r\left[\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr}\right]$$

Entonces, la ecuación de onda radial escrita para la onda de materia unidimensional efectiva $g(r) = rR(r)$ asume la misma forma que la ecuación de Schrödinger en una dimensión,

[9]Para cualquier órbita plana es posible escribir $|\mathbf{L}| = rp_\perp$, donde $p_\perp$ es la componente de la cantidad de movimiento en el plano orbital que es normal al vector de radio **r.** Así, la parte orbital de la energía cinética es $K_{orb} = p_\perp^2/2m = |\mathbf{L}|^2/2mr^2$.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2g}{dr^2} + U_{\text{eff}}(r)g(r) = Eg(r) \tag{8.36}$$

pero con una *energía potencial efectiva*

$$U_{\text{eff}} = \frac{|\mathbf{L}|^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2mr^2} + U(r) \tag{8.37}$$

La magnitud de $g(r)$ también proporciona probabilidades, como se describirá más adelante en esta sección.

La solución de la ecuación 8.36 con $U(r) = -kZe^2/r$ (para átomos o iones con un electrón) requiere métodos que rebasan el alcance de este texto. Aquí, como antes, se presentan sólo los resultados; su comprobación se deja para el lector interesado. Sólo pueden encontrarse funciones de onda aceptables si se restringe la energía E a uno de los siguientes valores:

$$E_n = -\frac{ke^2}{2a_0}\left\{\frac{Z^2}{n^2}\right\} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{8.38}$$

Energías permitidas para átomos hidrogenoides

Este resultado coincide exactamente con el que se encontró sólo a partir de la teoría de Bohr (consulte el capítulo 4): $a_0 = \hbar^2/m_eke^2$ es el radio de Bohr, 0.529 Å, y $ke^2/2a_0$ es la energía de Rydberg, 13.6 eV. El entero n se denomina **número cuántico principal.** Aunque n puede ser cualquier entero positivo, ahora el número cuántico orbital está limitado a valores menores que n; es decir, ℓ sólo puede tomar los valores

$$\ell = 0, 1, 2, \ldots, (n-1) \tag{8.39}$$

Valores permitidos de ℓ

El corte en $(n-1)$ es consistente con el significado físico de estos números cuánticos: la magnitud del momento angular orbital (determinada por ℓ) no puede hacerse arbitrariamente grande para una energía dada (determinada por n). Un razonamiento semiclásico que expresa esta idea lleva a $\ell_{\text{máx}} = n - 1$ (vea el problema 20). En el mismo sentido, la restricción sobre el número cuántico magnético m_ℓ a valores entre $-\ell$ y $+\ell$ garantiza que la componente z del momento angular jamás exceda la magnitud del vector.

Número cuántico principal n
$n = 1, 2, 3, \ldots$

Número cuántico orbital ℓ
$\ell = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$

Número cuántico magnético m_ℓ
$m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \ell$

Las ondas radiales $R(r)$ para átomos hidrogenoides son el producto de exponenciales con polinomios en r/a_0. Estas funciones de onda radiales están tabuladas como $R_{n\ell}(r)$ en la tabla 8.4 para números cuánticos principales hasta $n = 3$, incluso.

Para átomos hidrogenoides, entonces, los números cuánticos son n, ℓ y m_ℓ, asociados con las observables nítidas E, $|\mathbf{L}|$ y L_z, respectivamente. Observe que la energía E depende de n, y no de ℓ o m_ℓ. La energía es independiente de m_ℓ debido a la simetría esférica del átomo, lo cual se cumple para cualquier fuerza central que varíe sólo con la distancia r. No obstante, el hecho de que E también sea independiente de ℓ es una consecuencia especial de la fuerza de Coulomb, y no es de esperar en átomos más pesados, por ejemplo, donde la fuerza sobre cualquier electrón incluye la repulsión electrostática de los electrones restantes en el átomo, así como la atracción de Coulomb del núcleo.

Por razones históricas, se dice que todos los estados con el mismo número cuántico principal n forman una **capa.** Estas capas se identifican con las letras K, L, M, . . . , que designan los estados para los cuales $n = 1, 2, 3, \ldots$ De manera

Tabla 8.4 Funciones de onda radiales $R_{n\ell}(r)$ de átomos hidrogenoides para $n = 1, 2$ y 3

n	ℓ	$R_{n\ell}(r)$
1	0	$\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} 2e^{-Zr/a_0}$
2	0	$\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2} \left(2 - \frac{Zr}{a_0}\right) e^{-Zr/2a_0}$
2	1	$\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2} \frac{Zr}{\sqrt{3}\,a_0} e^{-Zr/2a_0}$
3	0	$\left(\frac{Z}{3a_0}\right)^{3/2} 2\left[1 - \frac{2Zr}{3a_0} + \frac{2}{27}\left(\frac{Zr}{a_0}\right)^2\right] e^{-Zr/3a_0}$
3	1	$\left(\frac{Z}{3a_0}\right)^{3/2} \frac{4\sqrt{2}}{3} \frac{Zr}{a_0}\left(1 - \frac{Zr}{6a_0}\right) e^{-Zr/3a_0}$
3	2	$\left(\frac{Z}{3a_0}\right)^{3/2} \frac{2\sqrt{2}}{27\sqrt{5}} \left(\frac{Zr}{a_0}\right)^2 e^{-Zr/3a_0}$

semejante, se dice que los estados que poseen el mismo valor tanto de n como de ℓ forman una **subcapa.** Los estados para los cuales $\ell = 0, 1, 2, 3, \ldots$, se designan con las letras *s, p, d, f*, . . .[10] Esta **notación espectroscópica** se resume en la tabla 8.5.

Las energías de la capa (y de la subcapa) para varios de los estados inferiores del átomo de hidrógeno se ilustran en el diagrama de niveles de energía de la figura 8.8. En esa figura también se representan algunas de las muchas transiciones electrónicas posibles en el interior del átomo. Cada una de estas transiciones representa un cambio de energía en el átomo, que debe compensarse por emisión (o absorción) de energía en alguna otra forma. En el caso de **transiciones ópticas,** los fotones transportan la energía excedente, aunque es posible que no ocurran todas las transiciones ópticas que conservan la energía. Aquí, los fotones también transportan momento angular. Para conservar el momento angular *total* (átomo + fotón) en transiciones ópticas, el momento angular del electrón en los estados inicial y final debe diferir exactamente por una unidad; es decir,

Tabla 8.5 Notación espectroscópica para capas y subcapas atómicas

n	Símbolo de la capa	ℓ	Símbolo de la capa
1	*K*	0	*s*
2	*L*	1	*p*
3	*M*	2	*d*
4	*N*	3	*f*
5	*O*	4	*g*
6	*P*	5	*h*
. . .		. . .	

[10] *s, p, d, f* son la primera letra de las palabras en inglés *sharp, principal, diffuse* y *fundamental* (nítido, principal, difuso y fundamental, respectivamente). La nomenclatura es una referencia a los primeros días de las observaciones espectroscópicas, cuando estos términos se utilizaban para caracterizar la aparición de líneas espectrales.

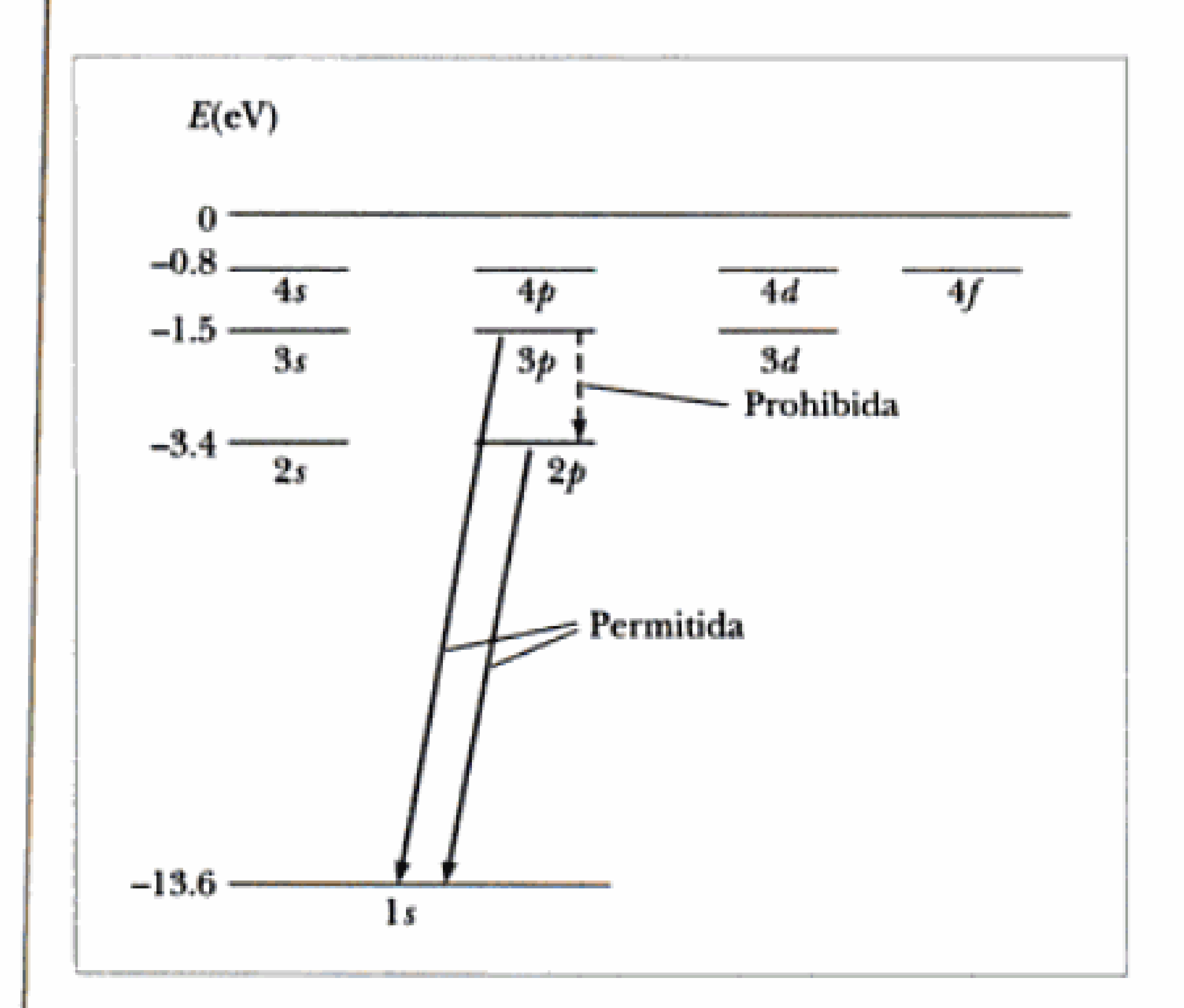


Figura 8.8 Diagrama del nivel energético del hidrógeno atómico. Las transiciones permitidas son aquellas que cumplen la regla de selección $\Delta\ell = \pm 1$. Se dice que la transición $3p \rightarrow 2p$ ($\Delta\ell = 0$) está prohibida, aunque puede ocurrir (pero de manera muy excepcional).

$$|\ell_f - \ell_i| = 1 \qquad \text{o bien,} \qquad \Delta\ell = \pm 1 \tag{8.40}$$

Regla de selección para transiciones permitidas

La ecuación 8.40 expresa una **regla de selección** que debe cumplirse en cualquier transición óptica.[11] Como se indica en la figura 8.8, las transiciones $3p \rightarrow 1s$ y $2p \rightarrow 1s$ **están permitidas** por la regla ($\Delta\ell = -1$), pero se dice que la transición $3p \rightarrow 2p$ **no está permitida** o que está **prohibida** ($\Delta\ell = 0$). (Estas transiciones pueden darse, aunque con una probabilidad despreciable en comparación con la probabilidad de que ocurran transiciones permitidas). Resulta evidente que la regla de selección desempeña un papel fundamental en la interpretación de los espectros atómicos.

EJEMPLO 8.7 El nivel $n = 2$ del hidrógeno

Enumere todos los estados del átomo de hidrógeno que corresponden al número cuántico principal $n = 2$, y proporcione la designación espectroscópica de cada uno. Calcule las energías de estos estados.

Solución Cuando $n = 2$, ℓ puede tomar los valores 0 y 1. Si $\ell = 0$, m_ℓ sólo puede ser cero. Si $\ell = 1$, m_ℓ puede ser −1, 0 o +1. Así, se tiene un estado 2*s* con los números cuánticos

$$n = 2, \qquad \ell = 0, \qquad m_\ell = 0$$

y tres estados 2*p*, para los cuales los números cuánticos son

$$n = 2, \qquad \ell = 1, \qquad m_\ell = -1$$

$$n = 2, \qquad \ell = 1, \qquad m_\ell = 0$$

$$n = 2, \qquad \ell = 1, \qquad m_\ell = +1$$

Debido a que todos estos estados tienen el mismo número cuántico principal, $n = 2$, también poseen la misma energía, que puede calcularse a partir de la ecuación 8.38. Para $Z = 1$ y $n = 2$, se obtiene

$$E_2 = -(13.6 \text{ eV})(1^2/2^2) = -3.4 \text{ eV}$$

[11] También se permite $\Delta\ell = 0$ por consideraciones de momento angular, aunque se prohibe para conservar la paridad. Además, debido a que el momento angular de un fotón es justo $\pm\hbar$, la componente *z* no puede cambiar por más de $\pm\hbar$, lo que origina una *segunda regla de selección*, $\Delta m_\ell = 0, \pm 1$.

Ejercicio 4 ¿Cuántos estados posibles hay para el nivel $n = 3$ del hidrógeno? ¿Y para el nivel $n = 4$?

Respuestas Nueve estados para $n = 3$ y 16 estados para $n = 4$.

El estado base de átomos hidrogenoides

El estado base de un átomo o ion con un electrón, con número atómico Z, para el cual $n = 1$, $\ell = 0$ y $m_\ell = 0$, tiene energía

$$E_1 = -(13.6 \text{ eV}) Z^2 \qquad (8.41)$$

La función de onda para este estado es

$$\psi_{100} = R_{10}(r) Y_0^0 = \pi^{-1/2}(Z/a_0)^{3/2} e^{-Zr/a_0} \qquad (8.42)$$

Las constantes son tales que ψ está normalizada. Observe que ψ_{100} no depende del ángulo, ya que es el producto de una onda radial con $Y_0^0 = 1/\sqrt{4\pi}$. De hecho, todas las ondas con $\ell = 0$ comparten esta característica; es decir, **todas las ondas del estado *s* son esféricamente simétricas.**

El electrón descrito por la función de onda de la ecuación 8.42 se encuentra con una probabilidad por unidad de volumen dada por

$$|\psi_{100}|^2 = \frac{Z^3}{\pi a_0^3} e^{-2Zr/a_0}$$

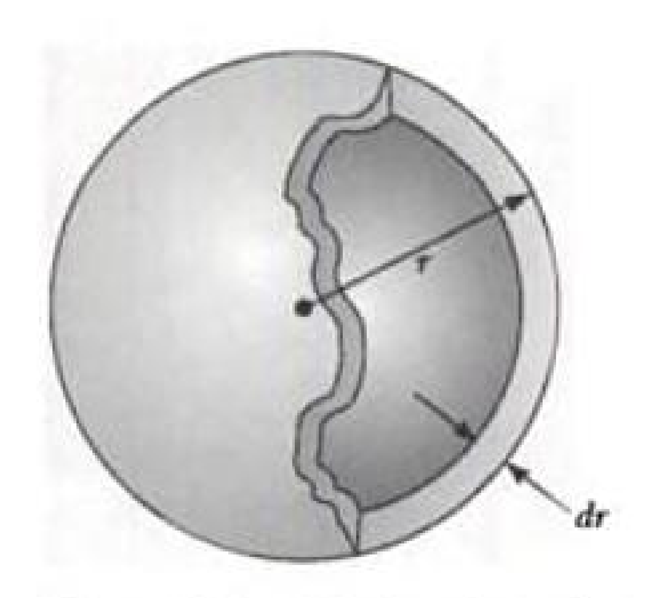


Figura 8.9 $P(r)\,dr$ es la probabilidad de que el electrón se encuentre en el volumen de una capa esférica de radio r y grosor dr. El volumen de la capa es justo $4\pi r^2 dr$.

(Versiones tridimensionales de la probabilidad por unidad de volumen $|\psi(\mathbf{r})|^2$ —a menudo denominadas "nubes" de electrones— se obtienen haciendo el sombreado en cada punto proporcional a $|\psi(\mathbf{r})|^2$). La distribución de probabilidad también es esféricamente simétrica, como debe ser para cualquier onda del estado *s*; es decir, la probabilidad de encontrar el electrón en el átomo es la misma en todos los puntos equidistantes al centro (núcleo). Así, resulta conveniente definir otra función de probabilidad, denominada **distribución de probabilidad radial,** con su densidad asociada $P(r)$, tal que ***P*(*r*) *dr* es la probabilidad de encontrar el electrón en cualquier parte de la capa esférica de radio *r* y grosor *dr*** (figura 8.9). El volumen de la capa es su área superficial, $4\pi r^2$, multiplicada por el grosor de la capa, dr. Debido a que la densidad de probabilidad $|\psi_{100}|^2$ es la misma en todas partes de la capa, se tiene

$$P(r)\,dr = |\psi|^2\, 4\pi r^2\, dr$$

o bien, para el estado $1s$ semejante al hidrógeno,

$$P_{1s}(r) = \frac{4Z^3}{a_0^3} r^2 e^{-2Zr/a_0} \qquad (8.43)$$

El mismo resultado se obtiene para $P_{1s}(r)$ a partir de la intensidad de la onda de materia unidimensional efectiva $g(r) = rR(r)$:

Densidad de probabilidad radial para cualquier estado

$$P(r) = |g(r)|^2 = r^2 |R(r)|^2 \qquad (8.44)$$

De hecho, *la ecuación 8.44 proporciona la densidad de probabilidad radial correcta para cualquier estado*; para los estados s esféricamente simétricos, ésta es la misma que $4\pi r^2|\psi|^2$, ya que entonces $\psi(r) = (1/\sqrt{4\pi})R(r)$.[12]

En la figura 8.10a se muestra una gráfica de la función $P_{1s}(r)$; en la figura 8.10b se observa la "nube" electrónica 1s, o la probabilidad por unidad de volumen $|\psi_{100}|^2$, a partir de la cual se deduce $P_{1s}(r)$. $P(r)$ puede interpretarse de manera libre como la probabilidad de encontrar el electrón a una distancia r del núcleo, sin importar su posición angular. Así, el pico de la curva en la figura 8.10a representa la distancia más probable a la que se encuentra el electrón 1s del núcleo. Además, la condición de normalización se vuelve

$$1 = \int_0^\infty P(r)\, dr \tag{8.45}$$

donde la integral se toma sobre todos los valores *posibles* de r. La distancia media del electrón al núcleo se encuentra ponderando cada distancia posible con la probabilidad de que el electrón se encuentre a esa distancia:

$$\langle r \rangle = \int_0^\infty rP(r)\, dr \tag{8.46}$$

Distancia media de un electrón al núcleo

De hecho, el valor medio de *cualquier* función de distancia $f(r)$ se obtiene al ponderar el valor de la función a cada distancia con la probabilidad a dicha

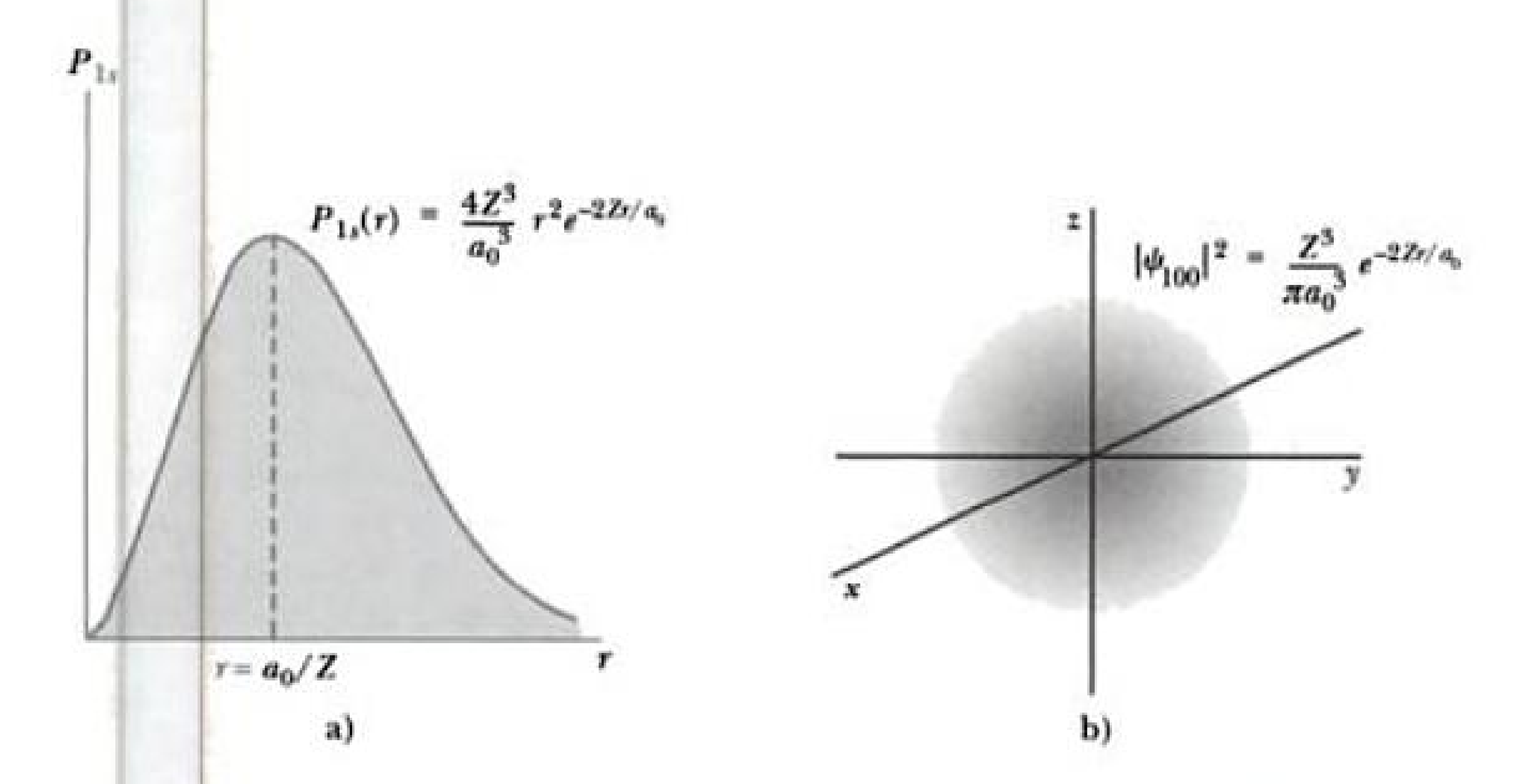


Figura 8.10 a) La curva $P_{1s}(r)$ representa la probabilidad de encontrar al electrón como una función de la distancia al núcleo en un estado hidrogenoide 1s. Observe que la probabilidad toma su máximo valor cuando r es igual a a_0/Z b) "Nube" esférica de electrones para un estado hidrogenoide 1s. El sombreado en cada punto es proporcional a la densidad de probabilidad $|\psi_{1s}(\mathbf{r})|^2$.

[12]A partir de su definición, siempre es posible encontrar $P(r)\,dr$ integrando $|\psi|^2 = |R(r)|^2|Y_\ell^{m_\ell}|^2$ sobre el volumen de una capa esférica de radio r y grosor dr. Debido a que el elemento de volumen en coordenadas esféricas es $dV = r^2 dr \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$, y a que la integral de $|Y_\ell^{m_\ell}|^2$ sobre el ángulo es igual a la unidad (vea la nota de pie de página 5), se llega a $P(r) = r^2|R(r)|^2$.

distancia:

$$\langle f \rangle = \int_0^\infty f(r)P(r)\, dr \qquad (8.47)$$

EJEMPLO 8.8 Probabilidades para el electrón en el hidrógeno

Calcule la probabilidad de que el electrón en el estado base del hidrógeno se encuentre fuera del primer radio de Bohr.

Solución La probabilidad se encuentra integrando la densidad de probabilidad radial para este estado, $P_{1s}(r)$, desde el radio de Bohr a_0 hasta ∞. Al usar la ecuación 8.43 con $Z = 1$ para el hidrógeno, se obtiene

$$P = \frac{4}{a_0^3} \int_{a_0}^\infty r^2 e^{-2r/a_0}\, dr$$

La integral puede escribirse en forma adimensional al cambiar la variable r por $z = 2r/a_0$. Al observar que $z = 2$ cuando $r = a_0$, y que $dr = (a_0/2)\,dz$, se obtiene

$$P = \frac{1}{2}\int_2^\infty z^2 e^{-z} dz = -\frac{1}{2}\{z^2 + 2z + 2\}e^{-z}\Big|_2^\infty = 5e^{-2}$$

Esto es aproximadamente 0.677, o 67.7%.

EJEMPLO 8.9 Separación electrón-protón en el hidrógeno

Calcule la distancia más probable del electrón al núcleo en el estado base del hidrógeno y compárela con la distancia media.

Solución La distancia más probable es el valor de r que maximiza la probabilidad radial $P(r)$. La pendiente aquí es cero, de modo que el valor más probable de r se obtiene haciendo $dP/dr = 0$ y despejando r. Al usar la ecuación 8.43 con $Z = 1$ para el estado $1s$, o estado base, del hidrógeno se obtiene

$$0 = \left(\frac{4}{a_0^3}\right)\frac{d}{dr}\{r^2 e^{-2r/a_0}\} = \left(\frac{4}{a_0^3}\right)e^{-2r/a_0}\left\{-\frac{2r^2}{a_0} + 2r\right\}$$

El lado derecho es cero para $r = 0$ y para $r = a_0$. Debido a que $P(0) = 0$, $r = 0$ es un mínimo de $P(r)$, no un máximo. Así, la distancia más probable es

$$r = a_0$$

La distancia media se obtiene a partir de la ecuación 8.46, que en este caso se convierte en

$$\langle r \rangle = \frac{4}{a_0^3}\int_0^\infty r^3 e^{-2r/a_0}\, dr$$

De nuevo, al introducir $z = 2r/a_0$, se obtiene

$$\langle r \rangle = \frac{a_0}{4}\int_0^\infty z^3 e^{-z}\, dz$$

La integral definida de la derecha pertenece a una clase más amplia,

$$\int_0^\infty z^n e^{-z} dz = n!$$

cuyo valor es $n! = n(n-1)\cdots(1)$ se establece al integrar por partes varias veces. Así,

$$\langle r \rangle = \frac{a_0}{4}(3!) = \frac{3}{2}a_0$$

La distancia media y la distancia más probable no son iguales, ya que la curva de probabilidad $P(r)$ no es simétrica alrededor de la distancia pico a_0. En efecto, a los valores de r mayores que a_0 se asigna una mayor ponderación en la ecuación 8.46 que a los valores menores que a_0, de modo que la media $\langle r \rangle$ en realidad excede a a_0 para esta distribución de probabilidad.

Estados excitados de átomos hidrogenoides

Hay cuatro primeros estados excitados para átomos hidrogenoides: ψ_{200}, ψ_{210}, ψ_{211} y ψ_{21-1}. Como todos poseen el mismo número cuántico principal $n = 2$, tienen la misma energía

$$E_2 = -(13.6\text{ eV})\frac{Z^2}{4}$$

Por consiguiente, el primer estado excitado, E_2, está cuádruplemente degenerado.

El estado 2*s*, ψ_{200}, de nuevo es esféricamente simétrico. En la figura 8.11 se muestran gráficas de la densidad de probabilidad radial para este estado hidrogenoide y varios más. Observe que la gráfica del estado 2*s* tiene dos picos. En este caso, la distancia más probable ($\sim 5a_0/Z$) está indicada por el pico más alto. Un electrón en el estado 2*s* estaría mucho más lejos del núcleo (en promedio) que un electrón en el estado 1*s*. De manera semejante, las distancias más probables son incluso mayores para un electrón en cualquiera de los estados $n = 3$ (3*s*, 3*p* o 3*d*). Observaciones como esta continúan sustentando la antigua idea de que el átomo tiene una estructura por capas, incluso frente a las incertidumbres inherentes en la naturaleza ondulatoria de la materia.

Los tres primeros estados excitados restantes, ψ_{211}, ψ_{210} y ψ_{21-1}, tienen $\ell = 1$ y constituyen la subcapa 2*p*. Estos estados no son esféricamente simétricos. Todos poseen la misma función de onda radial $R_{21}(r)$, aunque están multiplicados por diferentes armónicos esféricos y, por ello, dependen de manera diferente de los ángulos θ y ϕ. Por ejemplo, la función de onda ψ_{211} es

$$\psi_{211} = R_{21}(r)\,Y_1^1 = \pi^{-1/2}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\left(\frac{Zr}{8a_0}\right)e^{-Zr/2a_0}\,\text{sen}\,\theta\, e^{i\phi} \qquad (8.48)$$

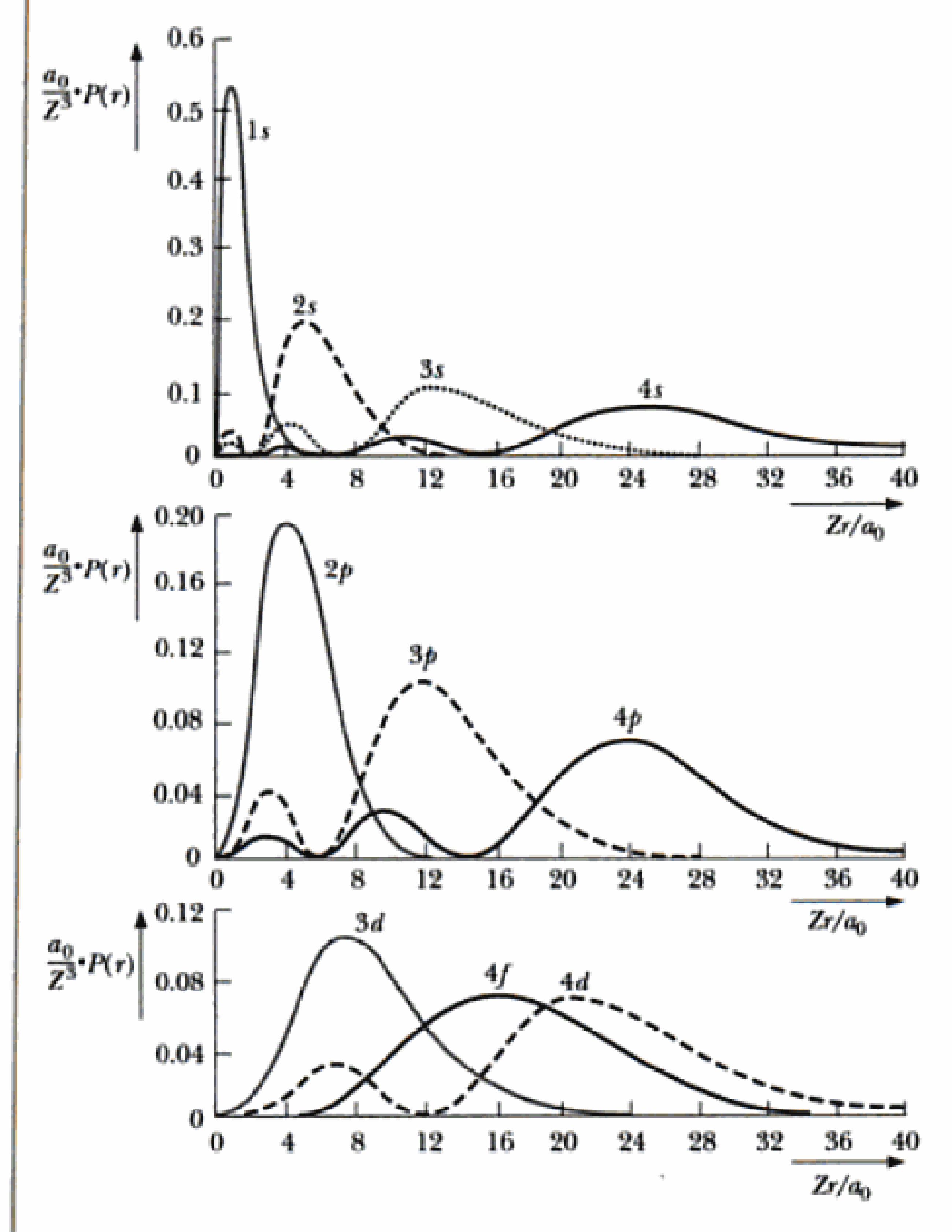


Figura 8.11 Función de densidad de probabilidad radial para varios estados de átomos hidrogenoides.

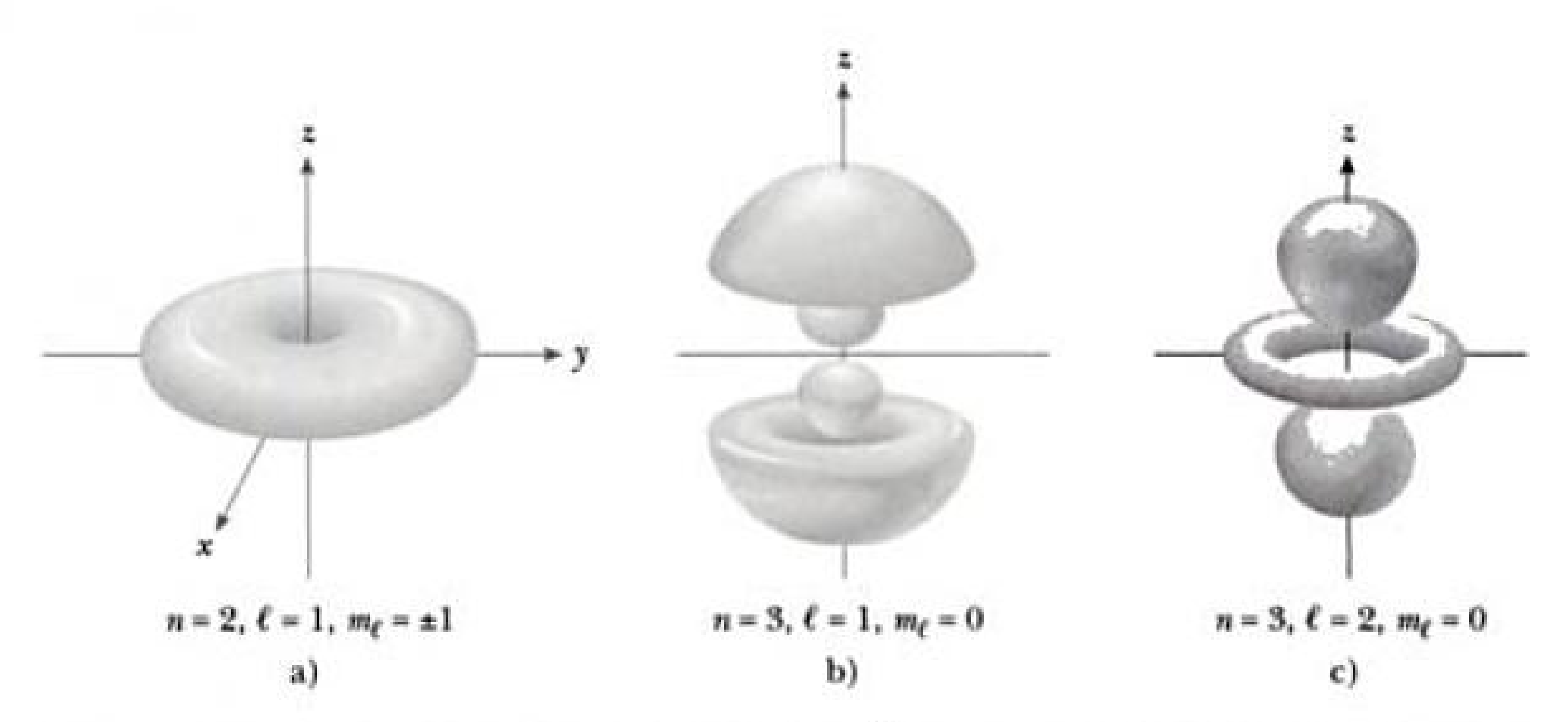


Figura 8.12 a) Densidad de probabilidad $|\psi_{211}|^2$ para un estado hidrogenoide $2p$. Observe la simetría axial con respecto al eje z. b) y c) son las densidades de probabilidad $|\psi(\mathbf{r})|^2$ para varios otros estados hidrogenoides. La "nube" de electrones es axialmente simétrica con respecto al eje z para todos los estados $\psi_{n\ell m_\ell}(\mathbf{r})$ hidrogenoides.

Observe, no obstante, que la densidad de probabilidad $|\psi_{211}|^2$ es independiente de ϕ y, por tanto, es simétrica con respecto al eje z (figura 8.12a). Debido a que $|e^{im_l\phi}|^2 = 1$, lo mismo es cierto para todos los estados hidrogenoides $\psi_{n\ell m_\ell}$, como sugieren las ilustraciones restantes en la figura 8.12.

El estado ψ_{210}

$$\psi_{210} = R_{21}(r)\,Y_1^0 = \pi^{-1/2}\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2}\left(\frac{Zr}{2a_0}\right)e^{-Zr/2a_0}\cos\theta \qquad (8.49)$$

posee características direccionales distintas, como se muestra en la figura 8.13a, y algunas veces se denomina $[\psi_{2p}]_z$ a la preferencia del electrón en este estado de encontrarse a lo largo del eje z. Otros estados altamente direccionales pueden obtenerse al combinar las ondas con $m_l = +1$ y $m_l = -1$. Así, las funciones de onda

$$[\psi_{2p}]_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\psi_{211} + \psi_{21-1}\} \qquad (8.50a)$$

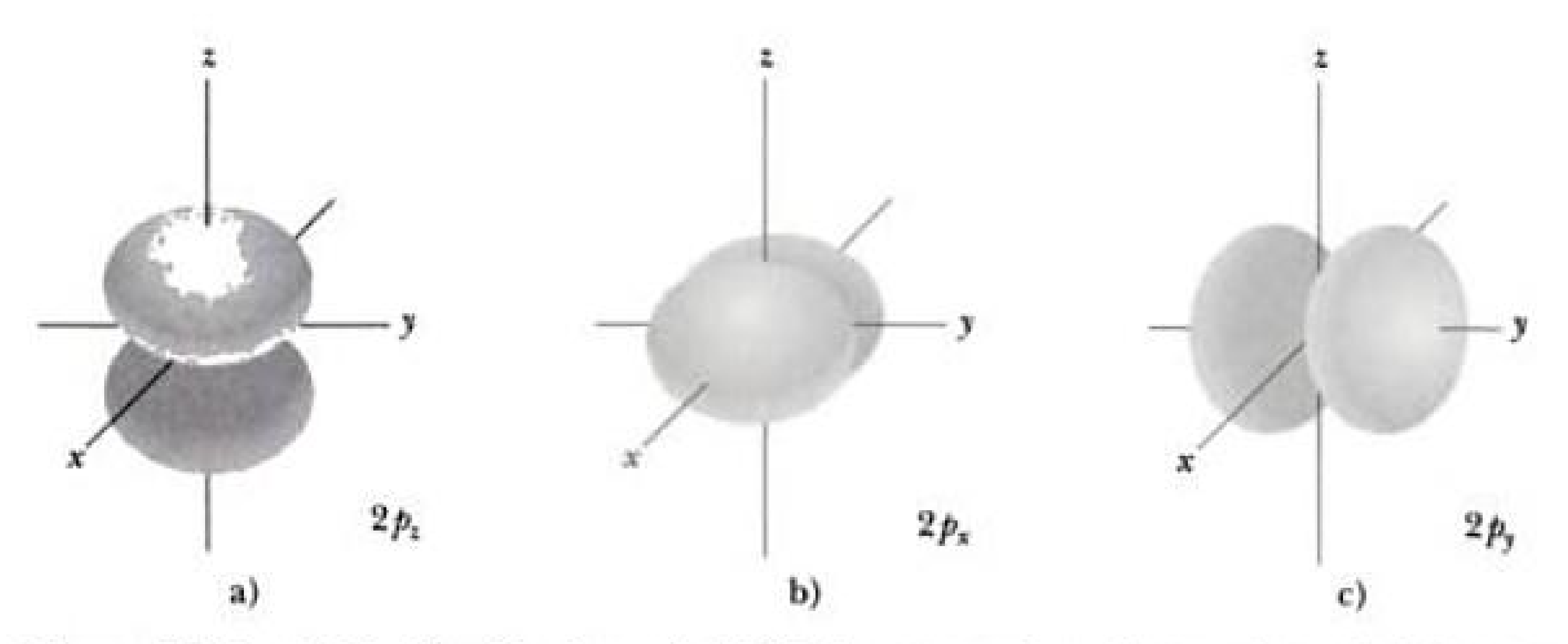


Figura 8.13 a) Distribución de probabilidad para un electrón en el estado hidrogenoide $2p_z$, descrita por los números cuánticos $n = 2$, $l = 1$, $m_l = 0$. b) y c) Son las distribuciones de probabilidad para los estados $2p_x$ y $2p_y$. Las tres distribuciones $2p_x$, $2p_y$ y $2p_z$ poseen la misma estructura, aunque difieren en su orientación espacial.

y

$$[\psi_{2p}]_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\psi_{211} - \psi_{21-1}\} \tag{8.50b}$$

tienen grandes densidades de probabilidad a lo largo de los ejes x y y, respectivamente, como se muestra en las figuras 8.13b y 8.13c. Las funciones de onda de las ecuaciones 8.50, formadas como superposiciones de ondas del primer estado excitado con energías *idénticas* E_2, son de por sí estados estacionarios con la misma energía; en efecto, las tres funciones de onda $[\psi_{2p}]_z$, $[\psi_{2p}]_x$ y $[\psi_{2p}]_y$ constituyen juntas una descripción igualmente aceptable de los estados $2p$ para átomos hidrogenoides. Las funciones de onda con un carácter altamente direccional, como éstas, juegan un papel importante en los enlaces químicos, la formación de moléculas y las propiedades químicas.

El siguiente estado excitado, E_3, es nueve veces degenerado; es decir, hay nueve funciones de onda diferentes con esta energía, que corresponden a todas las posibilidades de ℓ y m_ℓ consistentes con $n = 3$. Juntos, estos nueve estados constituyen la tercera capa, con subcapas $3s$, $3p$ y $3d$ integradas por uno, tres y cinco estados, respectivamente. Las funciones de onda para estos estados pueden obtenerse a partir de los elementos de las tablas 8.3 y 8.4. En general, son más complicadas que sus contrapartes de la segunda capa debido al número creciente de nodos en la parte radial de la función de onda.

Avanzar a estados superiores conduce a mayor degeneración y a funciones de onda cada vez más complejas. La energía de la n-ésima capa es

$$E_n = -(13.6 \text{ eV})\frac{Z^2}{n^2}$$

y contiene exactamente n subcapas, correspondientes a $\ell = 0, 1, \ldots, n-1$. En el interior de la ℓ-ésima subcapa hay $2\ell + 1$ orbitales. En conjunto, la n-ésima capa contiene un total de n^2 estados, todos con la misma energía, E_n; es decir, **el nivel energético E_n es n^2 degenerado.** En forma equivalente, se dice que la n-ésima capa puede alojar hasta n^2 electrones, suponiendo que no más de un electrón puede ocupar un orbital dado. Este razonamiento subestima la verdadera capacidad de la capa por un factor de 2, debido al espín (giro) del electrón, como se analizará en el siguiente capítulo.

8.6 ANTIHIDRÓGENO

Los constituyentes de los átomos de hidrógeno, protones y electrones, abundan en el universo y entre las partículas elementales que integran toda la materia existente. Sin embargo, cada una de estas partículas elementales tiene un acompañante: su *antipartícula*, idéntica al original en todos sentidos, salvo en que transporta una carga de signo opuesto.[13] El antielectrón, o positrón, fue descubierto en 1932 por Carl Anderson.[14] El positrón posee la misma masa que el electrón, pero su carga es $+e$. Debido a que es imposible producirlo si no se

[13]En términos estrictos, la antipartícula también posee un momento magnético opuesto al de su partícula acompañante. Los momentos magnéticos se estudian en el capítulo 9, y están estrechamente relacionados con una nueva propiedad de las partículas denominada *espín* (o giro). El espín es el mismo para la partícula y para la antipartícula.

[14]La idea de las antipartículas recibió un sólido sustento teórico en 1928 con la teoría relativista del electrón de P. A. M. Dirac. A la vez que proporciona una descripción cuántica exacta de los electrones con energías relativistas, la teoría de Dirac también incluye los misteriosos estados con "energía negativa". Finalmente, Dirac se dio cuenta de que estos estados con "energía negativa" en realidad son la descripción de antipartículas con energía positiva. La conjetura de Dirac fue confirmada posteriormente con el descubrimiento del positrón en 1932. Consulte la sección 15.2.

cuenta con un acelerador de partículas poderoso, el mucho más masivo antiprotón no fue observado sino hasta 1955. De nuevo, el antiprotón posee la misma masa que el protón, pero con carga opuesta. Justo como los átomos y la materia común están integrados por partículas, es fácil concebir que los antiátomos y todas las formas de antimateria están constituidos por antipartículas. En efecto, ¡frente a esto no hay forma de negar que existamos en un mundo de antimateria y si estamos completamente integrados por antimateria!

El antiátomo más sencillo de estos es el **antihidrógeno,** la unidad neutral más fundamental de antimateria. El antihidrógeno consta de un positrón ligado eléctricamente a un antiprotón. Muchos físicos consideran que el estudio del antihidrógeno puede responder a la pregunta de si existe alguna diferencia fundamental, y hasta ahora desconocida, entre la materia y la antimateria, y por qué nuestro universo parece estar compuesto casi exclusivamente de materia. Según los argumentos aquí presentados, la producción de antihidrógeno está llena de dificultades, por lo que no fue sino hasta mediados de la década de 1990 que dos grupos, uno en el CERN y otro en el Fermilab, reportaron haber tenido éxito en la producción de antihidrógeno a altas energías. En 2002, el grupo del CERN reportó producción de antihidrógeno a las muy bajas energías que se requieren para mediciones de comparación precisas con hidrógeno normal. Capturar los antiátomos durante un tiempo suficiente que permita realizar experimentos con ellos es mucho más difícil, y aún no se ha logrado.

Cuando una partícula y su antipartícula chocan, ambas desaparecen en un estallido de energía electromagnética. Ésta es la **aniquilación de pares,** la conversión directa de masa en energía según la famosa relación de Einstein, $E = mc^2$. Un electrón y un positrón se combinan para producir dos (y algunas veces tres) fotones de rayos gamma (un fotón solo es incapaz de conservar la energía *y* la cantidad de movimiento). La colisión de un protón y un antiprotón produce otras tres o cuatro partículas elementales denominadas *piones.* El problema al que se enfrentan los experimentalistas es que sus laboratorios e instrumentos de medición están hechos de materia normal y las antipartículas se autodestruyen al primer contacto con el aparato. Un problema semejante se presenta en la contención de plasmas, que se controlan usando una trampa magnética; es decir, una configuración de campos magnéticos que ejercen fuerzas sobre partículas cargadas del plasma a fin de mantenerlas confinadas. Pero los antiátomos neutrales sólo experimentan fuerzas magnéticas débiles y escapan rápidamente de la trampa, a menos que se muevan muy despacio. Así, el antiátomo de hidrógeno debe estar *frío* si ha de perdurar lo suficiente para que sirva para realizar experimentos de precisión, lo cual constituye otro desafío. Aunque los positrones están rápidamente disponibles como productos de la desintegración de especies radiactivas que ocurren en forma natural, como ^{22}Na, es necesario crear antiprotones de manera artificial en aceleradores de partículas mediante el bombardeo de objetivos pesados (Be) con protones ultraenergéticos (~GeV). Los positrones y los antiprotones así producidos son muy energéticos, y su velocidad debe aminorarse en gran medida para formar antihidrógeno frío. La desaceleración se logra al precio de perder partículas en lo que es, en esencia, un acelerador operando hacia atrás. El experimento del CERN produce aproximadamente 50 000 átomos de antihidrógeno, empezando a partir de alrededor de 1.5 millones de antiprotones. Y de éstos, en realidad sólo se detecta una pequeña fracción.

La detección de antihidrógeno es, por sí misma, un desafío. La existencia de un antiprotón se confirma por los productos del decaimiento (piones) que se producen en la aniquilación con su contraparte de antimateria, el protón. Estos productos de desintegración dejan rastros direccionales en los detectores que rodean la muestra del antiátomo. A partir de tales rastros direccionales, los físicos pueden reconstruir la ubicación precisa del evento de aniquilación. Para confirmar la existencia del antihidrógeno, no obstante, también es necesario registrar la aniquilación electrón-positrón en el mismo sitio al mismo tiempo. Los

reveladores fotones de rayos gamma producidos en tal aniquilación también pueden rastrearse hasta un punto de origen. Así, la impronta del antihidrógeno es la coincidencia de múltiples eventos de detección distintos, como se ilustra en la figura 8.14.

Según la teoría presentada en este capítulo, el espectro de energía del antihidrógeno debe ser idéntico al del hidrógeno común. El átomo de hidrógeno es el sistema físico mejor conocido, y se han realizado mediciones muy exactas de su espectro, de las cuales la mejor tiene una precisión de aproximadamente 2 partes en 10^{14}. Así, comparar espectros de antihidrógeno con hidrógeno común podría permitir una prueba muy rigurosa de la simetría esperada entre materia y antimateria en interacciones atómicas. Esta simetría está arraigada en la denominada invariancia CPT, la cual establece que si se tomara cualquier cúmulo de materia y se inviertieran el signo de todas las cargas elementales (C), la dirección del flujo del tiempo (T) y otra propiedad de la partícula denominada paridad (P), el espécimen obedecería las mismas leyes físicas. La invariancia CPT es una consecuencia muy general de la teoría cuántica y la covariancia de las leyes cuánticas bajo la transformación de Lorentz demandada por la relatividad especial, y es la piedra angular de toda teoría moderna de la materia. Si se viola la invariancia CPT, toda la teoría física a nivel fundamental debería escribirse de nuevo. Mientras casi todos los físicos están de acuerdo en que es bastante improbable, la perspectiva de la violación CPT sigue martirizando las posibilidades y podría iluminar uno de los problemas más contradictorios de la cosmología actual: por qué ahora hay una preponderancia de materia en el universo, cuando la teoría de la gran explosión establece que la materia y la antimateria debieron crearse en cantidades iguales. Además, si el antihidrógeno responde de manera diferente a la gravedad, la teoría de la relatividad en su forma actual se vería comprometida, un desarrollo que podría mostrar el camino a la unificación tan largamente buscada de la relatividad y la teoría cuántica.

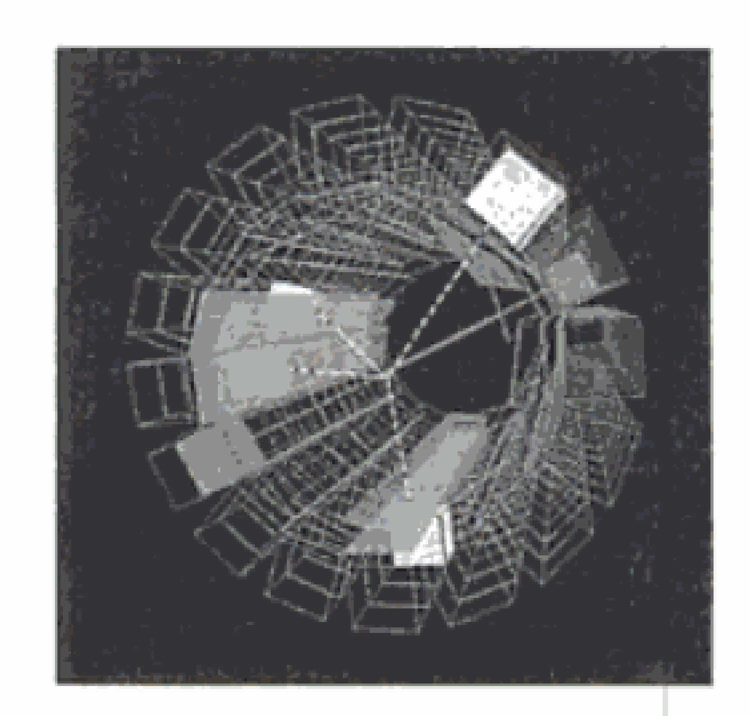


Figura 8.14 Antihidrógeno detectado a través de su aniquilación en colisiones con partículas de materia. La aniquilación del antiprotón produce piones que, registrados en los detectores circundantes (en gris claro), pueden rastrearse (cuatro líneas punteadas) hasta el punto de aniquilación. De manera semejante, la aniquilación del positrón produce una impronta distintiva de dos fotones sucesivos (dos rastros punteados que forman un ángulo de 180° entre sí). La superposición de los dos puntos de aniquilación significa que el positrón y el antiprotón estaban ligados entre sí en un átomo de antihidrógeno. (Adaptada de *Nature*, 419, 456-459, 3 de octubre de 2002.)

RESUMEN

En tres dimensiones, la intensidad de la onda de materia $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$ representa la probabilidad por unidad de volumen de encontrar a la partícula en $\mathbf{r}$ en el tiempo t. Las probabilidades se encuentran integrando esta densidad de probabilidad sobre el volumen de interés.

La función de onda en sí debe cumplir la ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + U(\mathbf{r})\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} \tag{8.1}$$

Los **estados estacionarios** son soluciones de esta ecuación en forma separable: $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, donde $\psi(\mathbf{r})$ satisface

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \tag{8.5}$$

Ésta es la **ecuación de Schrödinger independiente del tiempo,** a partir de la cual se obtienen la función de onda $\psi(\mathbf{r})$ independiente del tiempo y los valores permitidos de la energía E de la partícula.

Para una partícula confinada a una caja cúbica, cuyas aristas miden L, la magnitud de las componentes de la cantidad de movimiento de la partícula normales a las paredes de la caja pueden hacerse nítidas, así como la energía de la partícula. Los valores nítidos de la cantidad de movimiento se cuantizan como

$$|p_x| = n_1 \frac{\pi\hbar}{L}$$

$$|p_y| = n_2 \frac{\pi\hbar}{L} \tag{8.8}$$

$$|p_z| = n_3 \frac{\pi\hbar}{L}$$

y se encuentra que las energías permitidas son

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\} \tag{8.9}$$

Los tres **números cuánticos,** n_1, n_2 y n_3 son enteros positivos, uno por cada grado de libertad de la partícula. Muchos niveles de este sistema son **degenerados;** es decir, hay más de una función de onda con la misma energía.

Para partículas sobre las que actúa una **fuerza central,** el momento angular **L** es una constante del movimiento clásico y está cuantizada junto con la energía de la partícula. Las funciones de onda para las cuales la componente z, L_z, y la magnitud $|\mathbf{L}|$ del momento angular son simultáneamente nítidas son los **armónicos esféricos** $Y_\ell^{m_\ell}(\theta, \phi)$ en términos de los ángulos θ y ϕ en coordenadas esféricas. Para cualquier fuerza central, el momento angular está cuantizado según las reglas

$$|\mathbf{L}| = \sqrt{\ell(\ell + 1)}\,\hbar$$

y

$$L_z = m_\ell \hbar \tag{8.16}$$

El **número cuántico orbital** ℓ debe ser un entero no negativo. Para un valor fijo de ℓ, el **número cuántico magnético** m_ℓ está restringido a valores enteros que están entre $-\ell$ y $+\ell$. Debido a que $|\mathbf{L}|$ y L_z están cuantizadas de manera diferente, es necesario abandonar la libertad clásica para orientar el eje z en la dirección de **L.** Esta sorprendente conclusión constituye la esencia de la **cuantización del espacio.** Además, ningún par de componentes de **L**, como L_z y L_y, puede ser nítido simultáneamente. Esto implica un límite inferior al producto de incertidumbres $\Delta L_z \Delta L_y$ y origina un principio de incertidumbre para las componentes del momento angular.

Una fuerza central de considerable importancia es la fuerza sobre el electrón en un átomo o ion con un electrón. Ésta es la fuerza de Coulomb, descrita por la energía potencial $U(r) = -kZe^2/r$, donde Z es el número atómico del núcleo. Las energías permitidas para este caso están dadas por

$$E_n = -\frac{ke^2}{2a_0}\left\{\frac{Z^2}{n^2}\right\} \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{8.38}$$

Esto coincide exactamente con los resultados obtenidos a partir de la teoría de Bohr. La energía sólo depende del **número cuántico principal** n. Para un valor fijo de n, los números cuánticos orbital y magnético están restringidos a ser

$$\ell = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$$

$$m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \ell \tag{8.39}$$

Todos los estados con el mismo número cuántico principal n constituyen una **capa,** identificada por las letras $K, L, M, \ldots$ (lo cual corresponde a $n = 1, 2, 3, \ldots$). Todos los estados con el mismo valor de n y ℓ forman un **subcapa,** designada por las letras $s, p, d, f, \ldots$ (lo cual corresponde a $\ell = 0, 1, 2, \ldots$).

Las funciones de onda para un electrón en el hidrógeno o en un ion hidrogenoides,

$$\psi(r, \theta, \phi) = R_{n\ell}(r) Y_\ell^{m_\ell}(\theta, \phi)$$

dependen de los tres números cuánticos n, ℓ y m_ℓ y son productos de armónicos esféricos multiplicados por funciones de onda radiales $R_{n\ell}(r)$. La **función de onda unidimensional efectiva** $g(r) = rR_{n\ell}(r)$ es análoga a la función de onda $\psi(x)$ en una dimensión; la intensidad de $g(r)$ proporciona la **densidad de probabilidad radial,**

$$P(r) = |g(r)|^2 = r^2 |R_{n\ell}(r)|^2 \qquad (8.44)$$

$P(r)\,dr$ es la probabilidad de que el electrón esté a una distancia entre r y $r + dr$ del núcleo. La distancia más probable es aquélla que maximiza $P(r)$ y, en general, difiere de la distancia media $\langle r \rangle$, que se calcula como

$$\langle r \rangle = \int_0^\infty rP(r)\, dr \qquad (8.46)$$

Se encuentra que los valores más probables coinciden con los radios de las órbitas permitidas en la teoría de Bohr.

BIBLIOGRAFÍA ADICIONAL SUGERIDA

1. Si desea información sobre el empleo del momento angular para simplificar la ecuación tridimensional de Schrödinger en aplicaciones de fuerza central, consulte el capítulo 11 de *An Introduction to Quantum Physics*, de A. P. French y Edwin F. Taylor, Nueva York, W. W. Norton and Company, Inc., 1978.
2. Un análisis de la densidad de probabilidad radial y su aplicación para los estados inferiores del hidrógeno puede consultarse en el capítulo 7 del libro *Modern Physics*, 2a. edición, de Kenneth Krane, Nueva York, John Wiley and Sons, Inc., 1996.
3. Ilustraciones en perspectiva de la "nube" de electrones $|\psi(\mathbf{r})|^2$ para varios estados hidrogenoides pueden encontrarse en el libro *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles*, 2a. edición, de R. Eisberg y R. Resnick, Nueva York, John Wiley and Sons, Inc., 1985.

PREGUNTAS

1. ¿Por qué son necesarios tres números cuánticos para describir el estado de un átomo con un electrón?
2. Compare la teoría de Bohr con el tratamiento de Schrödinger del átomo de hidrógeno. Comente específicamente sobre la energía total y el momento angular orbital.
3. ¿Cómo puede saberse si un electrón $2p$ de un átomo tiene $m_\ell = 0, +1$ o -1? ¿Qué valor de m_ℓ caracteriza a un orbital dirigido como $[\psi_{2p}]_x$, en la ecuación 8.50?
4. Para estados atómicos s, la densidad de probabilidad $|\psi|^2$ es mayor en el origen, aunque la probabilidad de encontrar el electrón a una distancia r del núcleo, dada por $P(r)$, se hace cero con r. Explique su respuesta.
5. Para el electrón en el estado base del hidrógeno —así como para muchos otros sistemas cuánticos—, las energías cinética y potencial son observables vagas, aunque su suma, la energía total, es nítida. Explique cómo es posible esto.
6. Analice la relación entre la cuantización del espacio y la ecuación de Schrödinger. Si ésta fuese inválida, ¿seguiría cumpliéndose la cuantización del espacio?

PROBLEMAS

8.1 Partícula en una caja tridimensional

1. Una partícula de masa m se mueve en una caja tridimensional con aristas L_1, L_2 y L_3. Encuentre las energías de los seis niveles inferiores si $L_1 = L$, $L_2 = 2L$ y $L_3 = 2L$. ¿Cuáles de estas energías están degeneradas?
2. Un electrón se mueve en un cubo de 0.2 nm de arista. Encuentre valores para la energía a) del estado base y b) del primer estado excitado del electrón.
3. Una partícula de masa m se mueve en una caja tridimensional, cuya arista mide L. Si la partícula está en el tercer nivel excitado, que corresponde a $n^2 = 11$, encuentre a) la energía de la partícula, b) la combinación de n_1, n_2 y n_3 que daría esta energía, y c) las funciones de onda para estos estados diferentes.
4. Una partícula de masa m se mueve en una caja bidimensional, cuyas aristas miden L. a) Escriba expresiones para las funciones de onda y energías como una función de los números cuánticos n_1 y n_2 (suponiendo que la caja está en el plano xy). b) Encuentre las energías del estado fundamental y del primer estado excitado. ¿Alguno de estos estados es degenerado? Explique su respuesta.
5. Suponga que el núcleo de un átomo puede considerarse como una caja tridimensional de arista igual a 2×10^{-14} m. Si un protón se mueve como una partícula en esta caja, encuentre a) la energía del estado base del protón en MeV y b) las energías del primer y segundo estados excitados. c) ¿Cuáles son las degeneraciones de estos estados?
6. Obtenga los estados estacionarios para una partícula *libre* en tres dimensiones al separar las variables en la ecuación de Schrödinger. Haga lo anterior sustituyendo la forma separable $\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi_1(x)\psi_2(y)\psi_3(z)\phi(t)$ en la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo y dividiendo cada término entre $\Psi(\mathbf{r}, t)$. Aísle todos los términos que sólo dependen de x de los que dependen sólo de y, etc., y argumente que deben obtenerse cuatro ecuaciones separadas, una para cada una de las funciones incógnitas ψ_1, ψ_2, ψ_3 y ϕ. Resuelva las ecuaciones resultantes. ¿Qué cantidades dinámicas son nítidas para los estados que encontró?
7. Para una partícula confinada en una caja cúbica de arista L, demuestre que el factor de normalización es $A = (2/L)^{3/2}$, *el mismo* valor para *todos* los estados estacionarios. ¿Cómo cambia este resultado si todas las aristas, L_1, L_2 y L_3, son distintas?
8. Considere una partícula de masa m, confinada en un cubo tridimensional de arista L tan pequeña, que el movimiento de la partícula es *relativista*. Obtenga una expresión para las energías permitidas de la partícula en este caso. Calcule la energía del estado base para un electrón si $L = 10$ fm (10^{-5} nm), una dimensión nuclear típica.

8.2 Fuerzas centrales y momento angular

9. Si un electrón posee un momento angular orbital de 4.714×10^{-34} J·s, ¿cuál es el número cuántico orbital para este estado del electrón?
10. Considere un electrón para el cual $n = 4$, $\ell = 3$ y $m_\ell = 3$. Calcule el valor numérico de a) el momento angular orbital y b) la componente z de dicha cantidad.
11. El momento angular orbital de la Tierra en su movimiento de traslación es 4.83×10^{31} Kg·m²/s. Suponiendo que está cuantizada según la ecuación 8.16, encuentre a) el valor de ℓ correspondiente este momento angular y b) el cambio fraccionario en $|\mathbf{L}|$ cuando ℓ cambia de ℓ a $\ell + 1$.

8.5 Átomo de hidrógeno-iones hidrogenoides

12. La función de onda normalizada del estado base para el electrón en el átomo de hidrógeno es

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{3/2} e^{-r/a_0}$$

donde r es la coordenada radial del electrón y a_0 es el radio de Bohr. a) Dibuje la función de onda contra r. b) Demuestre que la probabilidad de encontrar al electrón entre r y $r + dr$ está dada por $|\psi(r)|^2 4\pi r^2 dr$. c) Dibuje la probabilidad contra r y, a partir de su dibujo, encuentre el radio al que es más probable encontrar el electrón. d) Demuestre que la función de onda, como se ha proporcionado, está normalizada. e) Encuentre la probabilidad de localizar el electrón entre $r_1 = a_0/2$ y $r_2 = 3a_0/2$.
13. a) Determine los números cuánticos ℓ y m_ℓ para el ion He^+ en el estado correspondiente a $n = 3$. b) ¿Cuál es la energía de este estado?
14. a) Determine los números cuánticos ℓ y m_ℓ para el ion Li^{2+} en los estados para los cuales $n = 1$ y $n = 2$. b) ¿Cuáles son las energías de estos estados?
15. Al obtener los resultados para átomos hidrogenoides en la sección 8.5, se supuso que el núcleo atómico estaba inmóvil debido a su gran masa, en comparación con la masa del electrón. Si esta suposición se relaja, los resultados siguen siendo válidos si la masa m del electrón se sustituye en todas partes por la *masa reducida* μ de la combinación electrón-núcleo:

$$\mu = \frac{mM}{m + M}$$

Aquí, M es la masa nuclear. a) Haga esta sustitución en la ecuación 8.38 para demostrar que una expresión más general para las energías permitidas de un átomo con un electrón con número atómico Z es

$$E_n = -\frac{\mu k^2 e^4}{2\hbar^2}\left\{\frac{Z^2}{n^2}\right\}$$

b) La longitud de onda para la transición desde $n = 3$ hasta $n = 2$ del átomo de hidrógeno es 656.3 nm (luz roja visible). ¿Cuál es la longitud de onda de esta misma transición en helio simplemente ionizado? ¿Y en el positronio? (*Nota*: El positronio es un "átomo" que consta

de un par positrón-electrón enlazado. Un positrón es un electrón con carga positiva.)

16. Calcule los valores posibles de la componente z del momento angular para un electrón en una subcapa d.

17. Calcule el momento angular para un electrón en a) el estado $4d$ y b) el estado $6f$ del hidrógeno.

18. Un átomo de hidrógeno está en el estado $6g$. a) ¿Cuál es el número cuántico principal? b) ¿Cuál es la energía del átomo? c) ¿Cuáles son los valores para el número cuántico principal y la magnitud del momento angular orbital del electrón? d) ¿Cuáles son los valores posibles para el número cuántico magnético? Para cada valor, encuentre la componente z correspondiente del momento angular orbital del electrón y el ángulo que forma con el eje z el vector de momento angular orbital.

19. Demuestre que el n-ésimo nivel de energía de un átomo posee una degeneración igual a n^2.

20. Para una energía fija del electrón, el número cuántico orbital ℓ está limitado a $n - 1$. Este resultado puede obtenerse a partir de un razonamiento semiclásico, considerando que la mayor cantidad de momento angular describe órbitas circulares, donde toda la energía cinética está en forma orbital. Para átomos hidrogenoides, $U(r) = -Zke^2/r$, y la energía en órbitas circulares se convierte en

$$E = \frac{|\mathbf{L}|^2}{2mr^2} - \frac{Zke^2}{r}$$

Cuantize esta relación usando las reglas de las ecuaciones 8.16 y 8.38, junto con el resultado de Bohr, para los valores permitidos de r, a fin de demostrar que el máximo valor entero de ℓ consistente con la energía total es $\ell_{\text{máx}} = n - 1$.

21. Suponga que un átomo de hidrógeno está en el estado $2s$. Tome $r = a_0$ a fin de calcular valores para a) $\psi_{2s}(a_0)$, b) $|\psi_{2s}(a_0)|^2$ y c) $P_{2s}(a_0)$.

22. La parte radial de la función de onda para el átomo de hidrógeno en el estado $2p$ está dada por

$$R_{2p}(r) = Are^{-r/2a_0}$$

donde A es una constante y a_0 es el radio de Bohr. Use esta expresión para calcular el valor medio de r para un electrón en este estado.

23. Un número adimensional que aparece a menudo en física atómica es la *constante de estructura fina* α, dada por

$$\alpha = \frac{ke^2}{\hbar c}$$

donde k es la constante de Coulomb. a) Obtenga un valor numérico para $1/\alpha$. b) En experimentos de dispersión, el "tamaño" del electrón es el *radio clásico del electrón*, $r_0 = ke^2/m_ec^2$. En términos de α, ¿cuál es la razón de la longitud de onda de Compton, $\lambda = h/m_ec$, al radio clásico del electrón? c) En términos de α, ¿cuál es la razón del radio de Bohr, a_0, a la longitud de onda de Compton? d) En términos de α, ¿cuál es la razón de la *longitud de onda de Rydberg*, $1/R$, al radio de Bohr?

24. Calcule las energías potencial y cinética medias para el electrón en el estado base del hidrógeno.

25. Compare las distancias más probables del electrón al protón en los estados $2s$ y $2p$ del hidrógeno con el radio de la segunda órbita de Bohr en el hidrógeno, $4a_0$.

26. Calcule la probabilidad de que un electrón en el estado $2s$ del hidrógeno se encuentre en el interior del radio de Bohr para el estado $4a_0$. Compare lo anterior con la probabilidad de encontrar un electrón en el estado $2p$ en la misma región.

27. Use el applet Java disponible en nuestro sitio en la red (http://info.brookscole.com/mp3e → QmTools Simulations → Problem 8.27) a fin de representar las funciones de onda para el nivel $n = 3$ del átomo de hidrógeno. Ubique la distancia más probable al núcleo para un electrón en el estado $3s$. Haga lo mismo para un electrón en los estados $3p$ y $3d$. ¿Qué predice la simple teoría de Bohr para este caso?

28. *Variación angular de las funciones de onda del hidrógeno.* Use el applet Java del problema anterior a fin de representar las nubes de electrones para los estados $n = 4$ del hidrógeno atómico. Observe las diferentes simetrías de los orbitales s, p, d y f en el caso $m_\ell = 0$. ¿Cuál de estos orbitales es el más extenso?; es decir, ¿en qué orbital es probable encontrar al electrón más lejano del núcleo? Analice el efecto del número cuántico magnético m_ℓ sobre la apariencia global y las propiedades de los orbitales $n = 4$. ¿Puede identificar alguna tendencia?

29. Como se demostró en el ejemplo 8.9, la distancia media del electrón al protón en el estado base del hidrógeno es igual a 1.5 radios de Bohr. Para este caso, calcule Δr, la incertidumbre en la distancia alrededor del valor medio, y compárela con el promedio mismo. Comente la significancia de su resultado.

30. Calcule el producto de incertidumbre $\Delta r \Delta p$ para el electrón en el estado $1s$ de un átomo hidrogenoide cuyo número atómico es Z. (*Sugerencia:* Use $\langle p \rangle = 0$ por simetría y deduzca $\langle p^2 \rangle$ a partir de la energía cinética media, calculada como en el problema 24.)

PROBLEMAS ADICIONALES

31. Un electrón fuera de un dieléctrico es atraído hacia la superficie por una fuerza $F = -A/x^2$, donde x es la distancia perpendicular del electrón a la superficie y A es una constante. Los electrones no pueden cruzar la superficie, ya que en el dieléctrico no hay estados cuánticos que puedan ocupar. Suponga que la superficie es infinita, de modo que el problema es, en efecto, unidimensional. Escriba la ecuación de Schrödinger para un electrón fuera de la superficie $x > 0$. ¿Cuál es la condición en la frontera idónea en $x = 0$? Obtenga una fórmula

para los niveles energéticos en este caso. (*Sugerencia:* Compare la ecuación para $\psi(x)$ con la que cumple la función de onda unidimensional efectiva $g(r) = rR(r)$ para átomos hidrogenoides.)

32. *El pozo esférico.* El análogo tridimensional del pozo cuadrado en una dimensión, el pozo esférico, suele utilizarse para modelar la energía potencial de nucleones (protones, neutrones) en un núcleo atómico. Se define por un potencial $U(r)$, que es cero en todas partes en el interior de una esfera y asume un enorme valor positivo (posiblemente infinito) fuera de esta esfera. Use el applet Java disponible en nuestro sitio en la red (http://info.brookscole.com/mp3e → QmTools Simulations → Problem 8.32) a fin de encontrar la energía del estado base para un protón atrapado en un pozo esférico de 9 fm de radio y 30 MeV de altura. ¿El estado base es un estado *s*? Explique su respuesta. También, determine la distancia más probable al centro del pozo para este nucleón.

33. Use el applet Java del problema 32 a fin de encontrar los niveles energéticos de los tres primeros estados excitados para el pozo esférico aquí descrito. ¿Cuáles son los números cuánticos ℓ que describen estos estados? Determine la degeneración de cada nivel excitado y establezca las nubes de probabilidad para las funciones de onda degeneradas.

34. En el ejemplo 8.9 se encontraron el valor más probable y el valor medio para la distancia del electrón al protón en el estado base de un átomo de hidrógeno. Por comparación, encuentre el valor de la *mediana* como sigue: a) Obtenga una expresión para la probabilidad, como una función de *r*, de que el electrón en el estado base del hidrógeno se encuentre fuera de una esfera de radio *r* con centro en el núcleo. b) Encuentre el valor de *r* con el cual la probabilidad de encontrar al electrón fuera de una esfera de radio *r* sea igual a la probabilidad de encontrar al electrón dentro de ella. (Es necesario resolver numéricamente una ecuación trascendente.)

9
Estructura atómica

Contenido del capítulo

Mucho de lo que se ha aprendido sobre el átomo de hidrógeno con su electrón único puede usarse directamente para la descripción de iones con un solo electrón, como He^+ y Li^{2+}, que tienen una es estructura electrónica semejante a la del hidrógeno. Los átomos con varios electrones, no obstante, como el helio y el litio neutros, introducen complicaciones adicionales que surgen de las interacciones entre los electrones atómicos. Así, el estudio del átomo nos lleva inevitablemente a sistemas complejos que constan de muchos electrones interactuando. En este capítulo estudiaremos algunos de los principios básicos necesarios para tratar tales sistemas de manera eficaz y aplicar estos principios para describir la física de los electrones en los átomos.

Al poseer carga semejante y estar confinados a un espacio reducido, los electrones de un átomo se repelen fuertemente debido a la fuerza de Coulomb. Además, descubriremos que se comportan como delgadas barras imantadas, ya que también interactúan magnéticamente entre sí, al igual que con cualquier campo magnético externo aplicado al átomo. Estas propiedades magnéticas se deducen en parte por un nuevo concepto: el espín (o giro) del electrón, que se estudiará con bastante detalle en este capítulo.

Otra idea física nueva, conocida como principio de exclusión, también es presentada aquí. Este principio es sumamente importante para comprender la tabla periódica y las propiedades de átomos multielectrónicos. De hecho, las implicaciones del principio de exclusión tienen casi el mismo alcance que las de la ecuación de Schrödinger misma.

9.1 MAGNETISMO ORBITAL Y EFECTO ZEEMAN NORMAL

Un electrón en órbita alrededor del núcleo de un átomo debe generar efectos magnéticos, de manera muy semejante a los que se generan cuando una corriente eléctrica circula en el alambre de un circuito. En particular, el movimiento de la carga genera un campo magnético dentro del átomo, y éste, como un todo, está sometido a fuerzas y torcas cuando se coloca en un campo magnético externo. Todas estas interacciones magnéticas pueden describirse en términos de una sola propiedad del átomo: el momento dipolar magnético.

Para calcular el momento magnético de una carga en órbita, se compara con un alambre que conduce corriente eléctrica en un circuito. El momento $\boldsymbol{\mu}$ de tal circuito tiene magnitud $|\boldsymbol{\mu}| = iA$, donde i es la corriente y A es el área encerrada por el circuito. La dirección de este momento es perpendicular al plano del circuito, y su sentido está dado por la regla de la mano derecha, como se muestra en la figura 9.1a. Esta caracterización de un circuito de corriente como un dipolo magnético implica que su comportamiento magnético es semejante al de una barra imantada, cuyo eje norte-sur está dirigido a lo largo de $\boldsymbol{\mu}$ (figura 9.1b).

Para una carga q en circulación, la corriente (promediada con respecto al tiempo) es simplemente q/T, donde T es el periodo orbital. Además, A/T es justo el área barrida por unidad de tiempo y es igual a la magnitud del momento angular $|\mathbf{L}|$ de la carga en órbita, dividida entre el doble de la masa de la partícula, m.[1] Esta relación se comprueba con facilidad para órbitas circulares, donde $|\mathbf{L}| = mvr$, $v = 2\pi r/T$, y $A = \pi r^2$, de modo que

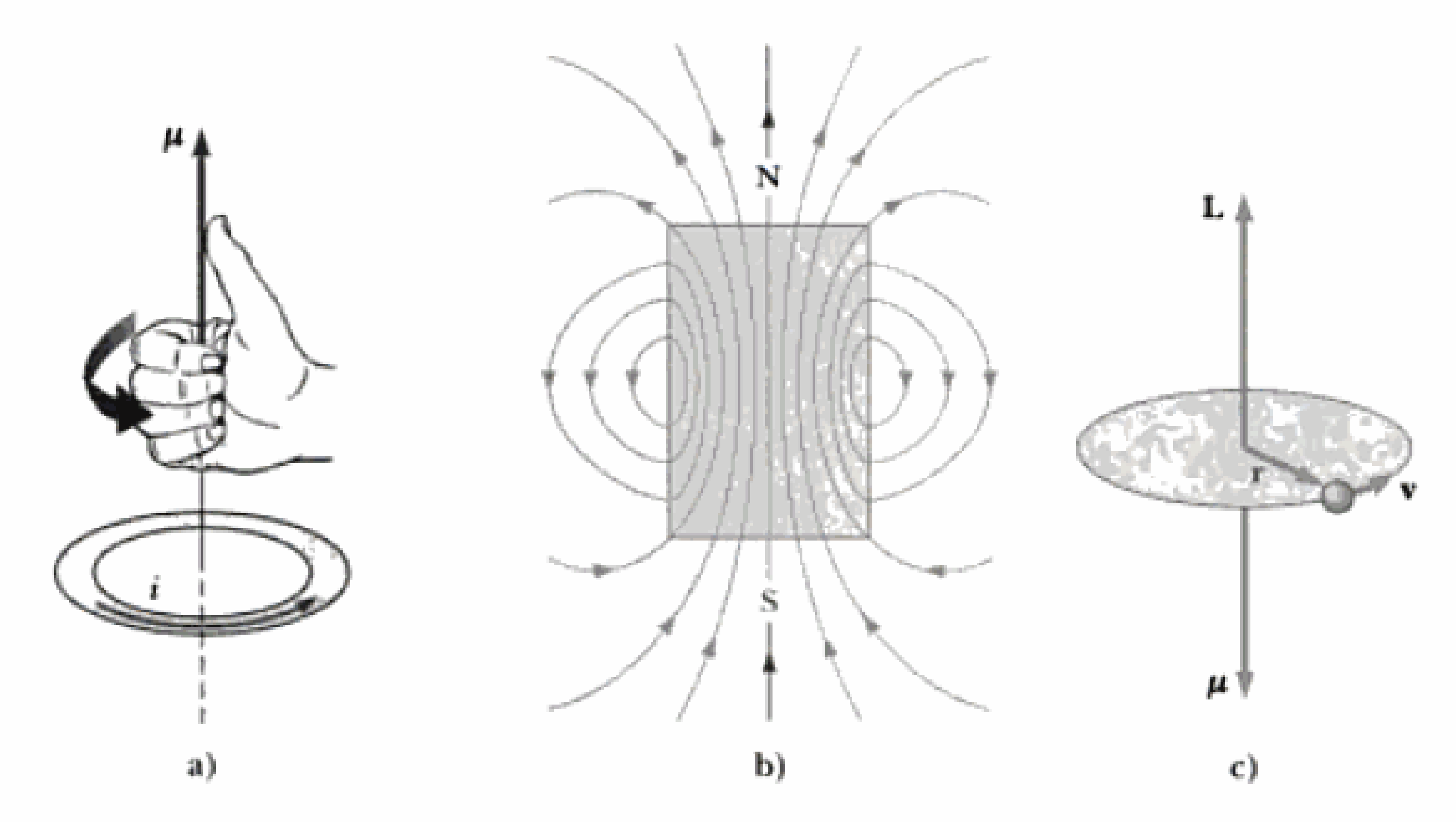


Figura 9.1 a) El campo magnético en el espacio que rodea una espira de alambre conductora de corriente es el de un dipolo magnético con momento $\boldsymbol{\mu}$ perpendicular al plano de la espira. El vector $\boldsymbol{\mu}$ apunta en la dirección del pulgar si los dedos de la mano derecha se cierran en el sentido de la corriente i (regla de la mano derecha). b) El campo magnético en el espacio que rodea una barra imantada también es un dipolo magnético. El vector $\boldsymbol{\mu}$ del momento dipolar apunta del polo sur al polo norte del imán. c) El momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ de un electrón en órbita con momento angular $\mathbf{L}$. Debido a que la carga del electrón es negativa, $\boldsymbol{\mu}$ y $\mathbf{L}$ apuntan en direcciones opuestas.

[1] Ésta es una de las leyes del movimiento planetario de Kepler, que Newton demostró después que es una consecuencia de cualquier fuerza central.

$$|\mathbf{L}| = m\left(\frac{2\pi r}{T}\right)r = 2m\left(\frac{\pi r^2}{T}\right) = 2m\left(\frac{A}{T}\right) \qquad \text{o bien,} \qquad \frac{A}{T} = \frac{|\mathbf{L}|}{2m}$$

El mismo resultado es válido para un movimiento orbital de cualquier tipo (vea el problema 2), de modo que $|\boldsymbol{\mu}| = iA$ se convierte en

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{q}{2m}\mathbf{L} \tag{9.1}$$

Momento magnético de una carga en órbita

para el momento magnético de una carga q en órbita. Debido a que $\mathbf{L}$ es perpendicular al plano orbital, también lo es $\boldsymbol{\mu}$. Tal vez sea conveniente que compruebe que el sentido del vector descrito por la ecuación 9.1 coincide con el esperado al aplicar la regla de la mano derecha. Así, el vector de momento magnético está dirigido a lo largo del vector de momento angular, y su magnitud es establecida por la constante de proporcionalidad $q/2m$, denominada *razón giromagnética*. Para electrones, $q = -e$, de modo que la dirección de $\boldsymbol{\mu}$ *apunta en sentido contrario* a la dirección de $\mathbf{L}$ (figura 9.1c).

A escala atómica, la unidad elemental del momento angular es $\hbar$. Se concluye que la unidad natural para momentos atómicos es la cantidad $e\hbar/2m_e$, denominada **magnetón de Bohr** y designada por el símbolo μ_B. Su valor en unidades SI (joules/tesla) es

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9.274 \times 10^{-24}\,\text{J/T} \tag{9.2}$$

Magnetón de Bohr

Debido a que $\boldsymbol{\mu}$ es proporcional a $\mathbf{L}$, el momento magnético orbital está cuantizado, como se ilustra en la figura 9.2. En particular, la componente z del momento magnético orbital está determinada por el valor del número cuántico magnético m_ℓ como

$$\mu_z = -\frac{e}{2m_e}L_z = -\frac{e\hbar}{2m_e}m_\ell = -\mu_B m_\ell \tag{9.3}$$

Al igual que con el momento angular, el vector de momento magnético puede considerarse como si tuviese un movimiento de precesión alrededor del eje z, preservando entonces este valor nítido de μ_z a la vez que representa como vagas (difusas) a las componentes restantes μ_x y μ_y.

La interacción de un átomo con un campo magnético aplicado depende del tamaño y la orientación del momento magnético del átomo. Suponga que a éste se le aplica un campo externo $\mathbf{B}$ a lo largo del eje z. Según el electromagnetismo clásico, el átomo experimenta un torca

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \tag{9.4}$$

Un momento magnético posee movimiento de precesión en un campo magnético

que tiende a alinear su momento con el campo aplicado. En vez de alinearse a sí mismo con $\mathbf{B}$, no obstante, ¡el momento posee en realidad una precesión alrededor de la dirección del campo! Esta precesión inesperada se presenta porque $\boldsymbol{\mu}$ es proporcional al momento angular $\mathbf{L}$. El movimiento es semejante al de un trompo giratorio con movimiento de precesión en el campo gravitacional de la Tierra. La torca o momento de torsión gravitacional que actúa para volcarlo resulta más bien en un movimiento de precesión debido al momento

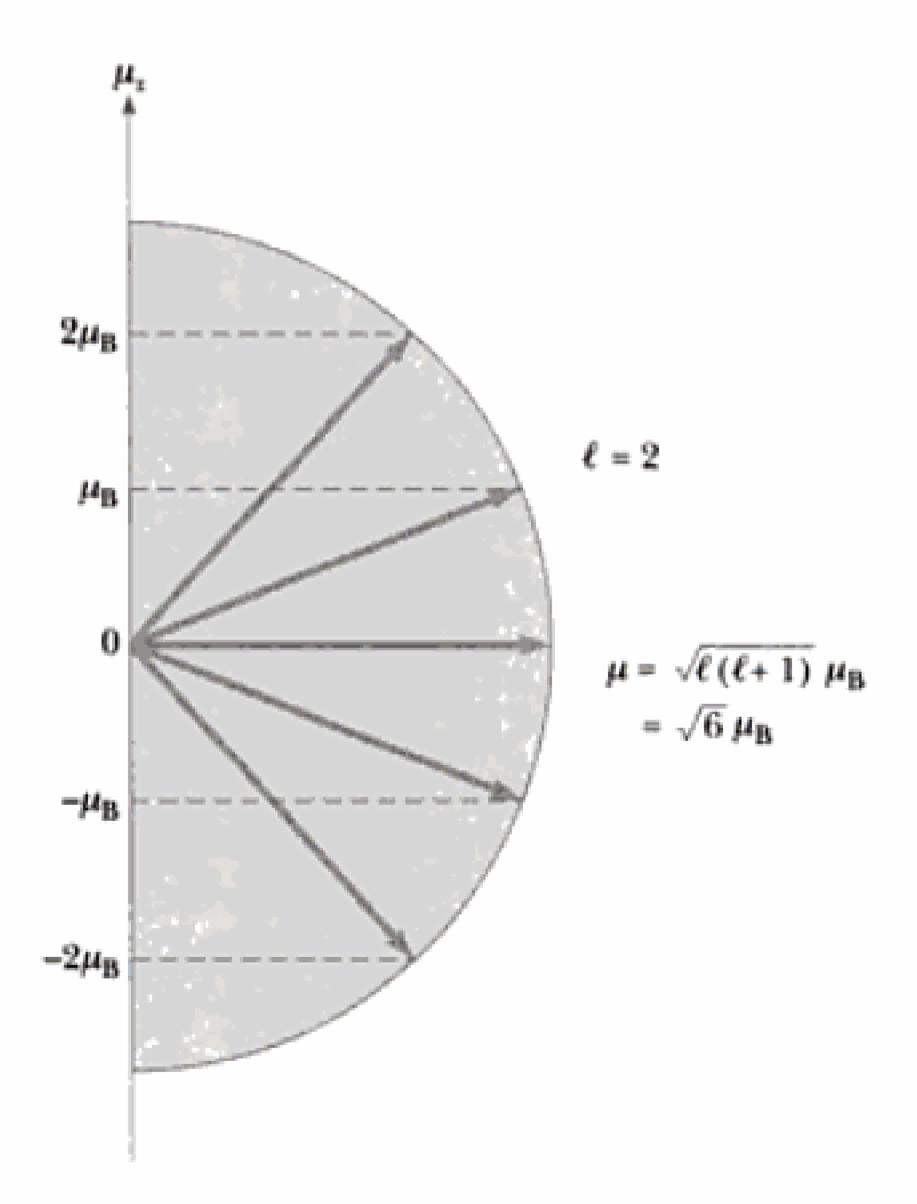


Figura 9.2 Orientaciones espaciales y componentes z del momento magnético orbital para $\ell = 2$. Hay $2\ell + 1 = 5$ orientaciones posibles.

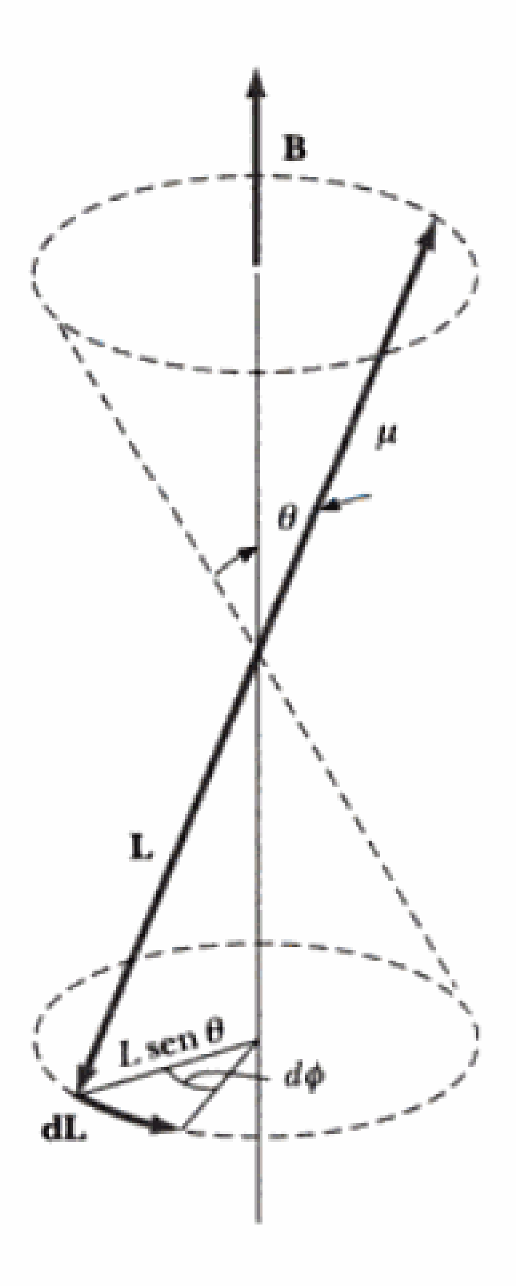


Figura 9.3 Precesión de Larmor del momento orbital $\boldsymbol{\mu}$ en un campo magnético aplicado **B.** Debido a que $\boldsymbol{\mu}$ es proporcional a **L,** el momento de torsión del campo aplicado hace que el vector de momento $\boldsymbol{\mu}$ tenga un movimiento de precesión alrededor de la dirección de **B** con frecuencia $\omega_L = eB/2m_e$.

angular que posee el trompo giratorio. Volviendo al caso atómico, debido a que $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$, a partir de la ecuación 9.4, se observa que el cambio en el momento angular, **dL,** siempre es perpendicular tanto a **L** como a **B.** En la figura 9.3 se muestra el movimiento (de precesión) que resulta. Para átomos en un campo magnético, esto se denomina **precesión de Larmor.**

Basándonos en la geometría de la figura 9.3 se observa que, en un tiempo dt, el ángulo de precesión aumenta por $d\phi$, donde

$$L \operatorname{sen}\theta \cdot d\phi = |d\mathbf{L}|$$

Pero las ecuaciones 9.1 y 9.4 pueden combinarse para obtener

$$|d\mathbf{L}| = |\boldsymbol{\tau}|\, dt = \left|\frac{q}{2m_e} LB \operatorname{sen}\theta\right| dt$$

Para electrones se toma $q = -e$, y la frecuencia de precesión, o **frecuencia de Larmor** ω_L, se convierte en

$$\omega_L = \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{L \operatorname{sen}\theta}\frac{|d\mathbf{L}|}{dt} = \frac{e}{2m_e}B \tag{9.5}$$

Es útil introducir el cuanto de energía $\hbar\omega_L$ asociado con la frecuencia de Larmor ω_L. Esta energía está relacionada con el trabajo necesario para reorientar el momento atómico en sentido contrario al de la torca del campo

aplicado. Si se recuerda que el trabajo de una torca τ para producir un desplazamiento $d\theta$ es $dW = \tau\, d\theta$, a partir de la ecuación 9.4 se tiene que

$$dW = -\mu B \operatorname{sen} \theta\, d\theta = d(\mu B \cos \theta) = d(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B})$$

El signo negativo significa que la torca externa debe oponerse a la torca producida por el campo magnético **B.** El trabajo realizado se almacena como energía potencial de orientación del dipolo en el campo. Al escribir $dW = -dU$, la **energía potencial magnética** U se identifica como

$$U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \tag{9.6}$$

La energía de un momento magnético depende de su orientación en un campo magnético

La ecuación 9.6 expresa el hecho de que la energía de un dipolo magnético en un campo magnético externo **B** depende de su orientación en este campo. La energía magnética es mínima cuando $\boldsymbol{\mu}$ y **B** están alineados; en consecuencia, esta alineación es la orientación preferida. Debido a que las orientaciones posibles de $\boldsymbol{\mu}$ están restringidas por cuantización del espacio, también la energía magnética está cuantizada, por consiguiente. Si el eje z se considera a lo largo de **B** y se combinan las ecuaciones 9.1, 9.3 y 9.6, se obtiene

$$U = \frac{e}{2m_e}\, \mathbf{L} \cdot \mathbf{B} = \frac{eB}{2m_e}\, L_z = \hbar \omega_L m_\ell \tag{9.7}$$

En base a la ecuación 9.7 se observa que la energía magnética de un electrón atómico depende del número cuántico magnético m_ℓ (¡que se denomina así debido a esta dependencia!) y, por consiguiente, está cuantizada. La energía total de este electrón es la suma de su energía magnética U más cualquier otra energía que pudiera poseer en ausencia de un campo aplicado; por ejemplo, E_0. En consecuencia,

$$E = E_0 + \hbar \omega_L m_\ell \tag{9.8}$$

Para el hidrógeno atómico, E_0 depende sólo del número cuántico principal n; en átomos más complejos, la energía atómica también varía según la etiqueta de la subcapa ℓ, como se analizará con más detalle en la sección 9.5.

A diferencia de las energías, las funciones de onda de los electrones atómicos permanecen sin cambio con la aplicación de un campo magnético. Este resultado sorprendente puede entenderse, en parte, al reconocer que, según la física clásica, el único efecto del campo es provocar la precesión (de Larmor) alrededor de la dirección de **B.** Para electrones atómicos, lo anterior se traduce en una precesión de **L** alrededor del eje z. No obstante, tal precesión ya está implícita en la representación semiclásica de las órbitas electrónicas en ausencia de campos externos, como requiere la nitidez de L_z mientras L_x y L_y permanecen vagas. Desde este punto de vista, ¡la aplicación de un campo magnético simplemente transforma esta *precesión virtual*[2] en una verdadera, con la frecuencia de Larmor!

[2] En un campo magnético cero, la precesión del vector clásico puede considerarse virtual (no real) ya que, aun cuando para L_x (o L_y) pueda no obtenerse el mismo valor en mediciones consecutivas, el valor medio $\langle L_x \rangle$ (o $\langle L_y \rangle$) no cambia con el tiempo. Con **B** diferente de cero, no obstante, es posible demostrar que $(d^2/dt^2)\,\langle L_x \rangle = -\omega_L^2 \langle L_x \rangle$ (y de manera semejante para $\langle L_y \rangle$), indicando que $\langle L_x \rangle$ (y $\langle L_y \rangle$) oscila a la frecuencia de Larmor ω_L.

EJEMPLO 9.1 Energía magnética del electrón en el hidrógeno

Calcule la energía magnética y la frecuencia de Larmor para un electrón de hidrógeno en el estado $n = 2$, suponiendo que el átomo está en un campo magnético de intensidad $B = 1$ T.

Solución Tomando el eje z a lo largo de **B**, la energía magnética se calcula a partir de la ecuación 9.7 como

$$U = \frac{eB}{2m_e} L_z = \frac{e\hbar}{2m_e} Bm_\ell = \hbar\omega_L m_\ell$$

Para un campo de 1 T, el valor del cuanto de energía $\hbar\omega_L$ es

$$\hbar\omega_L = \frac{e\hbar}{2m_e} B = \mu_B B = (9.27 \times 10^{-24}\ \text{J/T})(1\ \text{T})$$

$$= 9.27 \times 10^{-24}\ \text{J} = 5.79 \times 10^{-5}\ \text{eV}$$

Con $n = 2$, ℓ puede ser 0 o 1, y m_ℓ es 0 (dos veces) y ± 1. Así, la energía magnética U puede ser 0, $+\hbar\omega_L$ o $-\hbar\omega_L$. En tales aplicaciones, el cuanto de energía $\hbar\omega_L$ se denomina **energía de Zeeman.** Esta energía de Zeeman dividida entre $\hbar$ es la frecuencia de Larmor:

$$\omega_L = \frac{5.79 \times 10^{-5}\ \text{eV}}{6.58 \times 10^{-16}\ \text{eV}\cdot\text{s}} = 8.80 \times 10^{10}\ \text{rad/s}$$

La aparición de líneas adicionales en el espectro de un átomo que está en un campo magnético constituye evidencia de la existencia de los momentos atómicos. Considere un átomo de hidrógeno en su primer estado excitado ($n = 2$). Para $n = 2$, los valores de ℓ pueden ser 0 y 1. El campo magnético no afecta el estado para el cual $\ell = 0$, ya que entonces $m_\ell = 0$. Para $\ell = 1$, no obstante, m_ℓ puede tomar los valores 1, 0 y -1, y el primer estado excitado se separa en tres niveles debido al campo magnético (Figura. 9.4). La línea de emisión original (de Lyman) se sustituye por las tres líneas que se muestran en la

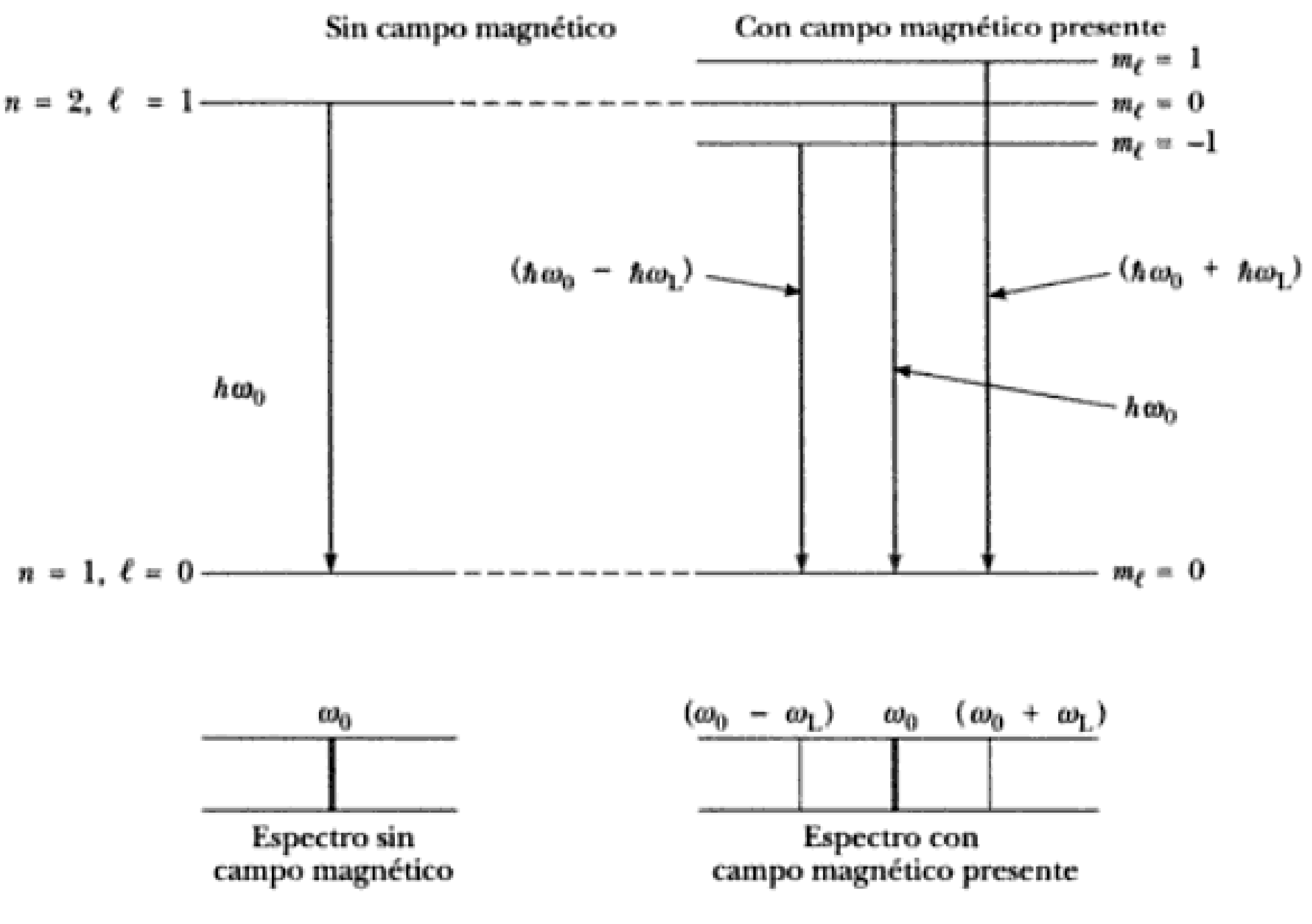


Figura 9.4 Separaciones de nivel para los primeros estados excitados y para el estado base de un átomo de hidrógeno inmerso en un campo magnético **B.** Un electrón en uno de los estados excitados decae al estado base con la emisión de un fotón, originando líneas de emisión en ω_0, $\omega_0 + \omega_L$, y $\omega_0 - \omega_L$. Éste es el efecto Zeeman normal. Cuando $\mathbf{B} = 0$, sólo se observa la línea en ω_0.

figura 9.4. La línea central aparece a la misma frecuencia ω_0 a la que aparecería sin un campo magnético. Esta línea está flanqueada a ambos lados por nuevas líneas a frecuencias $\omega_0 \pm \omega_L$. En consecuencia, el campo magnético separa la línea de emisión original en tres líneas. Debido a que ω_L es proporcional a B, la separación crece linealmente con la intensidad del campo aplicado. Este efecto de **separación de líneas espectrales por un campo magnético se denomina efecto Zeeman normal,** en honor de su descubridor, Pieter Zeeman.

Efecto Zeeman normal

Los espectros de Zeeman de átomos excitados a estados superiores deben ser más complicados, ya que hay muchas más separaciones de nivel. En la figura 9.5 se muestran las líneas de Zeeman esperadas y las transiciones atómicas que las originan, para electrones excitados al estado $n = 3$ del hidrógeno. Cada línea tiene, en todas partes, de 2 a 6 satélites que la acompañan a frecuencias alejadas de la original por múltiplos de la frecuencia de Larmor. Sin embargo, el espectro de Zeeman observado no es tan complicado debido a ciertas

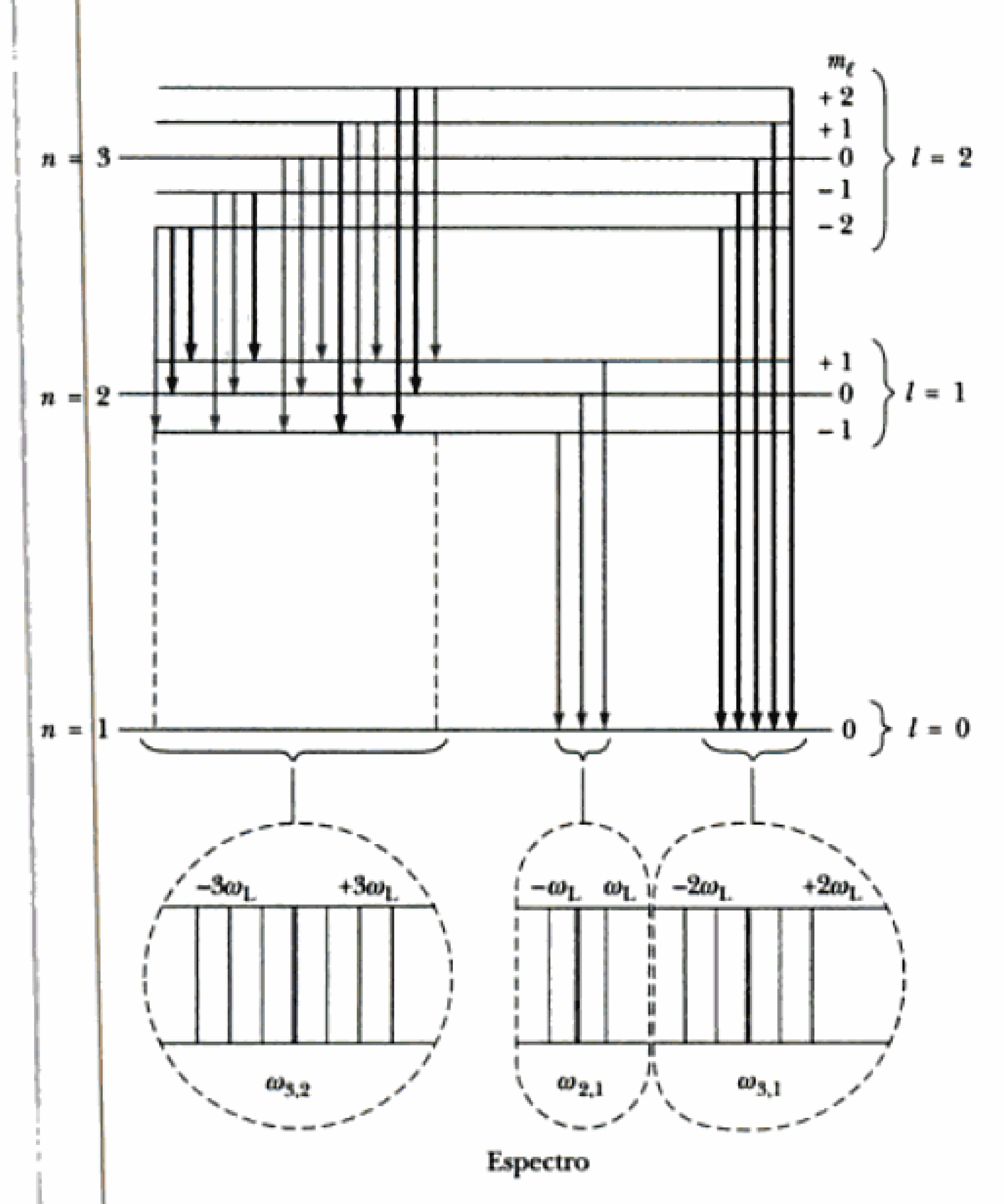


Figura 9.5 Líneas espectrales de Zeeman y las transiciones atómicas subyacentes que las originan para un electrón excitado hasta el estado $n = 3$ del hidrógeno. Debido a reglas de selección, en realidad sólo ocurren las transiciones que aparecen en gris. Transiciones desde los orbitales $n = 3$, $l = 1$ (no se muestran) hasta el estado $n = 1$ originan las líneas grises que se muestran en la ilustración inferior derecha.

reglas de selección que limitan las transiciones a aquellas para las cuales ℓ cambia por 1 y m_ℓ lo hace por 0, +1 o −1. El resultado es que los satélites aparecen *sólo* a la frecuencia de Larmor y no a múltiplos de esta frecuencia. Las reglas de selección expresan la conservación del momento angular para el sistema, tomando en cuenta el momento angular del fotón emitido. (Vea la sección 8.5.)

Por último, incluso la separación de una línea de emisión en un triplete de líneas equidistantes, según se predice aquí, denominada efecto Zeeman normal, a menudo no se observa. Es más común observar separaciones en cuatro, seis e, incluso, más líneas a diferentes distancias entre sí. Este es el efecto Zeeman anómalo, cuyos orígenes se encuentran en la existencia del espín del electrón.

9.2 GIRO DEL ELECTRÓN

Las separaciones Zeeman anómalas constituyen sólo uno de varios fenómenos que no se explican por las interacciones magnéticas que se han analizado hasta el momento. Otro de estos fenómenos es la duplicidad de muchas líneas espectrales, denominada estructura fina. Ambos efectos se atribuyen a la existencia de un nuevo momento magnético —el momento del espín— que surge debido al movimiento de rotación del electrón alrededor de su eje.

Se ha visto que el movimiento orbital de la carga produce efectos magnéticos que pueden describirse en términos del momento magnético orbital $\boldsymbol{\mu}$ dado por la ecuación 9.1. De manera semejante, un objeto cargado en rotación produce efectos magnéticos relacionados con el momento magnético del espín, $\boldsymbol{\mu}_s$. El momento del espín se encuentra al observar que un cuerpo cargado en rotación puede considerarse como una colección de elementos de carga Δq con masa Δm, todos rotando en órbitas circulares alrededor de una línea fija, el eje de rotación (figura 9.6). A cada uno de estos cuerpos puede aplicarse la ecuación 9.1, sustituyendo a $\mathbf{L}$ con $\mathbf{L}_i$, el momento angular orbital del i-ésimo

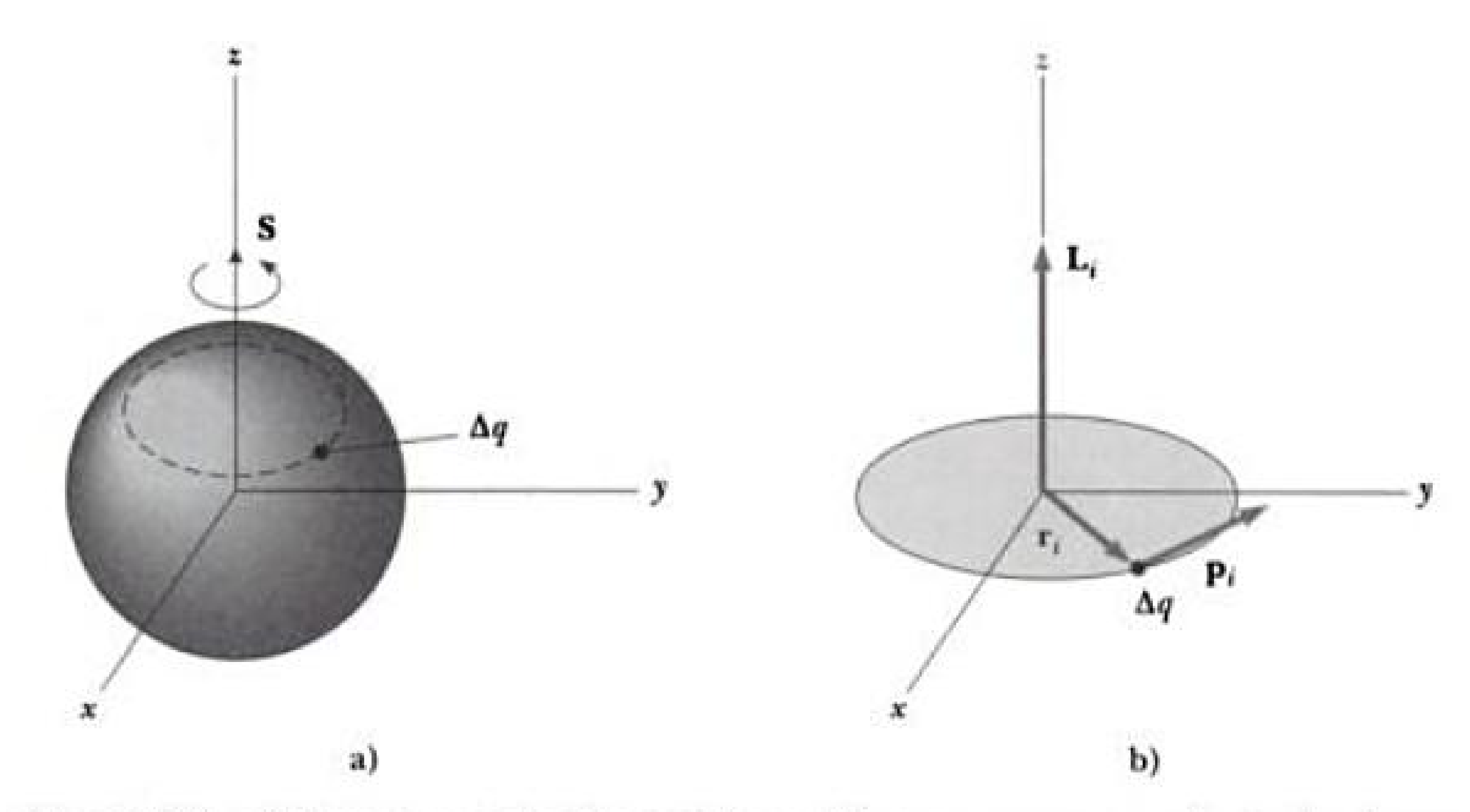


Figura 9.6 a) Una carga q girando puede considerarse como un conjunto de elementos de carga Δq que giran alrededor de una línea fija, el eje de rotación. b) Trayectoria circular descrita por uno de tales elementos de carga. El momento angular de este elemento de carga, $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$, está a lo largo del eje de rotación. Los momentos magnéticos que acompañan a estos elementos de carga en órbita se suman para obtener el momento magnético de rotación total, o momento magnético de espín, de la carga q.



BIOGRAFÍA

OTTO STERN

(1888–1969)

Otto Stern fue uno de los físicos experimentales más destacados del siglo XX. Nacido y educado en Alemania (donde obtuvo su Ph. D. en fisicoquímica en 1912), al principio trabajó con Einstein en cuestiones teóricas de teoría molecular, sobre todo en la aplicación de las nuevas ideas cuánticas a las teorías del calor específico de los sólidos. Aproximadamente a partir de 1920, Stern se dedicó a la verdadera obra de su vida, el desarrollo del método del haz molecular, que le permitió investigar las propiedades de átomos libres o aislados y que culminó en 1945, cuando fue galardonado con el premio Nobel. En este método, una delgada corriente de átomos se introduce en una cámara al alto vacío, donde los átomos están libres y, por tanto, es posible investigar las propiedades de átomos individuales aplicando campos externos o utilizando alguna otra técnica.

Stern usó por vez primera este método para confirmar que los átomos de plata satisfacen la distribución de velocidades de Maxwell. Poco después, en una serie de experimentos elegantes y difíciles que realizó con Walter Gerlach, demostró que los átomos de plata obedecen la cuantización del espacio, y tuvo éxito al medir el momento magnético del átomo de plata. En el periodo de 1923 a 1933, dirigió un extraordinario y productivo laboratorio de haces moleculares en la Universidad de Hamburgo. Con sus estudiantes y colaboradores, demostró directamente la naturaleza ondulatoria de los átomos de helio y midió los momentos magnéticos de muchos átomos. Por último, con un gran esfuerzo, pudo medir los muy pequeños momentos magnéticos del protón y el deuterón. Fue gracias a estas últimas importantes mediciones fundamentales que ganó el premio Nobel. En relación con la medición del momento magnético del protón, Victor Weisskopf narra una interesante historia, que seguramente alegrará el corazón de todos los que se dedican a la experimentación:

"Había un seminario organizado por el grupo de teóricos de Gotinga, en el que Stern dio una conferencia sobre las mediciones del momento magnético del protón que estaba por terminar. Explicó su aparato, pero no mencionó el resultado. Tomó una hoja de papel y se dirigió a cada uno de los presentes diciendo: '¿Cuál es su predicción del momento magnético del protón?' Cada uno de los teóricos, desde Max Born hasta Victor Weisskopf, respondió. 'Bueno, por supuesto, el gran detalle con la ecuación de Dirac es que predice un momento magnético de un magnetón de Bohr ¡para una partícula cuyo espín es igual a un medio!' Luego nos pidió escribir nuestra predicción, y todos escribieron: 'un magnetón'. Luego, dos meses después, volvió para dar una conferencia sobre el experimento terminado, que demostró que el valor era igual a 2.8 magnetones. Luego proyectó en la pantalla el documento con nuestros pronósticos. Fue una experiencia que nos dio mucho en qué pensar".*

En protesta contra los nazis por el despido de algunos de sus más cercanos colaboradores, Stern renunció a su puesto en la Universidad de Hamburgo y en 1933 partió al Carnegie Institute of Technology en Estados Unidos. Ahí trabajó en investigaciones sobre el haz molecular hasta que se retiró en 1946.

*Tomado del libro de Victor F. Weisskopf, *Physics in the Twentieth Century; Selected Essays: My Life as a Physicist*, Cambridge, MA, The MIT Press, 1972.

(Foto cortesía de la Universidad de Hamburgo, Alemania.)

elemento de carga (figura 9.6b). Si la razón entre carga y masa es uniforme en todo el cuerpo, entonces $\Delta q/\Delta m$ es la razón de carga total q a masa total m_e; y para el momento del espín se obtiene

$$\boldsymbol{\mu}_s = \frac{q}{2m_e}\sum \mathbf{L}_i = \frac{q}{2m_e}\mathbf{S} \tag{9.9}$$

Una carga en órbita genera un momento magnético de espín

donde **S**, de momento angular del *espín*, es el momento angular total de rotación. El momento angular del espín **S** apunta a lo largo del eje de rotación, según la regla de la mano derecha, como se muestra en la figura 9.6; su magnitud depende del tamaño y de la forma del objeto, así como de su velocidad de rotación. Si la razón entre carga y masa no es uniforme, la razón giromagnética en la ecuación 9.9, $q/2m_e$, debe multiplicarse por una constante adimensional, el **factor g,** cuyo valor refleja la distribución de carga–masa detallada en el interior del cuerpo. Observe que tener factores g diferentes de la unidad implica una distribución de carga que no está estrechamente vincula-

da con la distribución de masa, lo cual constituye una circunstancia poco común pero que no debe excluirse.[3]

La existencia de un momento magnético del espín para el electrón fue demostrada por primera vez en 1921 en un experimento clásico realizado por Otto Stern y Walter Gerlach. En esa época se desconocía el espín del electrón; el experimento de Stern-Gerlach fue concebido originalmente para demostrar la cuantización del espacio asociada con electrones en órbita en los átomos. En su experimento, un haz de átomos de plata se hacía pasar a través de un campo magnético *no uniforme* creado en el hueco entre las caras del polo de un gran imán. Luego, el haz era detectado al depositarlo en una placa colectora de vidrio (figura 9.7). Un campo no uniforme ejerce una fuerza sobre cualquier momento magnético, de modo que cada átomo es desviado en el hueco por una cantidad regida por la orientación de su momento con respecto a la dirección de no homogeneidad (el eje z), como se ilustra en la figura 9.7b. Si las direcciones del momento se restringen mediante cuantización del espacio, como en la figura 9.2, también se restringen las desviaciones. Así, el haz atómico debe separarse en un número de componentes discretas, una para cada orientación de momento distinta presente en el haz. Esto contradice la expectativa clásica de que cualquier orientación de momento (y, por tanto, cualquier desviación del haz) es posible, y todo debería combinarse para producir un abanico continuo del haz atómico (figura 9.7c).

El experimento de Stern-Gerlach produjo un resultado asombroso: el haz atómico de plata estaba separado de manera evidente, pero sólo en *dos* componentes, ¡no en el número impar $(2\ell + 1)$ esperado a partir de la cuantización del espacio de los momentos orbitales! Esto es de lo más extraordinario cuando se sabe que los átomos de plata en su estado base carecen de momento angular orbital $(\ell = 0)$, debido a que el electrón exterior en la plata normalmente debe estar en un estado s. Este resultado fue tan sorprendente que el experimento fue repetido en 1927 por T. E. Phipps y J. B. Taylor con un haz de átomos de hidrógeno en vez de plata, eliminando así todas las incertidumbres que se generan con el uso de los átomos de plata, más complejos. Los resultados, no obstante, permanecieron inmutables. A partir de estos experimentos, es obligatorio concluir que hay alguna contribución al momento magnético atómico distinta del movimiento orbital de los electrones y que este momento está sujeto a cuantización del espacio.

Lo que se sabe actualmente sobre esto se remonta al artículo de 1925 de Samuel Goudsmit y George Uhlenbeck, entonces estudiantes egresados de la Universidad de Leiden. Goudsmit y Uhlenbeck consideraban que el momento desconocido tenía su origen en el movimiento de giro de los electrones atómicos, donde el momento angular del espín cumplía las mismas reglas de cuantización que el momento angular orbital. El momento magnético que se observó en el experimento de Goudsmit y Uhlenbeck se atribuye al espín del electrón exterior en la plata. Debido a que todas las orientaciones permitidas del momento del espín deben estar representadas en el haz atómico, la separación observada constituye una confirmación espectacular de la cuantización del espacio aplicada al espín del electrón, donde el número de componentes $(2s + 1)$ indica el valor del número cuántico del espín, s.

El momento magnético del espín sugiere que el electrón puede considerarse como una carga en rotación, aunque la representación clásica de un cuerpo

[3]Es justo advertirle en este momento que no tome demasiado al pie de la letra el punto de vista clásico de un electrón como una pequeña bola cargada que gira alrededor de su eje. Aunque esta representación es de utilidad para introducir y visualizar en primera instancia el espín del electrón, no es técnicamente correcta. En las páginas 306 y 307 se analizan en detalle varios defectos de la representación clásica.

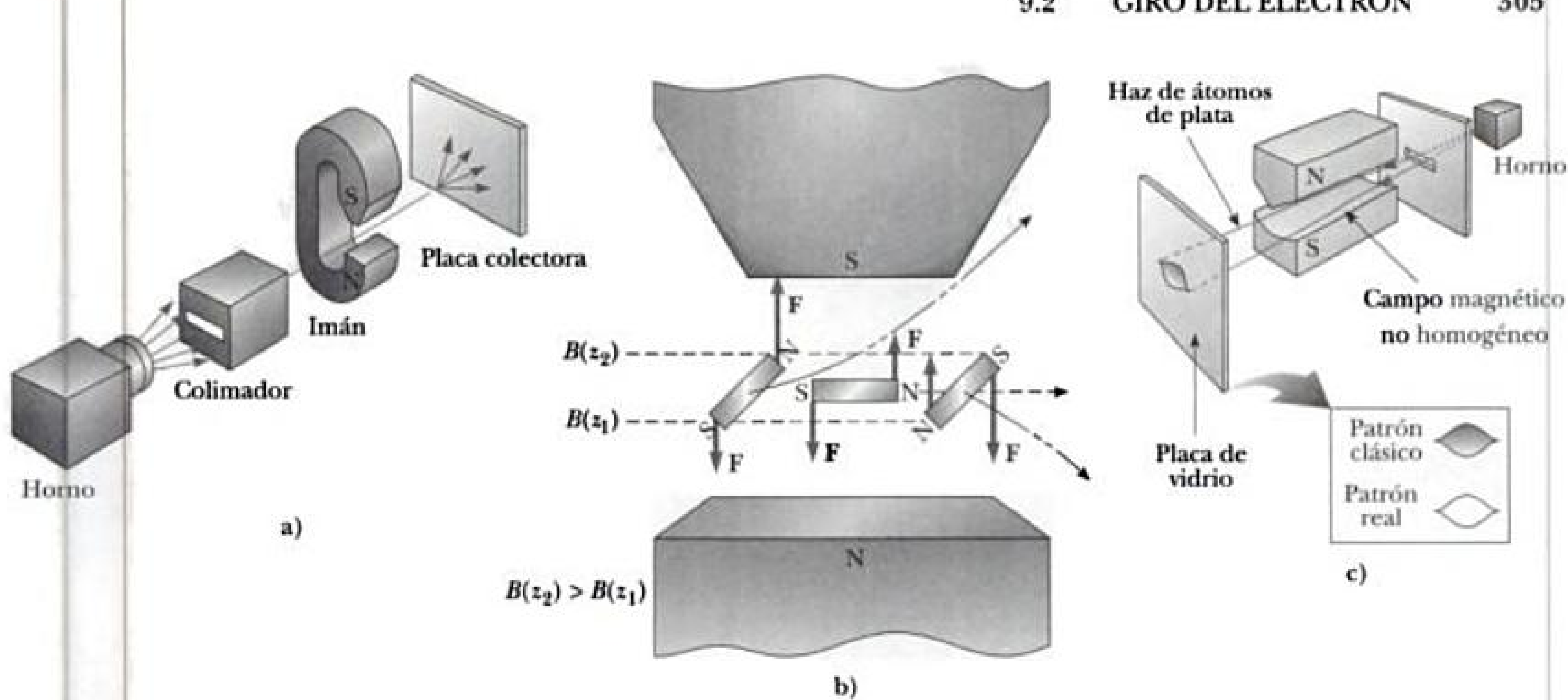


Figura 9.7 El experimento de Stern-Gerlach para detectar la cuantización espacial. a) Un haz de átomos de plata se hace pasar a través de un campo magnético no uniforme y se detecta en una placa colectora. b) Los átomos, con sus momentos magnéticos, equivalen a pequeñas barras imantadas. En un campo no uniforme, cada imán atómico experimenta una fuerza neta que depende de la orientación del imán. c) Si fuese posible cualquier orientación del momento, se vería en el colector un abanico continuo del haz. Para cuantización espacial, el abanico es sustituido por un conjunto de líneas discretas, una para cada orientación distinta del momento presente en el haz.

de carga giratorio debe ajustarse para poder integrar las propiedades ondulatorias de la materia. El modelo semiclásico resultante del espín del electrón puede resumirse como sigue:

Propiedades del espín del electrón

- ¡El **número cuántico del espín** s del electrón es $\frac{1}{2}$! Este valor se determina utilizando la observación de que un haz atómico que pasa a través del imán de Stern-Gerlach se separa justo en dos componentes ($= 2s + 1$). Por consiguiente, para el eje de giro hay exactamente dos orientaciones posibles, descritas como los estados de "espín hacia arriba" y "espín hacia abajo" del electrón. Esto es, de nuevo, cuantización del espacio, según las reglas de cuantización para el momento angular[4] aplicadas a un espín de $\frac{1}{2}$:

$$S_z = m_s\hbar \qquad \text{donde } m_s = \tfrac{1}{2} \text{ o bien } -\tfrac{1}{2} \tag{9.10}$$

Los dos valores $\pm\hbar/2$ para S_z corresponden a las dos orientaciones posibles de **S** que se muestran en la figura 9.8. El valor $m_s = +\frac{1}{2}$ se refiere al caso del espín hacia arriba, lo que algunas veces se indica con una flecha apuntando hacia arriba (↑) o, simplemente, con un signo positivo (+). De manera semejante, $m_s = -\frac{1}{2}$ es el caso del espín hacia abajo, (↓) o (−). El hecho de que el valor de s no seas entero sugiere que el espín no es sólo otra manifestación del movimiento orbital, como implica la representación clásica.

[4]Para números cuánticos enteros, del momento angular, la componente z está cuantizada como $m_s = 0, \pm 1, \ldots, \pm s$, lo que también puede escribirse como $m_s = s, s-1, \ldots, -s$. Para $s = \frac{1}{2}$, lo último implica $m_s = \frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$.

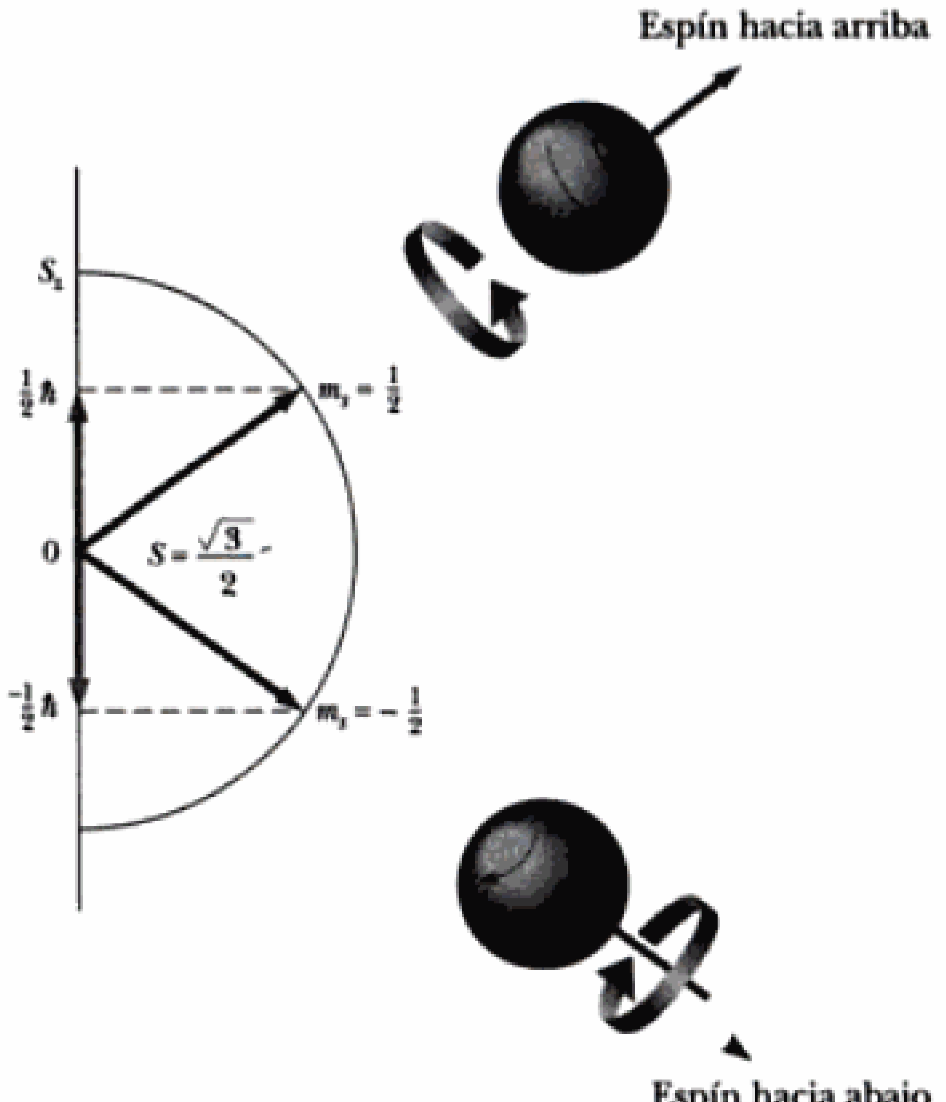


Figura 9.8 El momento angular de espín también presenta cuantización espacial. En esta figura se muestran las dos orientaciones permitidas del vector de espín **S** para una partícula con espín igual a $\frac{1}{2}$, como el electrón.

- La magnitud del momento angular del espín es

Momento angular de espín de un electrón

$$|\mathbf{S}| = \sqrt{s(s+1)}\,\hbar = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\hbar \tag{9.11}$$

¡y *nunca cambia*! **Este momento angular de rotación no puede cambiar de ninguna forma, ya que es una propiedad intrínseca del electrón,** como lo son su carga o su masa. El concepto de que $|\mathbf{S}|$ es fijo contradice las leyes clásicas, donde la velocidad de una carga en rotación debe desminuir al aplicar un campo magnético, debido a la fuerza electromotriz de Faraday que acompaña el campo magnético variable (el efecto diamagnético). Además, si el electrón se considera como una pelota que gira con un momento angular $\hbar\sqrt{3}/2$ sujeta a las leyes clásicas, ¡algunas partes de la pelota próximas a la superficie girarían a velocidades superiores a la velocidad de la luz![5] De todo lo anterior, se desprende que no debe exigirse demasiado de la representación clásica del electrón como una carga en rotación; en última instancia, el electrón giratorio es una entidad cuántica que define cualquier descripción clásica sencilla.

- El momento magnético del espín está dado por la ecuación 9.9 *con un factor g igual a 2*; es decir, el momento es el doble de lo que se espera de un cuerpo con un momento angular del espín dado por la ecuación 9.10. El

[5]Esto se concluye a partir del extremadamente pequeño tamaño del electrón. El tamaño exacto de éste se desconoce, pero se ha deducido un límite superior de 10^{-6} Å a partir de experimentos en donde los electrones han sido dispersados por otros electrones. Según ciertas teorías modernas, el electrón puede ser un verdadero objeto puntual; es decir, ¡una partícula de tamaño cero!

valor $g = 2$ se requiere por la desviación del haz producida por el imán de Stern-Gerlach; mientras más grande sea el momento magnético, mayor es la desviación del haz atómico. Como ya se mencionó, cualquier factor g distinto a la unidad implica una razón entre carga y masa no uniforme en la representación clásica. El factor g igual a 2 puede entenderse desde el punto de vista clásico, aunque sugiere una representación extraña que no puede tomarse en serio (vea el problema 8). El factor g correcto igual a 2 se predice en la teoría cuántica relativista del electrón planteada por Paul Dirac en 1929.[6]

Reconociendo el espín del electrón se observa que para especificar el estado interno, o de giro, de un electrón se requiere un número cuántico adicional, m_s. En consecuencia, el estado de un electrón en un átomo de hidrógeno debe describirse por los cuatro números cuánticos n, ℓ, m_ℓ y m_s. Además, ahora el momento magnético total tiene contribuciones orbital y de espín:

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 + \boldsymbol{\mu}_s = \frac{-e}{2m_e}(\mathbf{L} + g\mathbf{S}) \qquad (9.12)$$

Momento magnético total de un electrón

Debido al factor g del electrón, el momento total $\boldsymbol{\mu}$ ya no está en la misma dirección que el momento angular total (orbital más espín) $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. Algunas veces, la componente del momento total $\boldsymbol{\mu}$ a lo largo de $\mathbf{J}$ se denomina **momento efectivo.** Cuando el campo magnético $\mathbf{B}$ aplicado a un átomo es débil, el momento efectivo determina la energía magnética de los electrones atómicos de acuerdo con la ecuación 9.6. Como se descubrirá en la sección 9.3, el número de orientaciones posibles para $\mathbf{J}$ (y, entonces, para el momento efectivo) es par, lo que lleva al número par de líneas espectrales observadas en el efecto Zeeman anómalo.

EJEMPLO 9.2 Modelo semiclásico para el espín del electrón

Calcule los ángulos entre el eje z y el momento angular $\mathbf{S}$ del espín del electrón en los estados de espín hacia arriba y hacia abajo. ¿Cómo debe representarse la vaguedad inherente en las componentes x y y del momento angular del espín?

Solución Para el electrón, la magnitud del momento angular del espín es $|\mathbf{S}| = \hbar\sqrt{3}/2$, y la componente z del espín es $S_z = \pm\hbar/2$. Así, el vector de espín $\mathbf{S}$ está inclinado con respecto al eje z a ángulos dados por

$$\cos\theta = \frac{S_z}{|\mathbf{S}|} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Para el estado de espín hacia arriba, se toma el signo positivo y se obtiene $\cos\theta = 0.577$, o bien, $\theta = 54.7°$. La orientación del espín hacia abajo está descrita por el signo negativo, y se obtiene $\cos\theta = -0.577$, o bien, $\theta = 125.3°$. Debido a que la rotación del eje coincide con la dirección del vector de espín, estos son los ángulos que el eje de rotación forma con el eje z.

Aunque S_z es nítida en cualquiera de las orientaciones de espín hacia arriba o hacia abajo, tanto S_x como S_y son vagas. Esta vaguedad puede representarse si se permite que el vector de espín tenga un movimiento de precesión alrededor del eje z, como se hizo para el momento angular orbital en el capítulo 8.

[6] El factor g del electrón no es exactamente igual a 2. El mejor valor que puede reportarse hasta ahora es $g = 2.00232$. La discrepancia entre el valor pronosticado por Dirac y el valor observado se atribuye a la interacción del electrón con el "vacío". Tales efectos constituyen el tema de estudio de la electrodinámica cuántica, desarrollada por Richard Feynman a principios de la década de 1950.

Ejercicio 1 El fotón es una partícula con espín 1; es decir, para el fotón se tiene que $s = 1$. Calcule los ángulos posibles entre el eje z y el vector de espín del fotón.

Respuesta 45°, 90° y 135°.

EJEMPLO 9.3 Espectro Zeeman del hidrógeno, incluyendo el espín

Analice el espectro Zeeman producido por átomos de hidrógeno que inicialmente se encuentran en el estado $n = 2$ cuando se toma en cuenta el espín del electrón, suponiendo que los átomos están en un campo magnético de magnitud $B = 1$ T.

Solución Las energías del electrón poseen ahora una contribución magnética debida a los movimientos orbital y de espín. Al elegir el eje z a lo largo de la dirección de **B**, la energía magnética se calcula a partir de las ecuaciones 9.6 y 9.12:

$$U = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B} = \frac{e}{2m_e}\,B(L_z + gS_z) = \frac{e\hbar}{2m_e}\,B(m_\ell + gm_s)$$

La energía $(e\hbar/2m_e)B$ es la energía Zeeman $\mu_B B$, o bien, $\hbar\omega_L$; en este ejemplo, su valor es

$$\mu_B B = (9.27 \times 10^{-24}\ \text{J/T})(1\ \text{T}) = 9.27 \times 10^{-24}\ \text{J}$$
$$= 5.79 \times 10^{-5}\ \text{eV}$$

Para el estado $n = 2$ del hidrógeno, la energía de la capa es $E_2 = -(13.6\ \text{eV})/2^2 = -3.40$ eV. Debido a que m_ℓ toma los valores 0 (dos veces) y ± 1, hay una contribución orbital a la energía magnética $U_0 = m_\ell\hbar\omega_L$, como se analiza en el ejemplo 9.1. La presencia del espín del electrón separa cada una de éstas en un par de niveles, donde la contribución adicional (de espín) a la energía es $U_s = (gm_s)\hbar\omega_L$ (figura 9.9). Debido a que $g = 2$ y a que $m_s = \pm\frac{1}{2}$ para el electrón, la energía $|U_s|$ del espín en el campo es nuevamente la energía Zeeman $\hbar\omega_L$. En consecuencia, un electrón en esta capa puede poseer cualquiera de las energías

$$E_2, \quad E_2 \pm \hbar\omega_L, \quad E_2 \pm 2\hbar\omega_L$$

Al hacer una transición hacia abajo hasta la capa $n = 1$, con la energía $E_1 = -13.6$ eV, el estado final del electrón puede tener una energía $E_1 + \hbar\omega_L$, o bien, $E_1 - \hbar\omega_L$, según la orientación de su espín en el campo aplicado. En consecuencia, la energía de transición puede ser cualquiera de las siguientes:

$$\Delta E_{2,1}, \quad \Delta E_{2,1} \pm \hbar\omega_L, \quad \Delta E_{2,1} \pm 2\hbar\omega_L, \quad \Delta E_{2,1} \pm 3\hbar\omega_L$$

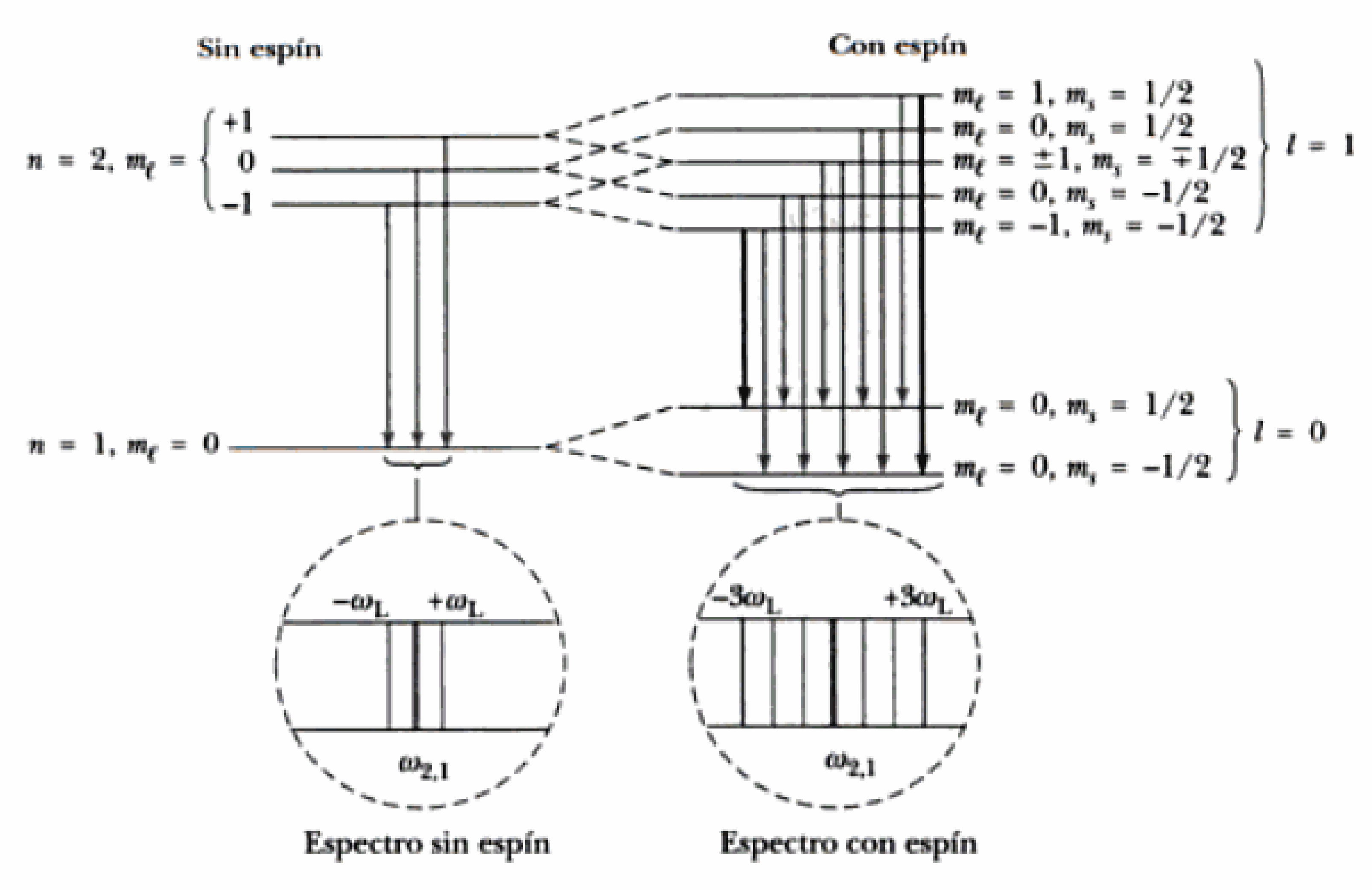
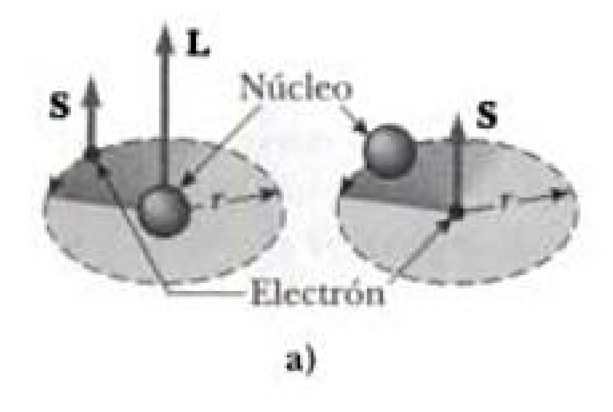


Figura 9.9 (Ejemplo 9.3.) Patrón Zeeman y transiciones atómicas subyacentes predichos para un electrón excitado hasta el estado $n = 2$ del hidrógeno, cuando se toma en cuenta el espín del electrón. De nuevo, las reglas de selección prohíben todas las transiciones, excepto las que aparecen en gris Debido a que se ignora la interacción espín-órbita, el efecto aquí mostrado (denominado efecto Paschen-Back) se observa sólo cuando se aplican campos magnéticos muy intensos.



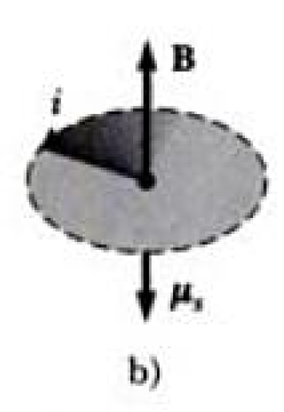


Figura 9.10 a) *Izquierda:* Un electrón con momento angular **L** en órbita alrededor del núcleo de un átomo. En la orientación de espín hacia arriba aquí mostrada, el momento angular del espín **S** del electrón está "alineado" con **L**. *Derecha:* Desde el punto de vista del electrón en órbita, el núcleo circula como se muestra. b) La carga nuclear que parece circular está representada por la corriente *i* y produce el campo magnético **B** en la posición del electrón. En presencia de **B**, el momento de espín del electrón $\boldsymbol{\mu}_s$ adquiere una energía magnética $U = -\boldsymbol{\mu}_s \cdot \mathbf{B}$. El momento de espín $\boldsymbol{\mu}_s$ apunta en dirección contraria al vector de espín **S** para el electrón con carga negativa. La dirección de **B** está dada por la regla de la mano derecha: con el pulgar de la mano derecha apuntando en dirección de la corriente *i*, los dedos proporcionan el sentido en que circula el campo **B** con respecto a la trayectoria de la órbita. La energía magnética es máxima en el caso que se muestra, donde **S** y **L** están "alineados".

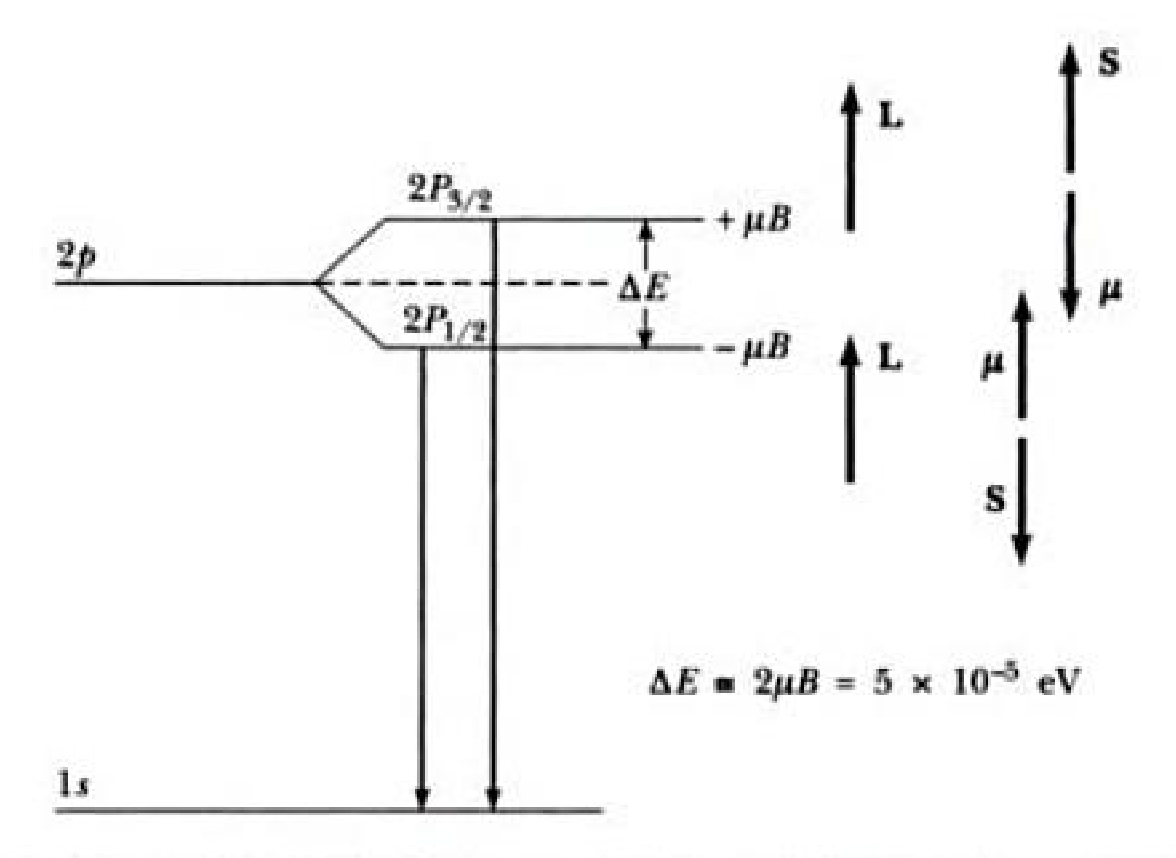


Figura 9.11 El nivel $2p$ del hidrógeno se divide debido al efecto espín-órbita en un doblete separado por la energía espín-órbita $\Delta E = 5 \times 10^{-5}$ eV. El estado de energía más alta es aquél en el cual el momento angular de espín del electrón se "alinea" con su momento angular orbital. El nivel 1*s* permanece sin cambio, ya que para el movimiento orbital con momento igual a cero no se genera ningún campo magnético.

Estos resultados pueden deducirse a partir del modelo de adición de vectores que se muestra en la figura 9.12a. Con $j = \frac{1}{2}$, para m_j sólo hay dos posibilidades; a saber, $m_j = \pm\frac{1}{2}$. Para $j = \ell \pm \frac{1}{2}$, el número de posibilidades $(2j + 1)$ para m_j se convierte en 2ℓ o $2\ell + 2$. Observe que el número de valores m_j siempre es *par* para un solo electrón, lo cual conduce a un número par de orientaciones en el modelo semiclásico para **J** (figura 9.12b), en vez del número impar predicho para sólo el momento angular orbital **L**.

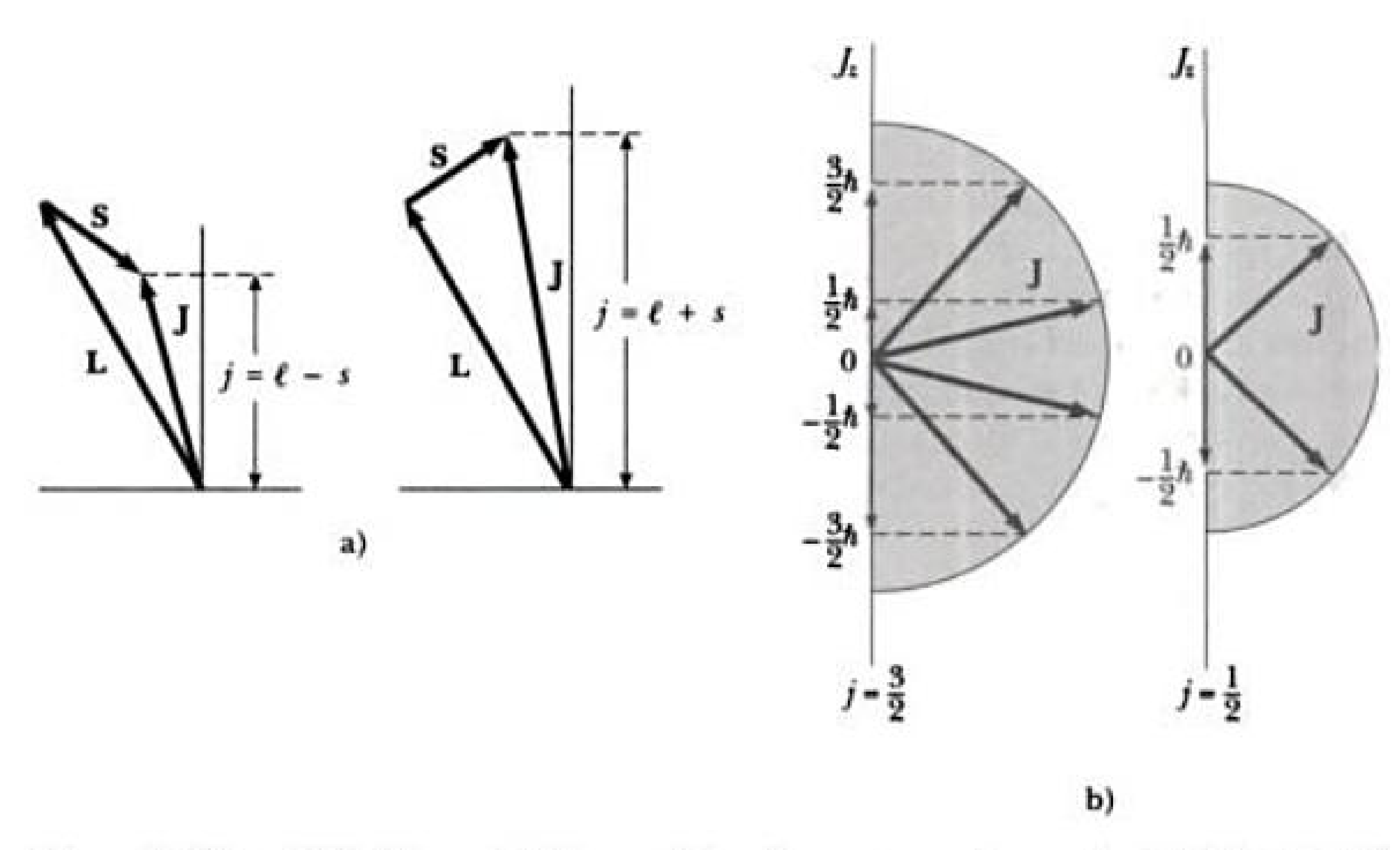


Figura 9.12 a) Modelo vectorial para determinar momento angular total $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ de un solo electrón. b) Orientaciones permitidas del momento angular total **J** para los estados $j = \frac{3}{2}$ y $j = \frac{1}{2}$. Observe que ahora hay un número par de orientaciones posibles, no el conocido número impar de la cuantización espacial de **L**.

Una notación espectroscópica común es escribir un subíndice después de una letra para indicar el momento angular total de un electrón atómico, donde la letra en sí (en este caso una mayúscula) describe su momento angular orbital. Por ejemplo, la notación $1S_{1/2}$ describe al estado base del hidrógeno, donde 1 indica que $n = 1$, la S indica que $\ell = 0$ y el subíndice $\frac{1}{2}$ denota que $j = \frac{1}{2}$. De manera semejante, las notaciones espectroscópicas para los estados $n = 2$ del hidrógeno son $2S_{1/2}$ ($\ell = 0, j = \frac{1}{2}$), $2P_{3/2}$ ($\ell = 1, j = \frac{3}{2}$) y $2P_{1/2}$ ($\ell = 1, j = \frac{1}{2}$). De nuevo, la interacción espín-órbita separa los dos últimos estados de energía aproximadamente por 5×10^{-5} eV.

Notación espectroscópica extendida para incluir al espín

EJEMPLO 9.4 El doblete del sodio

El famoso doblete del sodio surge de la separación espín-órbita del nivel $3p$ del sodio, y consta del par de líneas espectrales estrechamente separado a longitudes de onda de 588.995 nm y 589.592 nm. En un diagrama de niveles de energía, muestre las transiciones electrónicas que originan estas líneas, identificando los estados atómicos que participan, con sus designaciones espectroscópicas idóneas. A partir de la separación del doblete, determine la magnitud de la energía espín-órbita.

Solución El electrón exterior en el sodio es el primer electrón que ocupa la capa $n = 3$, el cual se moverá a la subcapa de energía mínima, el nivel $3s$ o $3S_{1/2}$. Los siguientes niveles más altos pertenecen a la subcapa $3p$. Los $2(2\ell + 1) = 6$ estados de esta subcapa están agrupados en el nivel $3P_{1/2}$ con dos estados, y en el nivel $3P_{3/2}$ con cuatro estados. El efecto espín-órbita separa estos niveles por la energía espín-órbita. El electrón externo, una vez que se excita a alguno de estos niveles por algún medio (como una descarga eléctrica en la lámpara de vapor de sodio), regresa al nivel $3S_{1/2}$ con la emisión de un fotón. En la figura 9.13 se muestran las dos transiciones posibles, $3P_{3/2} \rightarrow 3S_{1/2}$ y $3P_{1/2} \rightarrow 3S_{1/2}$. Los fotones emitidos poseen casi la misma energía aunque difieren por la pequeña cantidad ΔE que representa la separación espín-órbita de los niveles iniciales. Debido a que $E = hc/\lambda$ para los fotones, se encuentra que ΔE es

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2} = \frac{hc(\lambda_2 - \lambda_1)}{\lambda_1 \lambda_2}$$

Para el doblete del sodio, la diferencia observada en longitud de onda es

$$\lambda_2 - \lambda_1 = 589.592 \text{ nm} - 588.995 \text{ nm} = 0.597 \text{ nm}$$

Al usar esto con $hc = 1\,240$ eV·nm se obtiene

$$\Delta E = \frac{(1\,240 \text{ eV}\cdot\text{nm})(0.597 \text{ nm})}{(589.592 \text{ nm})(588.995 \text{ nm})} = 2.13 \times 10^{-3} \text{ eV}$$

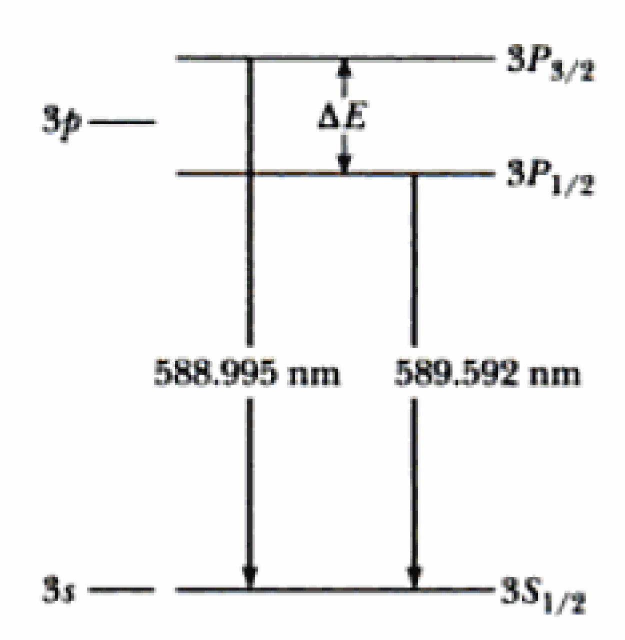


Figura 9.13 (Ejemplo 9.4.) Las transiciones $3P_{3/2} \rightarrow 3S_{1/2}$ y $3P_{1/2} \rightarrow 3S_{1/2}$ que originan el doblete del sodio. El nivel $3p$ del sodio se separa por el efecto espín-órbita, aunque el nivel $3s$ permanece sin cambio. En la lámpara de vapor de sodio, los electrones que normalmente se encuentran en el nivel $3s$ se excitan hasta los niveles $3p$ utilizando una descarga eléctrica.

Ejercicio Use la energía de la interacción espín-órbita calculada en el ejemplo 4 para obtener la magnitud del campo magnético en la posición del electrón $3p$ en órbita en el sodio.

Respuesta $B = 18.38$ T, un gran campo para los estándares de laboratorio.

9.4 SIMETRÍA DE INTERCAMBIO Y PRINCIPIO DE EXCLUSIÓN

Como ya se mencionó, la existencia del espín requiere la especificación del estado de un electrón atómico con cuatro números cuánticos. En ausencia de efectos espín-órbita, tales números podrían ser n, ℓ, m_ℓ y m_s; si se toma en cuenta la interacción espín-órbita, m_ℓ y m_s se sustituyen por j y m_j. En cualquier caso, se requieren cuatro números cuánticos, uno para cada uno de los cuatro grados de libertad que posee un solo electrón.

En sistemas en donde hay dos o más electrones, podría describirse cada estado electrónico proporcionando el conjunto adecuado de cuatro números cuánticos. En este sentido surge una cuestión interesante; a saber, "¿cuántos electrones en un átomo pueden poseer los mismos cuatro números cuánticos; es decir, estar en el mismo estado? A esta importante pregunta respondió Wolfgang Pauli en 1925 con una poderosa afirmación conocida como el principio de exclusión. **El principio de exclusión establece que ningún par de electrones**



B I O G R A F Í A

WOLFGANG PAULI

(1900–1958)

Wolfgang Pauli fue un talentoso físico teórico austriaco que realizó importantes contribuciones en muchas áreas de la física moderna. A la edad de 21 años se ganó el reconocimiento público debido a un excelente artículo sobre la relatividad, que aún se considera como una de las introducciones más acertadas y completas sobre el tema. Otras de sus contribuciones más importantes fueron el descubrimiento del principio de exclusión, la explicación de la relación entre el espín de la partícula y la estadística, sus teorías de electrodinámica cuántica relativista, la hipótesis del neutrino y la hipótesis del espín nuclear. Un artículo escrito por Pauli en 1933 para el *Handbuch der Physik*, titulado "The Fundamental Principles of Quantum Mechanics" es ampliamente reconocido como uno de los mejores tratamientos de la física cuántica que se han escrito. Pauli fue una persona de carácter fuerte y pintoresco, bien conocido por sus agudas y a menudo cáusticas observaciones dirigidas a quienes presentaban nuevas teorías en una forma menos que perfectamente clara. Pauli ejerció una gran influencia en sus estudiantes y colegas, obligándolos con sus críticas agudas hacia una comprensión más profunda y clara. Victor Weisskopf, uno de los estudiantes famosos de Pauli, lo describió correctamente como "la conciencia de los físicos teóricos". El agudo sentido del humor de Pauli también fue captado correctamente por Weisskopf en la siguiente anécdota:

"En unas cuantas semanas, Pauli me pidió venir a Zurich. Llegué a la puerta principal de su oficina, toqué y nadie respondió. Volví a tocar y nada. Al cabo de unos cinco minutos dijo, en una manera más bien grosera: "¿Quién es? ¡Pase!" Abrí la puerta y ahí estaba Pauli —era una oficina bastante grande— del otro lado del recinto, en su escritorio, escribiendo. Dijo: "¿Quién es? Primero debo terminar este cálculo". De nuevo me dejó esperando por otros cinco minutos y entonces dijo: "¿Quién es?" "Soy Weisskopf." "Uhh, Weisskopf, ja, mi nuevo asistente." Luego me vio y dijo: "Bueno, mire, yo quería trabajar con Bethe, pero ahora se dedica al estado sólido. No me gusta el estado sólido, aunque yo lo inicié. Es por eso que lo acepto a usted". Luego dije: "¿Qué puedo hacer por usted, señor?", y contestó: "De inmediato voy a darle un problema". Me dio un problema, algún cálculo, y entonces dijo: "Vaya y trabaje". Así que me fui y después de 10 días o algo así, se me acercó y me dijo: "Bien, muéstreme qué ha hecho". Le mostré lo que había hecho. Lo observó y exclamó: "¡Debí aceptar a Bethe!"*

*Tomado del libro de Victor Weisskopf, *Physics in the Twentieth Century; Selected Essays: My Life as a Physicist*, Cambridge, MA, The MIT Press, 1972, p. 10.

(Foto tomada por S. A. Goudsmith, AIP Niels Bohr Library.)

en un átomo puede poseer el mismo conjunto de números cuánticos. Es necesario señalar que si este principio no fuese válido, todo electrón podría ocupar el estado atómico 1*s* (siendo éste el estado de menor energía), el comportamiento químico de los elementos sería drásticamente distinto, ¡y la naturaleza como se conoce no existiría!

El principio de exclusión se concluye a partir de nuestra creencia de que los electrones son partículas idénticas; es decir, que resulta imposible distinguir un electrón de otro. Esta afirmación aparentemente inocua crece en importancia a la luz de la naturaleza ondulatoria de la materia, y tiene consecuencias de largo alcance. Para tener una idea de lo que esto significa, considere una colisión entre dos electrones, como se muestra en la figura 9.14. En las figuras 9.14a y 9.14b se muestran dos eventos distintos: en ésta, el efecto de dispersión es mucho más intenso, y los electrones describen un ángulo mucho mayor. Cada evento, no obstante, surge de la misma condición inicial y produce el mismo resultado: ambos electrones se dispersan y forman ángulos θ con respecto al eje de incidencia. En caso de no haber seguido sus trayectorias, no podría decidirse cuál de las dos colisiones ocurrió realmente y se habrían perdido las identidades por separado de los electrones en el proceso de colisión.

Pero las trayectorias son conceptos clásicos, desdibujadas por las propiedades ondulatorias de la materia según el principio de incertidumbre. Es decir, cuentan con un carácter vago inherente, que las mezcla inextricablemente en la región de la colisión, donde los electrones pueden estar separados sólo por unas cuantas longitudes de onda de De Broglie. El punto de vista cuántico se representa mejor en la figura 9.14c, donde las dos posibilidades (desde un punto de vista clásico) se unen en un solo evento cuántico: la dispersión de dos electrones a un ángulo θ. Observe que en física clásica el carácter indistinguible no es importante: ¡todas las partículas, incluso las idénticas, son distinguibles desde el punto de vista clásico, a través de sus *trayectorias*! Con la aceptación que se tiene de las ondas de materia, debe concluirse que **no es posible diferenciar**

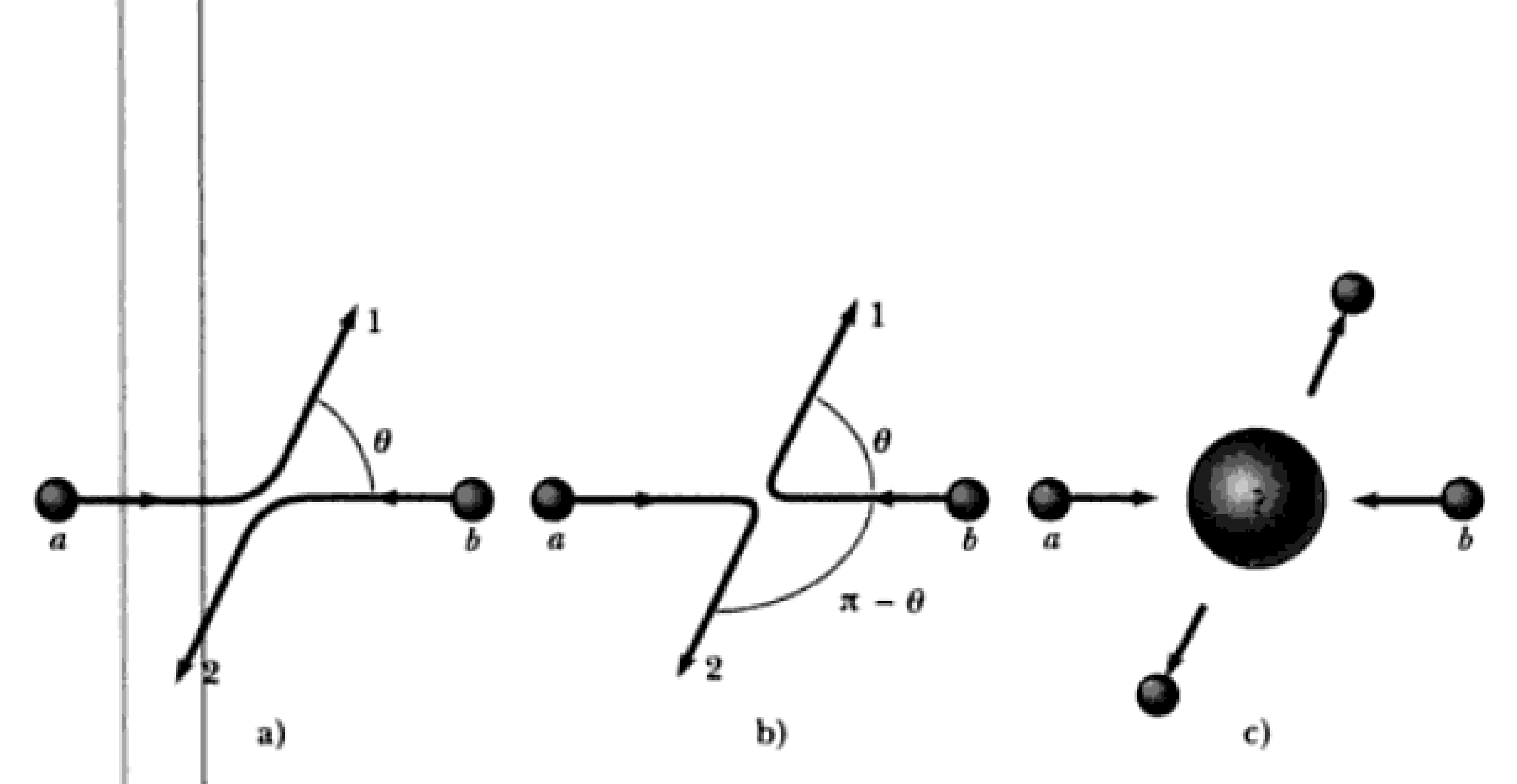


Figura 9.14 Dispersión de dos electrones como resultado de su repulsión mutua. Los eventos mostrados en a) y b) producen el mismo resultado con electrones idénticos, aunque se pueden distinguir desde el punto de vista clásico porque la trayectoria seguida por cada uno es diferente. De esta forma, los electrones preservan sus identidades por separado durante la colisión. c) Según la mecánica cuántica, las trayectorias que siguen los electrones son "borrosas" debido a las propiedades ondulatorias de la materia. En consecuencia, una vez que han interactuado, ¡es imposible decir que los electrones están separados!

Los electrones son verdaderamente indistinguibles

partículas idénticas: son realmente indistinguibles. La incorporación de este extraordinario hecho a la teoría cuántica conduce al principio de exclusión descubierto por Pauli.

A continuación se verá cómo la indistinguibilidad afecta la descripción matemática de un sistema con dos electrones; por ejemplo, el átomo de helio. Cada electrón posee energía cinética y el átomo tiene una energía potencial electrostática asociada con la interacción de los dos electrones con el núcleo de helio doblemente cargado. Estas contribuciones están representadas por la ecuación de Schrödinger para un electrón por términos

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla_1^2\psi + \frac{k(2e)(-e)}{r_1}\psi$$

donde ∇_1^2 es el laplaciano en esta coordenada del electrón, $\mathbf{r}_1$. Para abreviar las cosas, la suma de ambos términos se escribirá simplemente como $h(1)\psi$, donde la etiqueta 1 se refiere a $\mathbf{r}_1$. Para el segundo electrón se escribe la misma expresión, excepto que $\mathbf{r}_1$ debe sustituirse en todas partes por $\mathbf{r}_2$, la coordenada del segundo electrón. Los estados estacionarios para este sistema de dos electrones satisfacen la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo,

$$h(1)\psi + h(2)\psi = E\psi \tag{9.15}$$

El hecho de que $h(1)$ y $h(2)$ *sean iguales* excepto por sus argumentos refleja lo indistinguibles que son los dos electrones.

La ecuación 9.15 toma en cuenta la energía cinética del electrón y la energía potencial del átomo, pero ignora la interacción entre los dos electrones. De hecho, los electrones se repelen entre sí debido a la fuerza de Coulomb, lo que lleva a una energía de interacción que debe sumarse al lado izquierdo de la ecuación 9.15. Para facilitar las cosas, se ignorará esta interacción y los electrones se considerarán como objetos independientes, de modo que ninguno afecte la presencia del otro. En la sección 9.5 se demuestra cómo puede mejorarse esta *aproximación de partículas independientes* para obtener una mejor descripción de la realidad.

La función de onda de los dos electrones depende de las coordenadas de ambas partículas, $\psi = \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, donde $|\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2$ representa la densidad de probabilidad de encontrar un electrón en $\mathbf{r}_1$ y el otro en $\mathbf{r}_2$. La indistinguibilidad de los electrones requiere que un intercambio formal de partículas no produzca efectos observables. En particular, ninguna probabilidad es afectada por el intercambio, de modo que la función de onda ψ debe ser tal que

$$|\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 = |\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)|^2$$

Se dice que tal función de onda presenta **simetría de intercambio.** La función de onda en sí puede ser par o impar bajo intercambio de partículas. La primera está caracterizada por la propiedad

Simetría de intercambio para los bosones

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \tag{9.16}$$

y describe una clase de partículas denominadas **bosones.** Los fotones pertenecen a esta clase, y también partículas más exóticas como los piones. Los electrones, como los protones y los neutrones, son ejemplos de **fermiones,** para los cuales

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) \tag{9.17}$$

Simetría de intercambio para los fermiones

En consecuencia, la función de onda del helio con dos electrones debe satisfacer la ecuación 9.17 a fin de considerar el carácter indistinguible de los electrones.[7]

Para recuperar el principio de Pauli es necesario analizar con más detalle la función de onda. En el caso de electrones independientes, las soluciones de la ecuación 9.15 se encuentran fácilmente. Debido a que cada electrón "ve" sólo el núcleo del helio, la función de onda en cada coordenada debe ser como se analizó en el capítulo 8. Estas funciones atómicas se denotan por ψ_a, donde a es una identificación colectiva para los cuatro números cuánticos n, ℓ, m_ℓ y m_s (o n, ℓ, j y m_j si se incluyen los efectos espín-órbita). Los productos $\psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_b(\mathbf{r}_2)$ satisfacen la ecuación, ya que

$$h(1)\psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_b(\mathbf{r}_2) = E_a\psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_b(\mathbf{r}_2)$$
$$h(2)\psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_b(\mathbf{r}_2) = E_b\psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_b(\mathbf{r}_2)$$

E_a y E_b son energías semejantes a las del hidrógeno para los estados identificados con a y b (vea la ecuación 8.38). En consecuencia,

$$[h(1) + h(2)]\psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_b(\mathbf{r}_2) = (E_a + E_b)\psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_b(\mathbf{r}_2) \tag{9.18}$$

y $E = E_a + E_b$ es la energía total de este estado de dos electrones.

Observe que las energías para el modelo de un electrón son simplemente aditivas, como hubiera podido anticiparse para partículas independientes. Además, la solución $\psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_b(\mathbf{r}_2)$ describe un electrón que ocupa el estado atómico identificado por a y la otra describe el estado identificado por b. Sin embargo, este producto *no es impar* bajo intercambios de partículas, como se requiere para fermiones idénticos. No obstante, usted puede comprobar que $\psi_a(\mathbf{r}_2)\psi_b(\mathbf{r}_1)$ también es una solución de la ecuación 9.15 con energía $E = E_a + E_b$, que corresponde a la situación en que los estados de los dos electrones se han intercambiado. La combinación antisimétrica de lo anterior

$$\psi_{ab}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_b(\mathbf{r}_2) - \psi_a(\mathbf{r}_2)\psi_b(\mathbf{r}_1) \tag{9.19}$$

representa la simetría de intercambio correcta; es decir,

$$\begin{aligned}\psi_{ab}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) &= \psi_a(\mathbf{r}_2)\psi_b(\mathbf{r}_1) - \psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_b(\mathbf{r}_2)\\ &= -\psi_{ab}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\end{aligned}$$

En consecuencia, la ecuación 9.19 constituye una descripción aceptable del sistema. Observe, no obstante, que ahora es imposible decir qué electrón ocupa cuál estado, ¡como debe ser el caso para electrones idénticos! Por último, se observa que cuando a y b identifican el mismo estado ($a = b$), ψ_{ab} es idénticamente cero: aquí, la teoría no permite solución (descripción), lo cual coincide con el planteamiento conocido del principio de exclusión.

[7]Es un hecho experimental que los bosones son partículas con espín entero, aunque los fermiones son partículas con espín semientero. Es posible demostrar que esta relación entre espín y simetría bajo intercambio de partículas posee un sustento teórico cuando se plantea una teoría cuántica que se ajusta a los requerimientos de la relatividad especial.

EJEMPLO 9.5 Estado base del átomo de helio

Obtenga de manera explícita la función de onda del estado base de dos electrones para el átomo de helio en la aproximación de partículas independientes, usando la ecuación 9.19. Compare la energía predicha de este estado con el valor medido, y explique cualitativamente cualquier discrepancia.

Solución En la aproximación de partículas independientes, cada electrón de helio sólo "ve" al núcleo de helio doblemente cargado. En consecuencia, la función de onda del estado base del átomo de helio se obtiene a partir de las funciones de onda de menor energía del átomo hidrogenoide, con número atómico $Z = 2$ para el helio. Éstos son los estados para los cuales $n = 1$, $\ell = 0$ y $m_\ell = 0$. En base a las ecuaciones 8.42 del capítulo 8, se encuentra (con $Z = 2$)

$$\psi_{100}(\mathbf{r}) = \pi^{-1/2}(2/a_0)^{3/2}e^{-2r/a_0}$$

A esta función orbital debe asociarse una identificación de espín ($\pm$) que indique la dirección del espín del electrón. Así, las etiquetas de estado de un electrón a y b en este ejemplo están dadas por $a = (1, 0, 0, +)$, $b = (1, 0, 0, -)$. Debido a que no hay campo orbital que interactúe con el espín del electrón, las energías de estos dos estados son idénticas y son justo los niveles hidrogenoides de la ecuación 8.38, con $n = 1$ y $Z = 2$:

$$E_a = E_b = -(2^2/1^2)(13.6 \text{ eV}) = -54.4 \text{ eV}$$

Así, la función de onda antisimétrica para dos electrones correspondiente al estado base del helio es

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi_{100+}(\mathbf{r}_1)\psi_{100-}(\mathbf{r}_2) - \psi_{100-}(\mathbf{r}_1)\psi_{100+}(\mathbf{r}_2)$$

Ambos términos poseen la misma dependencia espacial, aunque difieren en cuanto a su espín. El primer término de la onda antisimétrica describe al electrón 1 como si tuviese el espín hacia arriba y al electrón 2 como si lo tuviera hacia abajo. Estas direcciones de espín están invertidas en el segundo término. Si se introduce la notación $|+-\rangle$ para describir los espines de los dos electrones en el primer término, entonces el segundo término se convierte en $|-+\rangle$ y la función de onda total para ambos electrones correspondiente al estado base del helio puede escribirse como

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \pi^{-1}(2/a_0)^3 e^{-2(r_1+r_2)/a_0}\{|+-\rangle - |-+\rangle\}$$

La mezcla de los estados de espín $|+-\rangle$ y $|-+\rangle$ significa que el espín de cualquiera de los electrones del helio tiene la misma probabilidad de estar hacia arriba que hacia abajo. Observe, sin embargo, que el espín del electrón restante *siempre* es opuesto al espín del primero. Estas *correlaciones* espín-espín son una consecuencia directa del principio de exclusión. (Los electrones de valencia en diferentes orbitales de varios átomos con Z mayor tienden a alinear sus espines. Esta tendencia, denominada **regla de Hund,** constituye otro ejemplo de correlación espín-espín inducida por el principio de exclusión.)

La energía electrónica total del átomo de helio en esta aproximación es la suma de las energías E_a y E_b de un electrón:

$$E = E_a + E_b = -54.4 \text{ eV} - 54.4 \text{ eV} = -108.8 \text{ eV}$$

La magnitud de este número, 108.8 eV, representa la energía (trabajo) requerida para remover ambos electrones del átomo de helio en el modelo de partículas independientes. El valor medido es sustancialmente inferior, alrededor de 79 eV, debido a la repulsión mutua de los dos electrones. En específico, se requiere menos energía —aproximadamente 24.6 eV— para remover el primer electrón del átomo, debido a que el otro electrón *apantalla* la carga nuclear, haciéndola aparecer menos positiva que un núcleo de helio sin electrones.

OPCIONAL

9.5 INTERACCIONES ELECTRÓNICAS Y EFECTOS DE APANTALLAMIENTO

El análisis previo del átomo de helio expone una cuestión que no puede faltar siempre que se estudia un sistema con dos o más electrones; a saber, cómo manipular los efectos de la repulsión electrón-electrón. Es de esperar que los electrones confinados al reducido espacio de un átomo ejerzan intensas fuerza eléctricas de repulsión entre sí. Ignorarlas por completo, como en el modelo de partículas independientes, es sencillamente demasiado ordinario; incluirlas exactamente es ingobernable, ya que se desconocen descripciones precisas, incluso para el movimiento clásico en este caso, excepto mediante cálculos numéricos. Por consiguiente, se requiere un esquema de aproximación factible. Un método más fructífero para abordar este problema comienza con el concepto de campo efectivo.

Cualquier electrón atómico está sujeto a la atracción de Coulomb del núcleo, así como a la repulsión de Coulomb de cualquier otro electrón en el átomo. Estas influencias se cancelan en gran medida entre sí, dejando un campo efectivo neto con energía potencial $U_{\text{ef}}(\mathbf{r})$.

Puede que U_{ef} no sea de Coulomb —o incluso esféricamente simétrico— y que sea diferente para cada electrón atómico. El éxito de este enfoque depende de cuán simple y exacto se modele el potencial efectivo. A continuación se presentan algunas de las posibilidades más evidentes.

Los electrones más externos, o de valencia, de un átomo no "ven" un núcleo desnudo, sino uno protegido, o *apantallado*, por los electrones intermedios. La atracción es más parecida a la que se origina de un núcleo con un número atómico efectivo Z_{ef} algo menor que el verdadero número Z, y podría describirse por

$$U_{ef}(\mathbf{r}) = \frac{k(Z_{ef}e)(-e)}{r} \tag{9.20}$$

Para un átomo con un electrón Z, $Z_{ef} = Z$ no debe representar ningún apantallamiento; en el extremo opuesto hay apantallamiento perfecto por los otros $Z - 1$ electrones, con lo cual se obtiene $Z_{ef} = Z - (Z - 1) = 1$. La mejor opción para Z_{ef} ni siquiera requiere que sea entera, y es posible deducir valores útiles a partir de mediciones de potenciales de ionización atómica (vea el ejemplo 9.6). Además, el grado de apantallamiento depende de cuánto tiempo pasa un electrón cerca del núcleo, y es de esperar que Z_{ef} varíe con las identificaciones de capa y subcapa del electrón en cuestión. En particular, un electrón $4s$ está apantallado de manera más efectiva que un electrón $3s$, ya que su distancia media al núcleo es mayor. De manera semejante, un electrón $3d$ está mejor apantallado que un electrón $3s$, e incluso que uno $3p$ (menor cantidad de movimiento angular implica órbitas clásicas más excéntricas, con mayor penetración en la región nuclear). Usar Z_{ef} para electrones de valencia es idóneo siempre que exista una clara distinción entre estos electrones y los electrones interiores (del núcleo) del átomo, como en los metales alcalinos.

EJEMPLO 9.6 Z_{ef} para el electrón 3s en el sodio

El electrón externo del átomo de sodio ocupa el nivel atómico $3s$. El valor observado para la energía de ionización de este electrón es 5.14 eV. Con base en esta información, obtenga un valor de Z_{ef} para el electrón $3s$ en el sodio.

Solución Debido a que la energía de ionización, 5.14 eV, representa la cantidad de energía que debe gastarse para remover el electrón $3s$ del átomo, se infiere que la energía del electrón $3s$ del sodio es $E = -5.14$ eV. Esto debe compararse con la energía de un electrón $3s$ en un átomo hidrogenoide con número atómico Z_{ef}, o bien,

$$E = -\frac{Z_{ef}^{\,2}}{3^2}(13.6\text{ eV})$$

Al igualar esto con -5.14 eV y despejar Z_{ef} se obtiene

$$Z_{ef} = 3\sqrt{\frac{5.14}{13.6}} = 1.84$$

En principio, la protección nuclear puede describirse mejor dejando que Z_{ef} varíe de manera continua en todo el átomo en una forma que imite la penetración en el núcleo del electrón acompañante más fuertemente ligado. Para este efecto suelen usarse dos formas funcionales comunes. Para el **apantallamiento Thomas-Fermi** se escribe

$$Z_{ef}(r) = Ze^{-r/a_{TF}} \tag{9.21}$$

Átomo de Thomas-Fermi

donde a_{TF} es la longitud del apantallamiento Thomas-Fermi. Según la ecuación 9.21, Z_{ef} está muy próximo de Z cerca del núcleo ($r \approx 0$), aunque disminuye rápidamente en la región exterior, haciéndose cero para $r \gg a_{TF}$. De esta forma, a_{TF} se

convierte en un indicador del tamaño atómico. El modelo de Thomas-Fermi predice a_{TF} proporcional a $Z^{-1/3}$; la débil variación con Z sugiere que todos los átomos son esencialmente del mismo tamaño, sin importar cuántos electrones puedan tener. Debido a que el potencial de Thomas-Fermi no es de Coulomb, las energías de un electrón que resultan al aplicar la ecuación 9.21 varían en el interior de una capa dada; es decir, dependen de los números cuánticos principal (n) y orbital (ℓ). El estudio de estas energías y sus funciones de onda asociadas requiere métodos numéricos, o una aproximación más detallada. La aproximación de Thomas-Fermi mejora con valores más grandes de Z y por ello se ajusta especialmente bien para describir la estructura electrónica externa de los elementos más pesados.

En otro enfoque, denominado método de defecto cuántico, la protección nuclear se describe por

$$Z_{\text{ef}}(r) = 1 + \frac{b}{r} \tag{9.22}$$

donde b es nuevamente una especie de longitud de apantallamiento. Esta forma es idónea para los metales alcalinos, donde un electrón solitario externo es responsable de las propiedades químicas del átomo. Con base en la ecuación 9.22, este electrón "ve" $Z_{\text{ef}} \approx 1$ para $r \gg b$ y valores mayores en el núcleo. La característica especial de la ecuación 9.22 es que conduce a energías y funciones de onda de un electrón que pueden encontrarse sin aproximación adicional. En particular, puede demostrarse que los niveles de energía que se deducen de la ecuación 9.22 son

Defectos cuánticos

$$E_n = \frac{ke^2}{2a_0}\{n - D(\ell)\}^{-2} \tag{9.23}$$

donde $D(\ell)$ se denomina **defecto cuántico,** ya que mide la desviación con respecto a la estructura del nivel del átomo simple de hidrógeno. Como sugiere la notación, el defecto cuántico para un electrón s difiere del correspondiente a un electrón p o d, aunque todos los electrones s poseen el mismo defecto cuántico, sin importar la etiqueta de su capa. En la tabla 9.1 se enumeran algunos defectos cuánticos deducidos en forma experimental para el átomo de sodio. Al tomar $b = 0$ en la ecuación 9.22 se produce la eliminación de todos los defectos cuánticos, volviendo a la estructura del nivel hidrogenoide que se analizó en el capítulo 8.

El uso de una Z_{ef} simple, o las formas más complicadas del método de Thomas-Fermi o de defecto cuántico, sigue produciendo una U_{ef} con simetría esférica; es decir, los electrones se mueven en un campo central. La **teoría de Hartree** elimina incluso esta característica a fin de obtener resultados más precisos. Según Hartree, la "nube" de electrones en el átomo debe considerarse como un cuerpo clásico de carga distribuida con alguna densidad de carga volumétrica $\rho(\mathbf{r})$. Entonces, la energía potencial de cualquier electrón atómico es

$$U_{\text{ef}}(\mathbf{r}) = \frac{kZe^2}{r} - \int ke\left[\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right] dV' \tag{9.24}$$

El primer término es la energía de atracción del núcleo, y el segundo término es la energía de repulsión de todos los demás electrones atómicos. Esta U_{ef} origina una ecuación de Schrödinger de un electrón para las energías Ei y funciones de onda ψi, por ejemplo, del i-ésimo electrón atómico.

Tabla 9.1 Algunos defectos cuánticos para el átomo de sodio

Subcapa	*s*	*p*	*d*	*f*
$D(\ell)$	1.35	0.86	0.01	~0

Sin embargo, la teoría de Hartree es *autoconsistente*. Es decir, la densidad de carga $\rho(\mathbf{r})$ debida a los otros electrones atómicos se calcula a partir de las funciones de onda del electrón como

Campos autoconsistentes de Hartree

$$\rho(\mathbf{r}) = -e\sum |\psi_j(\mathbf{r})|^2 \tag{9.25}$$

La sumatoria en la ecuación 9.25 incluye todos los estados electrónicos ψ_j ocupados, salvo el i-ésimo estado. De esta forma, el problema matemático planteado por U_{ef} regresa en sí mismo: es necesario resolver no sólo una ecuación de Schrödinger, sino N de éstas de una sola vez, ¡una para cada uno de los N electrones que hay en el átomo! Esto se logra aplicando métodos numéricos en un esquema de solución iterativo. Inicialmente se hace una conjetura razonable para cada una de las N ondas del estado base de los electrones. A partir de esta conjetura es posible calcular ρ y U_{ef} para cada electrón y resolver todas las N ecuaciones de Schrödinger. Las funciones de onda resultantes se comparan con las propuestas iniciales; si hay discrepancias, se repite el cálculo con el nuevo conjunto de funciones de onda electrónicas sustituyendo a las anteriores. Luego de varias iteraciones se llega a una coincidencia entre las funciones de onda iniciales y las funciones de onda calculadas. Se dice que las N funciones de onda electrónicas resultantes son totalmente autoconsistentes. La implementación del método de Hartree es laboriosa y requiere gran habilidad, aunque los resultados para electrones atómicos son de lo mejor. En efecto, los métodos de Hartree y de **Hartree-Fock,** bastante relacionados entre sí, son los de mayor uso hoy día para obtener los niveles de energía atómica y las funciones de onda.

9.6 TABLA PERIÓDICA

En principio, las propiedades de todos los elementos pueden predecirse aplicando a cada uno los procedimientos de la mecánica cuántica. No obstante, debido al gran número de interacciones posibles en átomos con muchos electrones es necesario usar aproximaciones para todos ellos, excepto para el hidrógeno. Sin embargo, la estructura atómica, incluso de los átomos más complejos, puede considerarse como una sucesión de niveles llenos cuya energía es creciente, donde los electrones más externos son los principales responsables de las propiedades químicas del elemento.

En la aproximación de campo central, los niveles atómicos pueden identificarse con los números cuánticos n y ℓ. Con base en el principio de exclusión, el número máximo de electrones en uno de estos niveles de subcapa es $2(2\ell + 1)$. La energía de un electrón en este nivel depende en primer lugar del número cuántico n, y en menor medida de ℓ. Los niveles pueden agruparse de acuerdo al valor de n (la etiqueta de la capa), y las energías de todos los que están dentro de un grupo aumentan conforme crece ℓ. El orden de llenado de los niveles de las subcapas con electrones es como sigue: una vez que se completa una subcapa, el siguiente electrón pasa al nivel vacante con la energía más baja. Este **principio de energía mínima** puede entenderse si se observa que el electrón fuese a ocupar un nivel superior, decaería espontáneamente a un nivel inferior con la emisión de energía.

Las propiedades químicas de los átomos se determinan predominantemente por los electrones menos fuertemente enlazados, o de valencia, que están en la subcapa de energía máxima. Los factores más importantes son la ocupación de esta subcapa y la separación energética entre esta subcapa y la siguiente en energía más alta (que esté vacía). Por ejemplo, un átomo tiende a ser químicamente inerte si su subcapa más alta está llena y hay una separación de energía apreciable con la siguiente subcapa superior, ya que los electrones no se comparten

rápidamente con otros átomos para formar una molécula. La recurrencia casi periódica de estructuras de capas superiores semejantes cuando Z crece es responsable del sistema periódico de los elementos químicos.

La especificación de n y ℓ para cada electrón atómico se denomina **configuración electrónica.** Ahora ya es posible describir la configuración electrónica de cualquier átomo en su estado base:

El *hidrógeno* sólo tiene un electrón, el cual, en su estado base, es descrito por los números cuánticos $n = 1$, $\ell = 0$. Por tanto, su configuración electrónica se designa como $1s^1$.

El *helio*, con sus dos electrones, posee una configuración electrónica en el estado base de $1s^2$. Es decir, ambos electrones están en la misma subcapa $1s$ (la de menor energía). Debido a que la ocupación máxima para una subcapa s es igual a 2, se dice que la subcapa (y en este caso también la capa) está *cerrada*, y que el helio es inerte.

El *litio* tiene tres electrones. Dos de ellos están asignados a la subcapa $1s$, y el tercero debe asignarse a la subcapa $2s$, porque la energía de esta subcapa es ligeramente menor a la energía de la subcapa $2p$. Por tanto, la configuración electrónica del litio es $1s^22s^1$.

Al agregar otro electrón para obtener *berilio*, la subcapa $2s$ se cierra. La configuración electrónica del berilio, con cuatro electrones en total, es $1s^22s^2$. (El berilio no es inerte debido a que la separación energética entre el nivel $2s$ y el siguiente nivel disponible, el $2p$, no es muy grande.)

El *boro* tiene la configuración $1s^22s^22p^1$. (Con la dupla espín-órbita, el electrón $2p$ en el boro realmente ocupa el subnivel $2P_{1/2}$, que corresponde a $n = 2$, $l = 1$ y $j = \frac{1}{2}$.)

El *carbono* tiene seis electrones, y surge la pregunta de cómo asignar los dos electrones $2p$. ¿Éstos van al mismo orbital con espines "apareados" ($\uparrow\downarrow$)? o bien, ¿ocupan orbitales diferentes con espines no pareados($\uparrow\uparrow$)? Se ha demostrado por experimento que la configuración energética preferencial es la última, donde los espines están alineados. Esto es una ilustración de la **regla de Hund,** que establece que los electrones suelen ocupar orbitales diferentes con espines no apareados, en vez del mismo orbital con espines apareados. La regla de Hund puede entenderse en parte si se observa que los electrones en el mismo orbital tienden a permanecer próximos entre sí, donde su repulsión mutua contribuye a una mayor energía, que si estuviesen separados en orbitales diferentes. Esta regla tiene algunas excepciones en aquellos elementos cuyas subcapas están casi llenas o semi llenas. El llenado progresivo de la subcapa $2p$ que ilustra la regla de Hund se muestra de manera esquemática en la figura 9.15. Con el *neón*, la subcapa $2p$ también está cerrada. El átomo de neón tiene 10 electrones en la configuración $1s^22s^22p^6$. Debido a que la separación energética entre el nivel $2p$ y el siguiente nivel disponible, el $3s$, es bastante grande, la configuración del neón es excepcionalmente estable y el átomo es químicamente inerte.

En la tabla 9.2 se proporciona una lista completa de las configuraciones electrónicas de todos los elementos conocidos. Observe que, empezando con el *potasio* ($Z = 19$), la subcapa $4s$ comienza a llenarse mientras el nivel $3d$ permanece vacío. Una vez que la subcapa $4s$ se cierra para formar *calcio* es cuando empieza a llenarse la subcapa $3d$. Se infiere que el nivel $3d$ tiene más energía que el nivel $4d$, aun cuando pertenece a una capa de índice inferior. Esto no

Tabla 9.2 Configuraciones electrónicas de los elementos

Z	Símbolo	Configuración fundamental	Energía de ionización (eV)	Z	Símbolo	Configuración fundamental	Energía de ionización (eV)
1	H	$1s^1$	13.595	27	Co	$3d^74s^2$	7.86
2	He	$1s^2$	24.581	28	Ni	$3d^84s^2$	7.633
3	Li	[He] $2s^1$	5.390	29	Cu	$3d^{10}4s^1$	7.724
4	Be	$2s^2$	9.320	30	Zn	$3d^{10}4s^2$	9.391
5	B	$2s^22p^1$	8.296	31	Ga	$3d^{10}4s^24p^1$	6.00
6	C	$2s^22p^2$	11.256	32	Ge	$3d^{10}4s^24p^2$	7.88
7	N	$2s^22p^3$	14.545	33	As	$3d^{10}4s^24p^3$	9.81
8	O	$2s^22p^4$	13.614	34	Se	$3d^{10}4s^24p^4$	9.75
9	F	$2s^22p^5$	17.418	35	Br	$3d^{10}4s^24p^5$	11.84
10	Ne	$2s^22p^6$	21.559	36	Kr	$3d^{10}4s^24p^6$	13.996
11	Na	[Ne] $3s^1$	5.138	37	Rb	[Kr] $5s^1$	4.176
12	Mg	$3s^2$	7.644	38	Sr	$5s^2$	5.692
13	Al	$3s^23p^1$	5.984	39	Y	$4d5s^2$	6.377
14	Si	$3s^23p^2$	8.149	40	Zr	$4d^25s^2$	6.835
15	P	$3s^23p^3$	10.484	41	Nb	$4d^45s^1$	6.881
16	S	$3s^23p^4$	10.357	42	Mo	$4d^55s^1$	7.10
17	Cl	$3s^23p^5$	13.01	43	Tc	$4d^55s^2$	7.228
18	Ar	$3s^23p^6$	15.755	44	Ru	$4d^75s^1$	7.365
19	K	[Ar] $4s^1$	4.339	45	Rh	$4d^85s^1$	7.461
20	Ca	$4s^2$	6.111	46	Pd	$4d^{10}$	8.33
21	Sc	$3d4s^2$	6.54	47	Ag	$4d^{10}5s^1$	7.574
22	Ti	$3d^24s^2$	6.83	48	Cd	$4d^{10}5s^2$	8.991
23	V	$3d^34s^2$	6.74	49	In	$4d^{10}5s^25p^1$	5.785
24	Cr	$3d^54s$	6.76	50	Sn	$4d^{10}5s^25p^2$	7.342
25	Mn	$3d^54s^2$	7.432	51	Sb	$4d^{10}5s^25p^3$	8.639
26	Fe	$3d^64s^2$	7.87	52	Te	$4d^{10}5s^25p^4$	9.01

por el llenado progresivo de la subcapa $3d$, mientras la configuración del electrón externo permanece sin cambio en $4s^2$ (excepto en el caso del cobre). En consecuencia, todos los elementos de transición presentan propiedades químicas semejantes. Esta ocupación tardía de las subcapas internas d vuelve a encontrarse en la segunda y tercera series de transición, marcadas por el llenado progresivo de las subcapas $4d$ y $5d$, respectivamente. La segunda serie de transición incluye los elementos *itrio* ($Z = 39$) hasta *cadmio* ($Z = 48$); la tercera contiene los elementos *lutecio* ($Z = 71$) hasta *mercurio* ($Z = 80$).

También se observa un comportamiento relacionado a medida que se llenan las subcapas $4f$ y $5f$. La **serie de los lantánidos,** que va del *lantanio* ($Z = 57$) hasta el *iterbio* ($Z = 70$), está marcada por una configuración común de valencia $6s^2$, donde los electrones agregados completan la subcapa $4f$ (en algunos casos también están ocupados los niveles $5d$ próximos). Los elementos del lantánido, o lantánidos, también se denominan **tierras raras** debido a su poca abundancia natural. El más abundante de los lantánidos es el *cerio* ($Z = 58$), que constituye 0.00031% en peso de la corteza terrestre.

Tabla 9.2 Configuraciones electrónicas de los elementos

Z	Símbolo	Configuración fundamental	Energía de ionización (eV)	Z	Símbolo	Configuración fundamental	Energía de ionización (eV)
53	I	$4d^{10}5s^25p^5$	10.454	79	Au	$[Xe, 4f^{14}5d^{10}]\ 6s^1$	9.22
54	Xe	$4d^{10}5s^25p^6$	12.127	80	Hg	$6s^2$	10.434
55	Cs	$[Xe]\ 6s^1$	3.893	81	Tl	$6s^26p^1$	6.106
56	Ba	$6s^2$	5.210	82	Pb	$6s^26p^2$	7.415
57	La	$5d6s^2$	5.61	83	Bi	$6s^26p^3$	7.287
58	Ce	$4f5d6s^2$	6.54	84	Po	$6s^26p^4$	8.43
59	Pr	$4f^36s^2$	5.48	85	At	$6s^26p^5$	9.54
60	Nd	$4f^46s^2$	5.51	86	Rn	$6s^26p^6$	10.745
61	Pm	$4f^56s^2$	5.60	87	Fr	$[Rn]\ 7s^1$	3.94
62	Fm	$4f^66s^2$	5.644	88	Ra	$7s^2$	5.277
63	Eu	$4f^76s^2$	5.67	89	Ac	$6d7s^2$	5.17
64	Gd	$4f^75d6s^2$	6.16	90	Th	$6d^27s^2$	6.08
65	Tb	$4f^96s^2$	6.74	91	Pa	$5f^26d7s^2$	5.89
66	Dy	$4f^{10}6s^2$	6.82	92	U	$5f^36d7s^2$	6.194
67	Ho	$4f^{11}6s^2$	6.022	93	Np	$5f^46d7s^2$	6.266
68	Er	$4f^{12}6s^2$	6.108	94	Pu	$5f^67s^2$	6.061
69	Tm	$4f^{13}6s^2$	6.185	95	Am	$5f^77s^2$	5.99
70	Yb	$4f^{14}6s^2$	6.22	96	Cm	$5f^76d7s^2$	6.02
71	Lu	$4f^{14}5d6s^2$	6.15	97	Bk	$5f^86d7s^2$	6.23
72	Hf	$4f^{14}5d^26s^2$	6.83	98	Cf	$5f^{10}7s^2$	6.30
73	Ta	$4f^{14}5d^36s^2$	7.88	99	Es	$5f^{11}7s^2$	6.42
74	W	$4f^{14}5d^46s^2$	7.98	100	Fm	$5f^{12}7s^1$	6.50
75	Re	$4f^{14}5d^56s^2$	7.87	101	Mv	$5f^{13}7s^2$	6.58
76	Os	$4f^{14}5d^66s^2$	8.71	102	No	$5f^{14}7s^2$	6.65
77	Ir	$4f^{14}5d^76s^2$	9.12	103	Lw	$5f^{14}6d7s^2$	
78	Pt	$4f^{14}5d^86s^2$	8.88	104	Ku	$5f^{14}6d^27s^2$	

Nota: La notación entre corchetes se utiliza como método abreviado para evitar la repetición al indicar los electrones de las capas interiores. Así, [He] representa $1s^2$, [Ne] representa $1s^22s^22p^6$, [Ar] representa $1s^22s^22p^63s^23p^6$, y así sucesivamente.

En la **serie de los actínidos,** desde el *actinio* ($Z = 89$) hasta el *nobelio* ($Z = 102$), la configuración de valencia permanece en $7s^2$, a medida que se llena progresivamente la subcapa $5f$ (junto con la ocupación ocasional del siguiente nivel $6d$).

En la tabla 9.2 también se enumeran las energías de ionización de los elementos. En la figura 9.16a se muestra una gráfica de la energía de ionización de cada elemento en función de su número atómico Z. En esta gráfica se muestra que la energía de ionización tiende a aumentar en el interior de una capa, para luego caer drásticamente a medida que comienza el llenado de una nueva capa. Este comportamiento se repite, y es debido a este patrón recurrente que la tabla periódica se llama así. En la gráfica del volumen un patrón repetitivo semejante atómico por átomo contra número atómico (vea la figura 9.16b) se observa.

Las características esenciales de estas gráficas pueden comprenderse a partir de razonamientos sencillos. Primero, la mayor carga nuclear que acompaña a valores superiores de Z tiende a atraer más cerca del núcleo a los electrones y a ligarlos más fuertemente. Si este fuese el único efecto, la energía de ionización aumentaría y el volumen atómico disminuiría de manera continua con el incremento de Z. Pero los electrones más internos, o del núcleo, apantallan la carga nuclear, haciéndola menos efectiva para ligar a los electrones externos.

que alcanza un pico en las configuraciones de los alcalinos y disminuye a medida que disminuye el efecto de apantallamiento.

9.7 ESPECTROS DE RAYOS X Y LEY DE MOSELEY

Las transiciones electrónicas que ocurren dentro de las capas internas de átomos más pesados van acompañadas de grandes transferencias de energía. Si la energía en exceso se la lleva un fotón, se emiten rayos X de longitudes de onda específicas característica del átomo emisor. Esto explica por qué se obtienen líneas discretas de rayos X cuando se bombardea un objetivo metálico con electrones energéticos, como ya se analizó en la sección 3.5.

Los electrones internos de elementos con alto Z están estrechamente ligados al átomo, debido a que ven una carga nuclear en esencial no enmascarada por los electrones restantes. Considere el caso del molibdeno (Mo), con número atómico $Z = 42$ (vea la tabla 9.2). Los electrones más interiores, o de la capa K, tienen $n = 1$ y energía (por la ecuación 8.38)

$$E_1 = -\frac{ke^2}{2a_0}\left\{\frac{Z^2}{1^2}\right\} = -(13.6 \text{ eV})(42)^2 = -23990.4 \text{ eV}$$

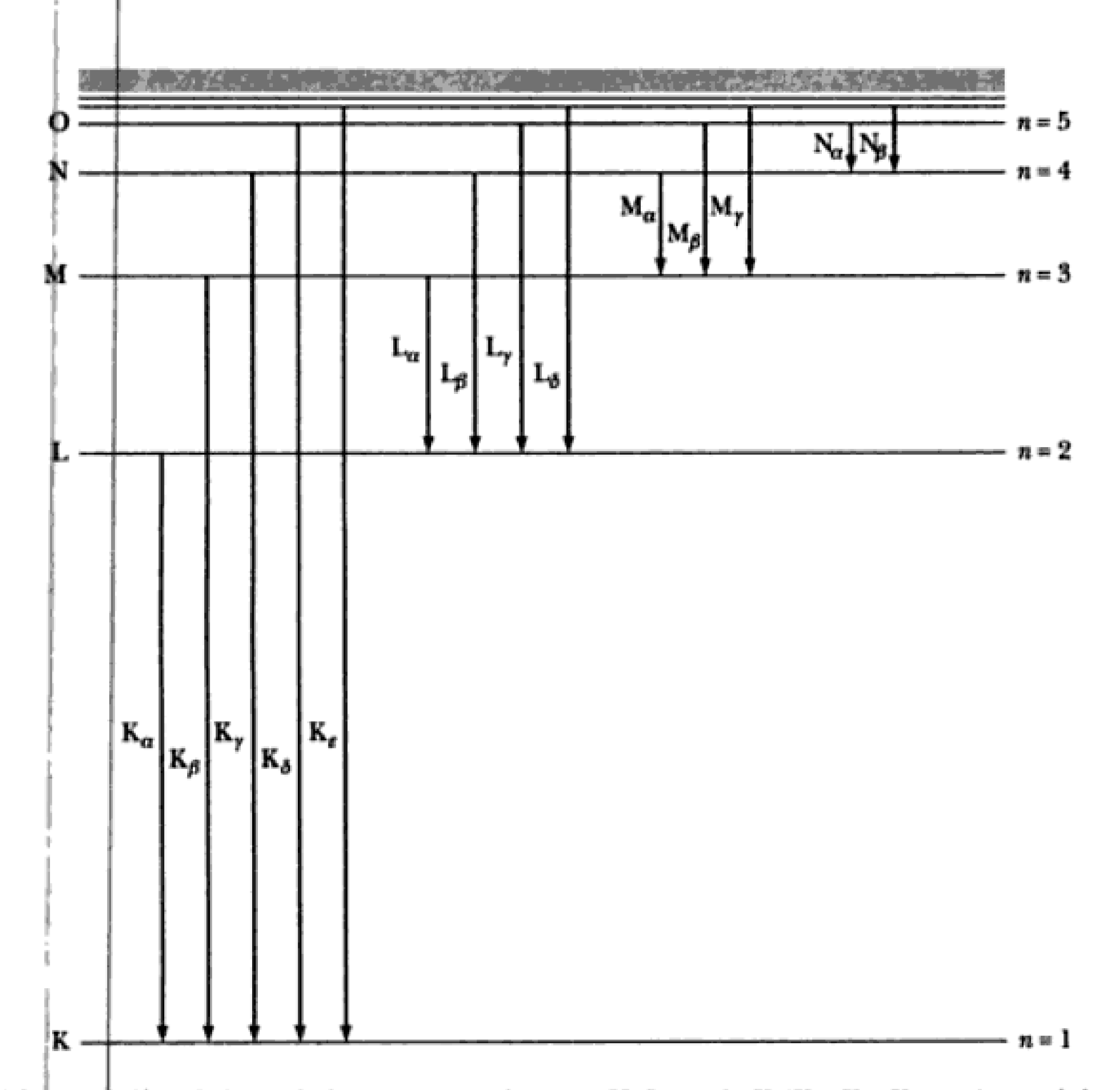


Figura 9.17 Origen de los espectros de rayos X. La serie K (K_α, K_β, K_γ, . . .) se origina por electrones en capas superiores que realizan una transición hacia abajo para llenar un hueco en la capa K. De la misma forma, el llenado de huecos creados en capas superiores produce la serie L, la serie M y así sucesivamente.

Así, para desalojar un electrón de la capa K del átomo de Mo es necesario suministrar aproximadamente 24 keV.[8] Energías de esta magnitud suelen obtenerse a partir del impacto de electrones: electrones acelerados hasta energías del orden de los kilovolts que chocan con átomos de un blanco de molibdeno, entregan toda o casi toda su energía a un átomo en una simple colisión. Si la energía de la colisión es suficientemente grande, puede excitar a uno de los electrones en la capa K llevándolo hacia un nivel vacante superior o, incluso, liberarlo del átomo. (Recuerde que en una capa K llena hay dos electrones.) En cualquier caso, lo que queda es un sitio vacante o *hueco*. Este hueco se llena rápidamente con otro electrón atómico que se encuentra en un estado superior, y la energía de transición se libera en forma de fotón. La energía exacta (y la longitud de onda) del fotón que escapa dependen de la energía del electrón que llena el hueco, lo que origina toda una serie de líneas de emisión K que se denotan en orden creciente de energía (longitud de onda decreciente) por K_α, K_β, K_γ, . . . De la misma forma, el llenado de huecos que quedan en capas superiores produce la serie L, la serie M, y así sucesivamente, como se ilustra en la figura 9.17.



Henry G. J. Moseley (1887–1915) descubrió una forma directa para medir el número atómico *Z*, a partir de la longitud de onda de rayos X característica emitida por un elemento. El trabajo de Moseley no sólo estableció la secuencia correcta de los elementos en la tabla periódica, también proporcionó otra confirmación del modelo atómico de Bohr, en este caso en energías de rayos X. Queda la pregunta de qué otros grandes descubrimientos hubiera hecho de no haber muerto en acción a la edad de 27 años en Turquía, durante la Primera Guerra Mundial. (*University of Oxford, Museum of the History of Science/Courtesy AIP Niels Bohr Library.*)

[8]En contraste, sólo se requieren 7.10 eV (la energía de ionización de la tabla 9.2) para liberar al electrón más externo, el 5*s*.

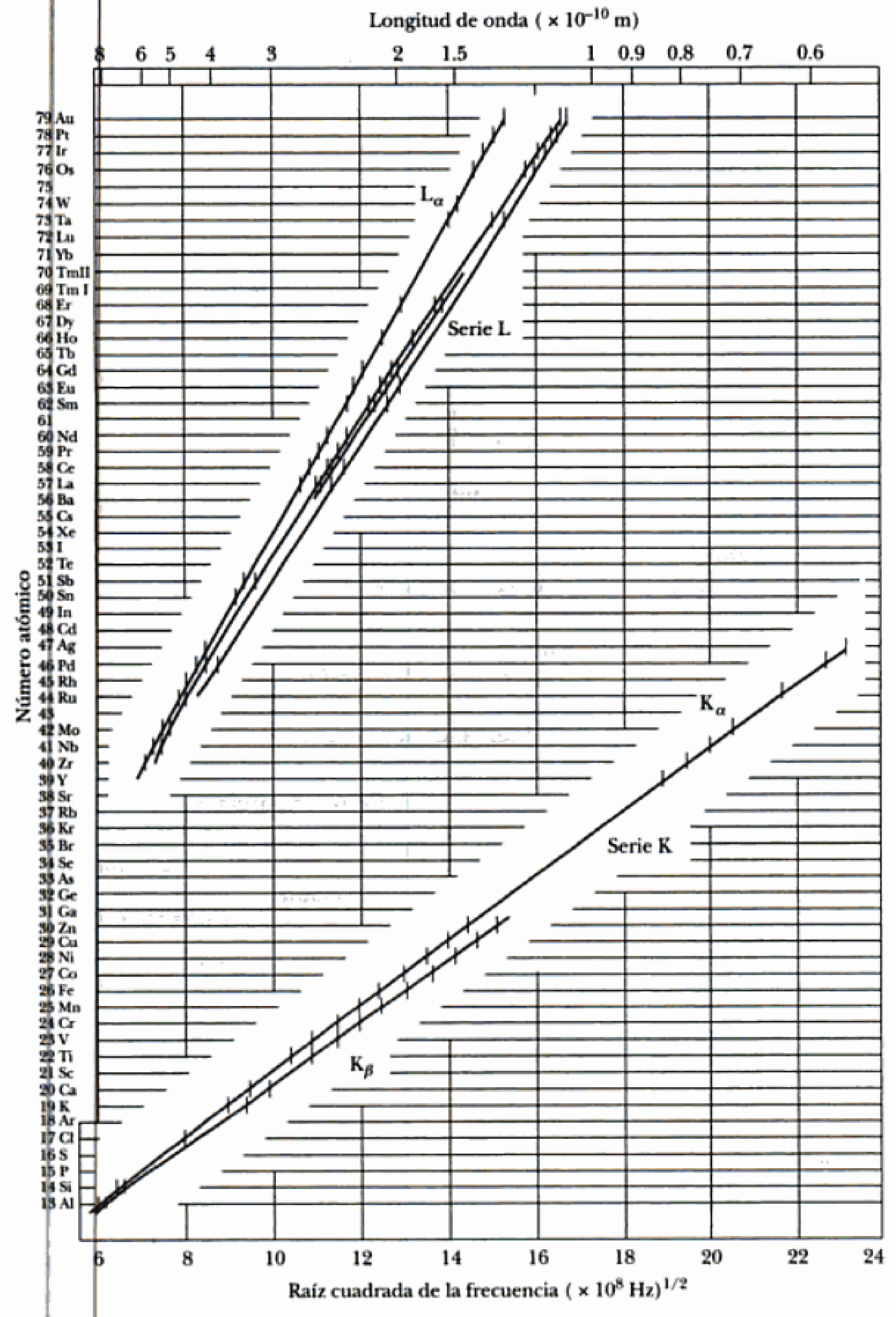


Figura 9.18 Datos originales de Moseley que muestran la relación entre el número atómico Z y las frecuencias características de los rayos X. Los huecos en $Z = 43$, 61 y 75 representan elementos que eran desconocidos cuando Moseley realizó su obra. (También hay varios errores en las designaciones del número atómico para los elementos.) (© *De H. G. J. Moseley,* Philos. Mag. (*6*), *27:703, 1914.*)

El cuanto de energía $\hbar\omega_L = \mu_B B$ está asociado con la frecuencia de Larmor. El nivel de la ℓ-ésima subcapa de un átomo en presencia en un campo magnético se separa en subniveles $2\ell + 1$, separados por la energía $\hbar\omega_L$ de Larmor. Éste es el **efecto Zeeman,** y $\hbar\omega_L$ también se denomina energía de Zeeman. La contribución magnética a la energía del átomo es

$$U = \hbar\omega_L m_\ell \tag{9.7}$$

donde m_ℓ es el mismo número cuántico magnético que se analizó en el capítulo 8. La ecuación 9.7 es un caso especial del resultado más general

$$U = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B} \tag{9.6}$$

para la energía potencial magnética U de cualquier momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ en un campo aplicado **B.**

Además de poseer cualquier momento magnético orbital, el electrón tiene un momento magnético intrínseco denominado **momento del espín,** $\boldsymbol{\mu}_s$. En una representación clásica, este momento surge debido a la rotación del electrón con respecto a su eje y es proporcional al momento angular de rotación, o espín, **S.** La magnitud del momento angular del espín es

$$|\mathbf{S}| = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar \tag{9.11}$$

que corresponde a un **número cuántico de espín** $s = \frac{1}{2}$, análogo al número cuántico orbital ℓ. La componente z de **S** está cuantizada como

$$S_z = m_s\hbar \tag{9.10}$$

donde el **número cuántico magnético de espín** m_s es el análogo del número cuántico magnético orbital m_ℓ. Para el electrón, m_s puede ser $+\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$, lo que describe los estados del espín hacia arriba y hacia abajo, respectivamente. Las ecuaciones 9.10 y 9.11 implican que el espín del electrón también está sujeto a una cuantización espacial. Esto fue confirmado experimentalmente por Stern y Gerlach, quienes observaron que un haz de átomos de plata que pasaba a través de un campo magnético no uniforme se separaba en dos componentes distintas. El mismo experimento muestra que el momento de espín está relacionado con el momento angular del espín por

$$\boldsymbol{\mu}_s = -\frac{e}{m_e}\mathbf{S}$$

Esto es el *doble* de grande que el momento orbital para el mismo momento angular. El factor anómalo de 2 se denomina **factor g** del electrón. Con el reconocimiento del espín, se requieren cuatro números cuánticos: n, ℓ, m_ℓ y m_s, para especificar el estado de un electrón atómico.

El momento de espín del electrón interactúa con el campo magnético que se genera por su movimiento orbital. La diferencia de energía entre las dos orientaciones del espín en este campo orbital es responsable de la **duplicación de la estructura fina** de las líneas espectrales atómicas. Con la interacción espín-órbita, los estados atómicos están identificados por un número cuántico j para momento angular *total* $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. El valor de j está incluido como un subíndice en la notación espectroscópica de los estados atómicos. Por ejemplo, $3P_{1/2}$ especifica un estado para el cual $n = 3$, $\ell = 1$ y $j = \frac{1}{2}$. Para cada valor de j hay $2j + 1$ posibilidades para el número cuántico magnético total m_j.

El **principio de exclusión** establece que en el mismo estado cuántico no pueden coexistir dos electrones; es decir, ningún par de electrones puede poseer los mismos cuatro números cuánticos. El principio de exclusión se deriva del concepto de que los electrones son partículas idénticas denominadas **fermiones,** los cuales son descritos por funciones de onda que son antisimétricas en las coordenadas del electrón. Las funciones de onda que son simétricas ante el intercambio de coordinadas de las partículas describen otra clase de objetos denominados **bosones,** para los cuales no es válido ningún principio de exclusión. Todas las partículas conocidas son fermiones o bosones. Un ejemplo de bosón es el fotón.

Al usar el principio de exclusión y el principio de energía mínima es posible determinar las configuraciones electrónicas de los elementos. Esto constituye una base para comprender la estructura atómica y las propiedades físicas y químicas de los elementos.

Es posible catalogar los espectros discretos de líneas de rayos X emitidos por diferentes metales en términos de las transiciones electrónicas en capas interiores. Cuando el bombardeo de electrones crea un hueco en una capa interna K o L, un electrón atómico ubicado en un estado superior ocupa rápidamente el hueco, entregando su exceso de energía como un fotón de rayos X. Según la **ley de Moseley,** la raíz cuadrada de esta frecuencia del fotón debe ser proporcional al número atómico del átomo emisor.

BIBLIOGRAFÍA ADICIONAL SUGERIDA

1. Una obra clásica sobre la física de los átomos es el libro de H. E. White, *Introduction to Atomic Spectra,* Nueva York, McGraw-Hill, 1934.

Las siguientes fuentes contienen análisis más extensos sobre los temas que se abordaron en este capítulo:

2. A. P. French y E. F. Taylor, *An Introduction to Quantum Physics,* Nueva York, W. W. Norton and Company, Inc., 1978.
3. R. Eisberg y R. Resnick, *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles,* 2a. edición, Nueva York, John Wiley and Sons, Inc., 1985.
4. B. H. Bransden y C. J. Joachain, *Physics of Atoms and Molecules,* Nueva York, John Wiley and Sons, Inc., 1990.

PREGUNTAS

1. ¿Por qué la dirección del momento angular orbital de un electrón es opuesta a la de su momento magnético?
2. ¿Por qué en el experimento de Stern-Gerlach se utiliza un campo magnético no homogéneo?
3. ¿Sería posible realizar el experimento de Stern-Gerlach con iones y no con átomos neutros? Explique su respuesta.
4. Describa algunos experimentos que podrían sustentar la conclusión de que el número cuántico de espín para los electrones sólo puede tomar los valores $\pm\frac{1}{2}$.
5. Analice algunas de las consecuencias del principio de exclusión.
6. ¿Por qué el litio, el potasio y el sodio presentan propiedades químicas semejantes?
7. Con base en la tabla 9.2, se encuentra que las energías de ionización para Li, Na, K, Rb y Cs son 5.390, 5.138, 4.339, 4.176 y 3.893 eV, respectivamente. Explique por qué estos valores son de esperar en términos de las estructuras atómicas.
8. Aun cuando electrones, protones y neutrones cumplen el principio de exclusión, algunas partículas que poseen un espín entero, como los fotones (espín = 1), no lo cumplen. Explique su respuesta.
9. ¿Cómo se sabe que el espín de un fotón es igual a 1?
10. Para excitar un electrón en un átomo de helio desde el estado 1*s* hasta el estado 2*s* se requiere una energía aproximada de 21 eV. Para realizar la misma transición en el ion He^+ se requiere casi el doble de esta energía. Explique por qué.
11. Analice la degeneración, para el caso de un átomo multielectrónico. ¿Puede haber degeneración para un átomo con sólo un electrón? Explique su respuesta.
12. El espectro de absorción o emisión de un gas consta de líneas que se ensanchan cuando aumenta la densidad de las moléculas del gas. ¿Por qué cree que ocurre esto?
13. Para un átomo o un ion con un electrón, el acoplamiento espín-órbita separa todos los estados, excepto el *s*, en duplas. ¿Por qué los estados *s* constituyen la excepción de esta regla?
14. ¿Por qué es aproximadamente correcto despreciar el efecto de apantallamiento de los electrones de la capa externa (por ejemplo, los electrones en las capas M y N) para un electrón de la capa L?

PROBLEMAS

9.1 Magnetismo orbital y efecto Zeeman normal

1. En la técnica denominada resonancia del espín del electrón (ESR, por sus iniciales en inglés), una muestra que contiene electrones no "apareados" se coloca en un campo magnético. Considere la situación más simple, en la cual sólo hay un electrón y, por tanto, sólo dos posibles estados energéticos, correspondientes a $m_s = \pm\frac{1}{2}$. En la ESR, el momento magnético del espín del electrón es "llevado" de un estado de menor energía a un estado de mayor energía por medio de la absorción de un fotón. (El estado de menor energía corresponde al caso en que el momento magnético $\boldsymbol{\mu}_s$ está alineado con el campo magnético, y el estado de mayor energía corresponde al caso en que $\boldsymbol{\mu}_s$ está alineado en direción contraria a la del campo.) ¿Cuál es la frecuencia, del fotón, necesaria para excitar una transición ESR en un campo magnético de 0.35 T?
2. Demuestre que, para una masa m con momento angular $\mathbf{L}$ en órbita, la rapidez con la cual la partícula barre un área

$$\frac{dA}{dt} = \frac{|\mathbf{L}|}{2m}$$

(*Sugerencia*: Primero demuestre que, en un desplazamiento $\mathbf{dr}$ *a lo largo de la trayectoria*, la partícula barre un área $dA = \frac{1}{2}|\mathbf{r} \times \mathbf{dr}|$, donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición de la partícula, trazado a partir de cierto origen.)

9.2 Giro del electrón

3. ¿Cuántos conjuntos distintos de números cuánticos son posibles para un electrón en el que a) $n = 1$, b) $n = 2$, c) $n = 3$, d) $n = 4$ y e) $n = 5$? Compruebe sus resultados para demostrar que coinciden con la regla general de que el número de conjuntos diferentes de números cuánticos es igual a $2n^2$.
4. Enumere los conjuntos de números cuánticos posibles para un electrón que está en a) la subcapa $3d$ y en b) la subcapa $3p$.
5. La fuerza sobre un momento magnético μ_z en un campo magnético no uniforme B_z está dada por

$$F_z = \mu_z \frac{dB_z}{dz}$$

Si un haz de átomos de plata se desplaza una distancia horizontal de 1 m a través de este campo y cada átomo tiene una velocidad de 100 m/s, ¿cuán intenso debe ser el gradiente dB_z/dz del campo para desviar el haz 1 mm ?
6. Considere el experimento original de Stern-Gerlach, en el que se utilizó un haz de átomos de plata, para el cual el momento magnético se debe totalmente al espín del único electrón de valencia del átomo de plata. Suponiendo que la magnitud del campo magnético $\mathbf{B}$ es igual a 0.500 T, calcule la diferencia de energía en electrón volts de los átomos de plata en los dos haces de salida.
7. Cuando de presentó el concepto de espín del electrón, se pensaba que éste era una pequeña esfera cargada; hoy se le considera como un objeto puntual sin extensión en el espacio. Encuentre la velocidad ecuatorial en el supuesto de que el electrón es una esfera uniforme de radio 3×10^{-6} nm, como creían los primeros teóricos, y compare su resultado con la velocidad de la luz, c.
8. Considere un cilindro circular recto de radio R, con una masa M distribuida uniformemente en todo el volumen del cilindro. Si éste se pone en rotación a una velocidad angular ω alrededor de su eje longitudinal, a) obtenga una expresión para el momento angular $\mathbf{L}$ del cilindro en rotación y, b) si una carga Q se distribuye de manera uniforme sólo sobre la superficie *curva*, encuentre el momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ del cilindro en rotación. Compare sus expresiones para $\boldsymbol{\mu}$ y $\mathbf{L}$ a fin de obtener el factor g para este objeto.
9. El espín de una partícula elemental exótica denominada *omega menos* (símbolo Ω^-) es igual a $\frac{3}{2}$. Calcule la magnitud del momento angular de espín para esta partícula y los ángulos posibles que el vector de momento angular de espín forma con el eje z. ¿La partícula Ω^- cumple el principio de exclusión de Pauli? Explique su respuesta.

9.3 Interacción espín-órbita y otros efectos magnéticos

10. Considere un átomo con un solo electrón en el estado $n = 2$. Encuentre todos los valores posibles de j y m_j para este estado.
11. Encuentre todos los valores posibles de j y m_j para un electrón d.
12. Proporcione la notación espectroscópica para los estados siguientes: a) $n = 7$, $\ell = 4$, $j = \frac{9}{2}$; b) todos los estados posibles de un electrón con $n = 6$ y $\ell = 5$.
13. Un electrón en un átomo se encuentra en el estado $4F_{5/2}$. a) Encuentre los valores de los números cuánticos n, ℓ y j. b) ¿Cuál es la magnitud del momento angular total del electrón? c) ¿Cuáles son los valores posibles para la componente z del momento angular total del electrón?
14. a) Empiece con la expresión $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ para el momento angular total de un electrón y obtenga una expresión para el producto escalar $\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$ en términos de los números cuánticos j, ℓ y s. b) Use $\mathbf{L} + \mathbf{S} = |\mathbf{L}|\,|\mathbf{S}|$ cos θ, donde θ es el ángulo entre $\mathbf{L}$ y $\mathbf{S}$, para encontrar el ángulo entre el momento angular orbital del electrón y el momento angular de espín para los siguientes estados: 1) $P_{1/2}$, $P_{3/2}$ y 2) $H_{9/2}$, $H_{11/2}$.
15. *Energía espín-órbita en un átomo.* Calcule la magnitud de la energía espín-órbita para un electrón atómico en el estado $2p$ del hidrógeno. (*Sugerencia*: Desde el ventajoso punto de vista del electrón en movimiento, el núcleo describe círculos alrededor suyo en una órbita cuyo radio es igual al radio de Bohr para este estado. Considere el electrón en órbita como una corriente en una espira circular y use el resultado del electromagnetismo clásico,

$$B = \frac{2k_m\mu}{r^3}$$

para el campo **B** en el centro de la espira con radio r y momento magnético μ. Aquí, $k_m = 10^{-7}$ N/A^2 es la constante magnética en unidades SI.)

9.4 Simetría de intercambio y principio de exclusión

16. Demuestre que la combinación simétrica de dos funciones de onda para una partícula

$$\psi_{ab}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_b(\mathbf{r}_2) + \psi_a(\mathbf{r}_2)\psi_b(\mathbf{r}_1)$$

presenta la simetría de intercambio característica de los bosones, ecuación 9.16. ¿Es posible que dos bosones ocupen el mismo estado cuántico? Explique su respuesta.

17. Ocho partículas idénticas que no interactúan entre sí se colocan en una caja cúbica de arista $L = 0.200$ nm. Encuentre la energía mínima del sistema (en electrón volts) y enumere los números cuánticos de todos los estados ocupados si a) las partículas son electrones y b) si poseen la misma masa que el electrón pero no cumplen el principio de exclusión.

9.5 Interacciones electrónicas y efectos de apantallamiento (opcional)

18. En la sección 9.5 se afirmó que un electrón d tiene un apantallamiento más efectivo de la carga nuclear en un átomo que un electrón p o un electrón s. Proporcione un razonamiento clásico con base en la definición de momento angular $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ que indique que valores menores de momento angular están asociados con órbitas de mayor excentricidad. Compruebe esto desde el punto de vista mecánico cuántico, calculando la probabilidad de que un electrón $2p$ del hidrógeno se encuentre en el interior de la capa atómica $n = 1$ y comparando esto con la probabilidad de encontrar a un electrón del hidrógeno $2s$ en esta misma región. ¿En cuál de los casos es mayor la probabilidad, y qué efecto tiene esto sobre el grado de apantallamiento? Las funciones de onda relevantes pueden consultarse en la tabla 8.4 del capítulo 8.

19. *Átomos multielectrónicos.* Para átomos que contienen muchos electrones, el potencial que ven los electrones exteriores, o de valencia, a menudo se describe por la función Thomas-Fermi (vea la ecuación 9.21)

$$U(r) = -\frac{Zke^2}{r}e^{-r/a}$$

donde Z es el número atómico y a es la longitud de apantallamiento de Thomas-Fermi. Use el applet Java disponible en nuestro sitio en la red (http://info.brookscole.com/mp3e → QmTools Simulations → Problem 9.19) para encontrar la energía de valencia mínima y la función de onda para el oro (Au), tomando $Z = 79$ y $a = 0.39a_0$. (Según la tabla 9.2, la configuración del electrón de valencia del oro es $6s^1$.) ¿Cuántos nodos muestra esta función de onda? Use los resultados de este estudio para calcular la energía de ionización del oro, y compárela con el valor experimental proporcionado en la tabla 9.2. También reporte la distancia al núcleo más probable a la que se encuentra el electrón $6s$ en el oro, según sus resultados. ¿Qué tamaño asignaría al átomo de oro? ¿Cómo se compara este tamaño con el de un átomo de hidrógeno?

20. *Defectos cuánticos.* Según la tabla 9.1, el defecto cuántico de la onda p para el sodio es 0.86. ¿Cuál es la energía del nivel $2p$ en el sodio? ¿Y para el nivel $3p$? Use el applet Java disponible en nuestro sitio en la red (http://info.brookscole.com/mp3e → QmTools Simulations → Problem 9.20) para determinar la longitud de apantallamiento b en la ecuación 9.22 que reproduce las energías del estado $2p$ para el átomo de sodio. Con base en sus descubrimientos, establezca la distancia más probable al núcleo de los electrones $2p$ en el sodio.

9.6 Tabla periódica

21. a) Escriba la configuración electrónica para el oxígeno ($Z = 8$). b) Escriba los valores para el conjunto de números cuánticos n, ℓ, m_ℓ y m_s para cada uno de los electrones en el oxígeno.

22. ¿Qué configuración electrónica tiene menor energía: [Ar]$3d^44s^2$ o [Ar]$3d^54s^1$? Identifique este elemento y analice la regla de Hund en este caso. (*Nota*: La notación [Ar] representa la configuración llena para el Ar.)

23. ¿Qué configuración electrónica tiene menor energía y mayor número de espines sin aparear: [Kr]$4d^95s^1$ o [Kr]$4d^{10}$? Identifique este elemento y analice la regla de Hund en este caso. (*Nota*: La notación [Kr] representa la configuración llena para el Kr.)

24. Elabore una tabla semejante a la que se muestra en la figura 9.15 para átomos que tienen entre 11 y 19 electrones. Use la regla de Hund y conjeturas bien fundamentadas.

25. Los estados de la materia son sólido, líquido, gaseoso y plasma. El plasma puede describirse como un gas de partículas cargadas, o como un gas de átomos ionizados. Casi toda la materia en el Sistema Solar es plasma (sobre todo en el interior del Sol). De hecho, la mayor parte de la materia en el universo es plasma; así como lo es la flama de una vela. Use la información de la figura 9.16 para estimar el orden de magnitud de la temperatura para la cual un elemento químico típico se transforma en plasma mediante la ionización de la mayor parte de los átomos de una muestra. Explique su razonamiento.

9.7 Espectros de rayos X y ley de Moseley

26. Demuestre que la ley de Moseley para radiación Kα puede expresarse como

$$\sqrt{f} = \sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{13.6\text{ eV}}{h}\right)}(Z-1)$$

donde f es la frecuencia de rayos X y Z es el número atómico. b) Compruebe que los datos originales de 1914 mostrados en la figura 9.18 coinciden con la ley de Mo-

10
Física estadística

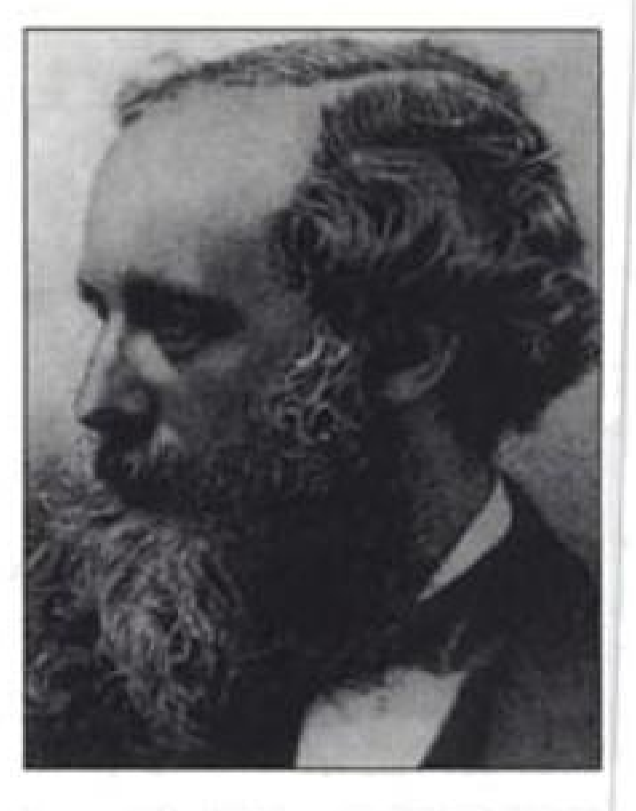
Contenido del capítulo

La termodinámica se basa en propiedades macroscópicas o volumétricas, como la temperatura y la presión de un gas. En este capítulo se explican las propiedades termodinámicas en términos del movimiento de átomos individuales. El objetivo de este método microscópico, conocido como física estadística, o mecánica estadística, es explicar las relaciones entre las propiedades macroscopias, termodinámicas, utilizando una representación atómica más fundamental. El movimiento detallado de los átomos individuales puede calcularse, en principio, a partir de las leyes de Newton o de la ecuación de Schrödinger. No obstante el número de átomos en una muestra de tamaño medio ($\approx 10^{22}$ átomos/cm^3), hace que dichos cálculos sean imprácticos, por lo que es necesario depender de un método estadístico.

En este capítulo se introducen las leyes de la física estadística y se analizan sistemas de partículas que satisfacen la mecánica clásica o la mecánica cuántica. Se demostrará cómo una cantidad fija de energía puede compartirse o distribuirse entre un gran número de partículas que están en equilibrio térmico a la temperatura *T*. Estudiaremos esta distribución de energía se investiga calculando el número promedio de partículas con una energía específica o, lo que es esencialmente lo mismo, determinando la probabilidad de que una partícula tenga cierta energía.

10.1 DISTRIBUCIÓN DE MAXWELL-BOLTZMANN

Una explicación satisfactoria de la termodinámica en términos de promedios de propiedades atómicas fue proporcionada en la segunda mitad de los 1800's por tres físicos: James Clerk Maxwell, Ludwig Boltzmann y Josiah Willard Gibbs. Maxwell, un profesor escocés en Cambridge estaba extremadamente impresionado por la obra de Rudolf Clausius que explica la aparente contradicción entre la alta velocidad de las moléculas de un gas a temperatura ambiente (aproximadamente 400 m/s) y la baja velocidad de difusión de un gas. Clausius había explicado este enigma al deducir que no todas las moléculas de un gas se desplazan con una velocidad alta, sino que en un gas hay una distribución bien definida de velocidades moleculares que depende de la temperatura de éste; es más, sus moléculas chocan entre sí, por lo que siguen largas trayectorias en zigzag de un punto a otro. A partir de esta idea, Maxwell pudo deducir la forma funcional de la distribución de velocidades en el equilibrio, la que es el número de moléculas de gas por unidad de volumen con velocidades entre v y $v + dv$ a una temperatura específica. Al aplicar la teoría estadística a esta distribución, Maxwell logró calcular la dependencia con respecto a la temperatura de cantidades como la velocidad molecular promedio, la velocidad más probable y la dispersión, o anchura, de la distribución de velocidades.



James Clerk Maxwell (1831-1879) suele considerarse como el físico teórico más importante del siglo XIX. (*Cortesía de AIP Emilio Segrè Visual Archives.*)

En 1872, Boltzmann, un profesor austriaco en la Universidad de Viena, profundamente impresionado por las ideas evolucionistas de Darwin, llevó más adelante la obra de Maxwell. No sólo buscaba establecer las propiedades de la distribución en el equilibrio o distribución más probable, sino que también deseaba describir la evolución temporal de un gas hacia la distribución de Maxwell: el denominado problema de aproximación al equilibrio. Con el uso de una función de distribución de velocidades dependiente del tiempo y su ecuación cinética, Boltzmann pudo demostrar que un sistema de partículas que parte de una distribución de velocidades distinta a la de Maxwell evoluciona continuamente hasta alcanzar eventualmente una distribución de velocidades de



¿Es el universo un casino? (*Cortesía del Tropicana Casino and Resort.*)



Ludwig Boltzmann (1844-1908), físico teórico austriaco. (*Cortesía de AIP Niels Bohr Library, Lande Collection.*)



Josiah Willard Gibbs (1839-1903), físico teórico estadounidense que realizó importantes contribuciones a la mecánica estadística. (*Burndy Library/Cortesía de AIP Emilio Segrè Visual Archives.*)

Maxwell en equilibrio. Boltzmann, un fiel defensor de la realidad de las moléculas, era objeto de ataques personales provenientes de críticos que rechazaban la teoría molecular de la materia a fines de 1800. Deprimido por la falta de aceptación universal de sus teorías, se suicidó en 1908.

Gibbs, al contrario de Boltzmann, llevó una vida apacible y aislada como profesor en la Universidad de Yale. Hijo de un profesor de Yale, pasó su vida adulta en la misma casa en New Haven donde creció, estableciendo discretamente la mecánica estadística y la teoría cinética de los gases sobre una rigurosa base matemática. Gibbs publicó su obra en la oscura revista *Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences*, y su obra permaneció relativamente desconocida durante su existencia.

Una vez que hemos mencionado brevemente las contribuciones de Maxwell, Boltzmann y Gibbs a la mecánica estadística, analizaremos las hipótesis subyacentes y la forma explícita de la distribución de Maxwell-Boltzmann para un sistema de partículas. Las hipótesis básicas son:

Hipótesis de la distribución de Maxwell–Boltzmann

- Las partículas son idénticas en términos de sus propiedades físicas, pero distinguibles en términos de su posición, camino o trayectoria. Después, en este capítulo demostraremos que esta hipótesis equivale a afirmar que el tamaño de la partícula es pequeño en comparación con la distancia promedio entre partículas.
- La distribución en equilibrio es la forma más probable de distribuir las partículas entre varios estados permitidos de energía sujetos a las restricciones de un número fijo de partículas y una energía total fija.
- No hay un límite teórico sobre el número de partículas en un estado energético dado, aunque la densidad de éstas es lo suficientemente baja y la temperatura lo suficientemente alta, de modo que no es probable que más de una partícula se encuentre en un estado dado al mismo tiempo.

A fin de aplicar estas hipótesis, se considerará el análisis de un sistema de tamaño manejable integrado por partículas distinguibles; en particular, considere la distribución de una energía total de $8E$ entre seis partículas, donde E es una unidad indivisible de energía. Para trabajar con un diagrama de tamaño razonable, en la figura 10.1a se enumeran las 20 formas posibles que hay de distribuir una energía de $8E$ entre seis partículas *indistinguibles*. Debido a que en realidad se tiene interés en las partículas *distinguibles*, cada uno de los 20 arreglos puede descomponerse en muchos subestados distinguibles, o **microestados,** como se muestra de manera explícita para un arreglo en la figura 10.1b. El número de microestados para cada uno de los 20 arreglos se proporciona entre paréntesis en la figura 10.1a y puede calcularse a partir de la relación

$$N_{\mathrm{MB}} = \frac{N!}{n_1!n_2!n_3! \ . \ . \ .} \tag{10.1}$$

donde N_{MB} es el número de microestados de Maxwell-Boltzmann, N es el número total de partículas y n_1, n_2, n_3, . . . son los números de partículas en estados *ocupados* de una cierta energía. Este resultado puede entenderse argumentando que el primer nivel de energía puede asignarse en N formas, el segundo en $N-1$ formas, y así sucesivamente para obtener $N!$ en el numerador. El factor en el denominador de la ecuación 10.1 corrige la presencia de arreglos de orden indistinguibles cuando más de una partícula ocupa el mismo nivel de energía. Como ejemplo de la aplicación de la ecuación 10.1, considere la distribución de energía de seis partículas, de modo que dos de ellas tienen energía $1E$, una tiene energía $6E$ y tres tienen energía 0. Esta distribución de energía se

$$N_{\mathrm{MB}} = \frac{6!}{3!2!1!} = 60$$

lo que concuerda con el número entre paréntesis del diagrama.

Para encontrar el número promedio de partículas con un valor particular de energía, por ejemplo E_j, se suma el número de partículas con energía E_j en cada arreglo ponderado por la probabilidad de tener tal arreglo:

$$\overline{n_j} = n_{j_1}p_1 + n_{j_2}p_2 + \cdots \tag{10.2}$$

Aquí $\overline{n_j}$ es el número promedio de partículas en el j-ésimo nivel energético, n_{j1} es el número de partículas encontradas en el j-ésimo nivel en el arreglo 1, n_{j2} es el número de partículas encontradas en el j-ésimo nivel en el arreglo 2, p_1 es la probabilidad de observar el arreglo 1, p_2 es la probabilidad de observar el arreglo 2, y así sucesivamente. **Al utilizar el postulado básico de la mecánica estadística de que cualquier microestado individual es tan probable como cualquier otro microestado individual,** puede proseguirse el cálculo de las p's y $\overline{n_j}$'s. Por ejemplo, ya que en total se tienen 1287 microestados (la suma de todos los números entre paréntesis), y 6 formas distinguibles para obtener el arreglo 1 (el arreglo de la extrema izquierda en la primera fila de la figura 10.1a), se observa que $p_1 = 6/1287$. Al aplicar estas ideas y la ecuación 10.2 se calcula el número promedio de partículas con energía 0 como sigue:

$$\begin{aligned}\overline{n_0} = {} & (5)(6/1287) + (4)(30/1287) + (4)(30/1287) + (3)(60/1287) \\ & + (4)(30/1287) + (3)(120/1287) + (2)(60/1287) + (4)(15/1287) \\ & + (3)(120/1287) + (3)(60/1287) + (2)(180/1287) \\ & + (1)(30/1287) + (3)(60/1287) + (2)(90/1287) + (2)(180/1287) \\ & + (1)(120/1287) + (0)(6/1287) + (2)(15/1287) \\ & + (1)(60/1287) + (0)(15/1287) \\ = {} & 2.307\end{aligned}$$

Ahora observe que es fácil calcular la probabilidad de encontrar una partícula con energía 0 si se imagina una búsqueda al azar dentro de una caja que contiene las seis partículas con una energía total $8E$. Esta probabilidad, $p(0)$, es simplemente el número promedio de partículas con energía 0 dividido entre el número total de partículas:

$$p(0) = \frac{\overline{n_0}}{6} = \frac{2.307}{6} = 0.385$$

Se deja como ejercicio (problema 1) demostrar que las probabilidades de encontrar una partícula con energías desde $1E$ hasta $8E$ son:

$$p(1E) = 0.256$$

$$p(2E) = 0.167$$

$$p(3E) = 0.0978$$

$$p(4E) = 0.0543$$

$$p(5E) = 0.0272$$

$$p(6E) = 0.0117$$

EJEMPLO 10.1 Líneas de emisión de hidrógeno estelar

a) Encuentre la población del primer y segundo estado excitado primero y del hidrógeno atómico a temperatura ambiente, suponiendo que el hidrógeno satisface la estadística de Maxwell-Boltzmann.

Solución Para un gas a presiones ordinarias, los átomos conservan los niveles cuánticos discretos de átomos aislados. Recuerde que los niveles energéticos discretos del hidrógeno atómico están dados por $E_n = (-13.6/n^2)$ eV y que la degeneración está dada por $g_n = 2n^2$. Así, se tiene

$$\text{Estado base:} \quad E_1 = -13.6 \text{ eV} \qquad g_1 = 2$$

$$\text{Primer estado excitado:} \quad E_2 = -3.40 \text{ eV} \qquad g_2 = 8$$

$$\text{Segundo estado excitado:} \quad E_3 = -1.51 \text{ eV} \qquad g_3 = 18$$

Al usar la ecuación 10.4 se obtiene

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2 A e^{-E_2/k_B T}}{g_1 A e^{-E_1/k_B T}} = \frac{g_2}{g_1} e^{(E_1 - E_2)/k_B T}$$

$$= \frac{8}{2} \exp\{(-10.2 \text{ eV})/(8.617 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(300 \text{ K})\}$$

$$= 4e^{-395} \approx 0$$

La razón n_3/n_1 será todavía más pequeña. Así, esencialmente todos los átomos están a 300 K en el estado base.

b) Encuentre la población del primer segundo estado excitado del hidrógeno calentado a 20 000 K en una estrella.

Solución Cuando un gas está a temperaturas muy altas (como en una flama, sometido a una descarga eléctrica o en una estrella), cantidades detectables de átomos se encuentran en estados excitados. En este caso, $T = 20\,000$ K, $k_B T = 1.72$ eV y se encuentra

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} e^{(E_1 - E_2)/k_B T} = 4e^{-10.2/1.72} = 0.0107$$

$$\frac{n_3}{n_1} = \frac{g_3}{g_1} e^{(E_1 - E_3)/k_B T} = 9e^{-12.1/1.72} = 0.0807$$

c) Encuentre las intensidades de emisión de las líneas espectrales correspondientes a las transiciones $E_3 \rightarrow E_1$ y $E_3 \rightarrow E_2$ con respecto a $E_2 \rightarrow E_1$ a 20 000 K, suponiendo una probabilidad de transición igual para $E_3 \rightarrow E_1$, $E_3 \rightarrow E_2$ y $E_2 \rightarrow E_1$.

Solución La intensidad de una línea de emisión o absorción es proporcional al número de transiciones atómicas por unidad de tiempo. Para partículas que obedecen la estadística de Maxwell-Boltzmann, el número de transiciones por unidad de tiempo desde algún estado inicial (i) hasta algún estado final (f) es igual al producto de la población del estado inicial y la probabilidad de la transición i → f. Observe que *la rapidez de transición para partículas que obedecen la estadística MB sólo depende de la población inicial, ya que no hay restricciones para el número de partículas en el estado final.* Volviendo al cálculo de la intensidad de emisión, *S*, se encuentran los valores relativos:

$$\frac{S(3 \rightarrow 1)}{S(2 \rightarrow 1)} = \frac{n_3 P(3 \rightarrow 1)}{n_2 P(2 \rightarrow 1)}$$

$$\frac{S(3 \rightarrow 2)}{S(2 \rightarrow 1)} = \frac{n_3 P(3 \rightarrow 2)}{n_2 P(2 \rightarrow 1)}$$

En realidad, las probabilidades de transición dependen de las funciones de onda de los estados implicados, aunque para simplificar las cosas se suponen probabilidades de transición iguales; es decir, $P(2 \rightarrow 1) = P(3 \rightarrow 1) = P(3 \rightarrow 2)$. Así, se llega a

$$\frac{S(3 \rightarrow 1)}{S(2 \rightarrow 1)} = \frac{n_3}{n_2} = \frac{g_3}{g_2} e^{(E_2 - E_3)/k_B T} = \frac{18}{8} e^{-1.89/1.73}$$

$$= 0.75$$

$$\frac{S(3 \rightarrow 2)}{S(2 \rightarrow 1)} = 0.75$$

Si las líneas de emisión son angostas, las alturas medidas de las líneas 3 → 1 y 3 → 2 son 75% la altura de la línea 2 → 1, como se muestra en la figura 10.3. Para líneas más anchas, es necesario usar el área bajo los picos como medida experimental de la intensidad de emisión.

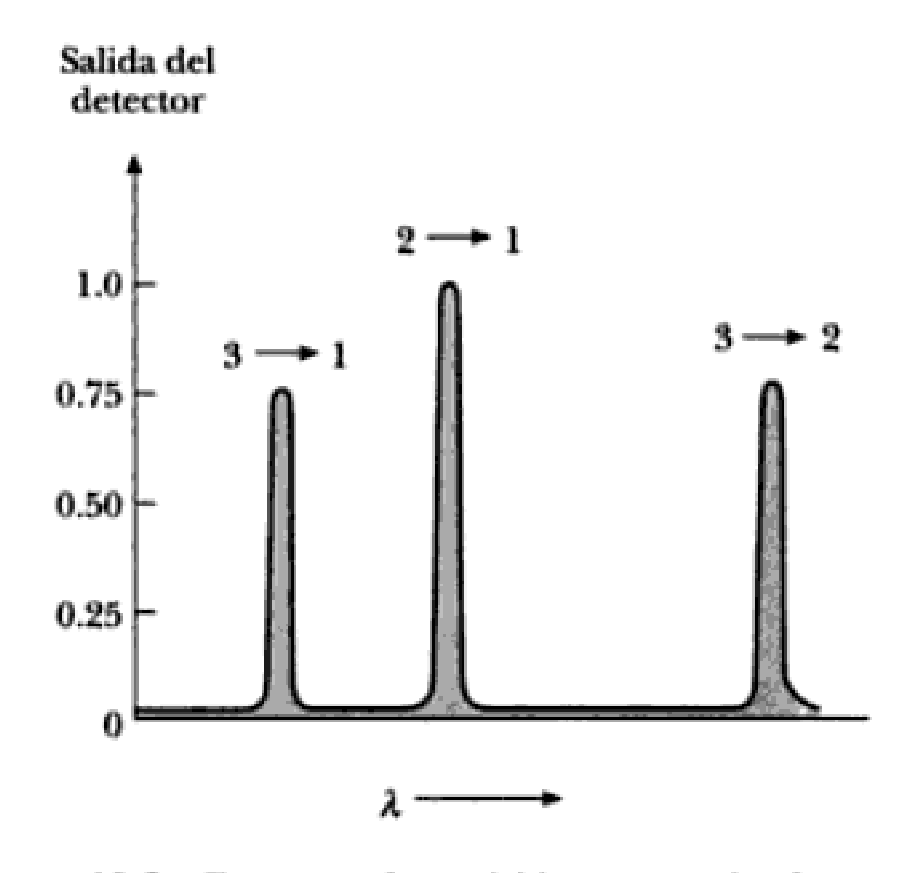


Figura 10.3 Espectro de emisión pronosticado para las transiciones 2 → 1, 3 → 1 y 3 → 2 para hidrógeno atómico a 20 000 K.

Distribución de velocidades de Maxwell para moléculas de gas en equilibrio térmico a la temperatura T

La importante fórmula de Maxwell para la distribución de velocidades en equilibrio, o para el número de moléculas con *velocidades* entre v y $v + dv$ en un gas a temperatura T, puede encontrarse usando la distribución de Maxwell-Boltzmann en su forma continua (ecuaciones 10.6 y 10.7). En particular, se demostrará que

$$n(v)\,dv = \frac{4\pi N}{V}\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2k_BT}dv \qquad (10.8)$$

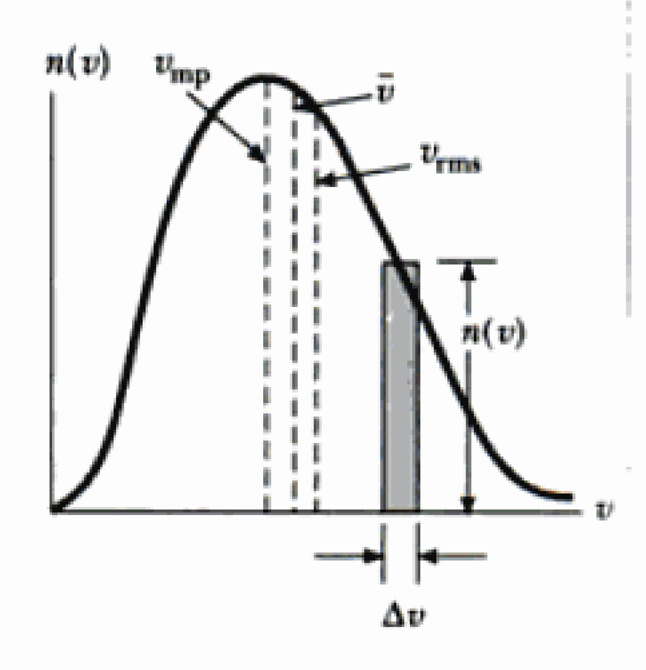


Figura 10.4 Distribución de velocidades de moléculas de un gas a cierta temperatura. El número de moléculas en el intervalo Δv es igual al área del rectángulo sombreado, $n(v)\Delta v$. Se indican la velocidad más probable, v_{mp}, la velocidad promedio, $\bar{v}$ y la raíz cuadrática media de la velocidad v_{rms}.

donde $n(v)\,dv$ es el número de moléculas de gas por unidad de volumen con velocidades entre v y $v + dv$, N/V es el número total de moléculas por unidad de volumen, m es la masa de una molécula de gas, k_B es la constante de Boltzmann y T es la temperatura absoluta. Esta función de distribución de velocidades se muestra en la figura 10.4. El término v^2 determina el comportamiento de la distribución cuando $v \to 0$, y el término exponencial determina lo que ocurre cuando $v \to \infty$.

Para un gas ideal de partículas puntuales (sin estructura interna ni interacciones entre partículas), la energía de cada molécula sólo consta de energía cinética de traslación, y así se tiene

$$E = \tfrac{1}{2}mv^2$$

para cada molécula. Como las moléculas del gas poseen velocidades distribuidas de manera continua desde 0 hasta ∞, la distribución de energía de las moléculas también es continua y el número de moléculas por unidad de volumen con energía entre E y $E + dE$ puede escribirse como

$$n(E)\,dE = g(E)f_{MB}(E)\,dE = g(E)Ae^{-mv^2/2k_BT}\,dE$$

Para encontrar la densidad de estados, $g(E)$, se introduce el concepto de **espacio de velocidad.** Según esta idea, la velocidad de cada molécula puede representarse por un vector velocidad con componentes v_x, v_y y v_z o por un *punto* en el espacio de velocidad con ejes coordenados v_x, v_y y v_z (figura 10.5). En la figura 10.5 se observa que el número de estados $f(v)\,dv$ con velocidades entre v y $v + dv$ es proporcional al volumen del cascarón esférico entre v y $v + dv$.

$$f(v)\;dv = C4\pi v^2\;dv \qquad (10.9)$$

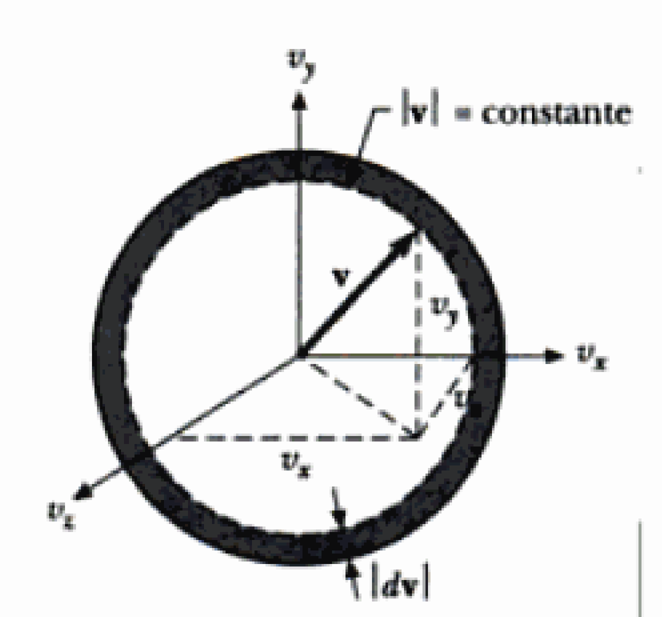


Figura 10.5 Espacio de velocidad. El número de estados con velocidades entre v y $v + dv$ es proporcional al volumen de un cascarón esférico de radio v y grosor dv.

donde C es alguna constante. Debido a que $E = \frac{1}{2}mv^2$, cada velocidad v corresponde a una sola energía E, y el número de estados de energía, $g(E)\,dE$, con energías entre E y $E + dE$, es el mismo que el número de estados con velocidades entre v y $v + dv$. Así,

$$g(E)\;dE = f(v)\;dv = C4\pi v^2\;dv$$

Al sustituir esta expresión para $g(E)\,dE$ en la expresión para $n(E)\,dE$, se obtiene

$$n(E)\;dE = A4\pi v^2 e^{-mv^2/2k_BT}\,dv$$

donde la constante C ha sido incluida en el coeficiente de normalización A. Debido a que el número de moléculas con energías entre E y $E + dE$ es igual al número de moléculas con velocidades entre v y $v + dv$, puede escribirse

$$n(E)\;dE = n(v)\;dv = A4\pi v^2 e^{-mv^2/2k_BT}\,dv \qquad (10.10)$$

Para encontrar A se considera que el número total de partículas por unidad de volumen es N/V:

$$\frac{N}{V} = \int_0^\infty n(v)\,dv = \int_0^\infty 4\pi A v^2 e^{-mv^2/2k_BT}\,dv \qquad (10.11)$$

Debido a que

$$\int_0^\infty z^{2j} e^{-az^2}\,dz = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2j-1)}{2^{j+1}a^j}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad j = 1, 2, 3, \ldots$$

con $j = 1$ y $a = m/2k_BT$ se encuentra

$$\frac{N}{V} = \frac{(4\pi A)}{2^2(m/2k_BT)}\sqrt{\frac{\pi 2k_BT}{m}} = A\left(\frac{2\pi k_BT}{m}\right)^{3/2}$$

o bien,

$$A = \frac{N}{V}\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}$$

En consecuencia, el coeficiente de normalización A depende del número de partículas por unidad de volumen, de la masa de la partícula y de la temperatura. Al sustituir este valor de A en la ecuación 10.10, se obtiene finalmente el famoso resultado que Maxwell encontró en 1859:

$$n(v)\,dv = \frac{4\pi N}{V}\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2k_BT}\,dv \qquad (10.8)$$

Para encontrar la velocidad promedio $\overline{v}$, indicada en la figura 10.4, $n(v)\,dv$ se multiplica por v, se integra sobre todas las velocidades desde 0 hasta ∞ y el resultado se divide entre el número total de moléculas por unidad de volumen:

$$\overline{v} = \frac{\int_0^\infty v n(v)\,dv}{N/V} = \frac{4\pi(N/V)(m/2\pi k_BT)^{3/2}\int_0^\infty v^3 e^{-mv^2/2k_BT}\,dv}{N/V}$$

Al usar la fórmula de la integral definida

$$\int_0^\infty z^3 e^{-az^2}\,dz = \frac{1}{2a^2}$$

se obtiene

$$\overline{v} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2k_BT}{m}\right)^2 = \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}} \qquad (10.12)$$

Este importante resultado, demostrado por primera vez por Maxwell, muestra que la velocidad promedio de las moléculas en un gas es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la masa molecular. La raíz cuadrática media de la velocidad puede encontrarse al determinar el promedio de v^2, denotado por $\overline{v^2}$, y luego extrayendo su raíz cuadrada. En consecuencia, se tiene

$$\overline{v^2} = \frac{\int_0^\infty v^2 n(v)\,dv}{N/V} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2}\int_0^\infty v^4 e^{-mv^2/2k_BT}\,dv$$

tículas en equilibrio térmico a la temperatura T, $\overline{p_x} = 0$ y $\overline{p_x^2}/2m = k_B T/2$ del teorema de equipartición. Así,

$$\Delta p_x = \sqrt{\overline{p_x^2} - (\overline{p_x})^2} = \sqrt{mk_B T} \tag{10.16}$$

Al sustituir esta expresión para Δp_x en $\Delta p_x \Delta x \geq \hbar/2$, se encuentra

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\sqrt{mk_B T}} \tag{10.17}$$

Como ya se mencionó, la incertidumbre en la posición de la partícula, Δx, debe ser mucho menor que la distancia promedio, d, entre partículas si éstas han de ser distinguibles y se cumple la distribución de Maxwell-Boltzmann. Al sustituir $d = (V/N)^{1/3}$ y $\Delta x = \hbar/2\sqrt{mk_B T}$ en la relación $\Delta x \ll d$ se obtiene

$$\frac{\hbar}{2\sqrt{mk_B T}} \ll \left(\frac{V}{N}\right)^{1/3}$$

o bien, al elevar al cubo ambos lados de la ecuación,

$$\left(\frac{N}{V}\right)\frac{\hbar^3}{8(mk_B T)^{3/2}} \ll 1 \tag{10.18}$$

Criterio para la validez de la estadística de Maxwell–Boltzmann

La ecuación 10.18 muestra que la distribución de Maxwell-Boltzmann se cumple en el caso de baja concentración de partículas y para partículas con masa y temperatura altas.

EJEMPLO 10.2 ¿Cuándo es posible utilizar la estadística de Maxwell-Boltzmann?

a) ¿Es válida la estadística de Maxwell-Boltzmann para hidrógeno gaseoso a temperatura y presión normales (STP, por sus siglas en inglés)?

Solución En condiciones normales de 273 K y 1 atmósfera, 1 mol de H_2 gaseoso (6.02×10^{23} moléculas) ocupa un volumen de 22.4×10^{-3} m^3. Al usar $m_{H_2} = 3.34 \times 10^{-27}$ kg y $k_B T = 3.77 \times 10^{-21}$ J, se encuentra

$$\left(\frac{N}{V}\right)\frac{\hbar^3}{8(mk_B T)^{3/2}} = \left(\frac{6.02 \times 10^{23}}{22.4 \times 10^{-3}\ \text{m}^3}\right) \times \frac{(1.055 \times 10^{-34})^3\ (\text{J}\cdot\text{s})^3}{8[(3.34 \times 10^{-27}\ \text{kg})(3.77 \times 10^{-21}\ \text{J})]^{3/2}} = 8.83 \times 10^{-8}$$

Esto es mucho menor que 1 y, de acuerdo con la condición proporcionada por la ecuación 10.18, se concluye que incluso el hidrógeno, el gas más ligero, se describe utilizando la estadística de Maxwell-Boltzmann.

b) ¿Es válida la estadística de Maxwell-Boltzmann para los electrones de conducción en plata a 300 K?

Solución La densidad de la plata es 10.5 g/cm^3, y su peso molar es de 107.9 g. Si se supone que se tiene un electrón libre por cada átomo de plata, se encuentra que la densidad de electrones libres es

$$\frac{10.5\ \text{g/cm}^3}{107.9\ \text{g/mol}}(6.02 \times 10^{23}\ \text{electrones/mol}) = 5.86 \times 10^{22}\ \text{electrones/cm}^3 = 5.86 \times 10^{28}\ \text{electrones/m}^3$$

Observe que la densidad de electrones libres en la plata es aproximadamente 2000 veces mayor que la densidad de moléculas de hidrógeno gaseoso a temperatura y presión normales; es decir,

$$\frac{(N/V)_{\text{electrones en Ag}}}{(N/V)_{H_2\ \text{en STP}}} = \frac{5.86 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}}{2.69 \times 10^{25}\ \text{m}^{-3}} = 2180$$

Al usar $\hbar^3 = 1.174 \times 10^{-102}$ (J·s)^3, $m_e = 9.109 \times 10^{-31}$ kg, y $k_B T = 4.14 \times 10^{-21}$ J (a $T = 300$ K), se encuentra

$$\left(\frac{N}{V}\right)\frac{\hbar^3}{8(m_e k_B T)^{3/2}} = 4.64$$

Cuando este resultado se compara con la condición establecida en la ecuación 10.18, se concluye que la distribución de Maxwell-Boltzmann *no se cumple* para los electrones en la plata debido a la pequeña masa de los electrones y la alta densidad de electrones libres. Se verá que la distribución cuántica correcta para los electrones es la de Fermi-Dirac.

De esta forma se llega al asombroso resultado de que ¡los bosones tienen el doble de probabilidad de ocupar el mismo estado que las partículas distinguibles! Se trata de un efecto completamente cuántico, y es *como si* hubiera una fuerza que atrajese bosones adicionales una vez que un bosón ocupa un estado, aun cuando no hay verdaderas fuerzas físicas presentes, como las electromagnéticas intermoleculares. Einstein fue el primero en señalar que un gas *ideal* de bosones (¡sin fuerzas intermoleculares de atracción!) aún podía experimentar un tipo extraño de condensación a temperaturas suficientemente bajas, denominada **condensación de Bose-Einstein** (**BEC,** por sus siglas en inglés). Una condensación de Bose-Einstein es un único estado cooperativo donde todas las funciones de onda de partículas individuales se encuentran en fase en el estado base. En 1955, la predicción de Einstein fue confirmada directamente por un grupo de científicos, dirigido por Eric Cornell y Carl Wieman, en la Universidad de Colorado, quienes observaron una BEC en una nube de átomos de rubidio enfriada a menos de 100 nK (para más detalles al respecto, consulte el ensayo de Steven Chu al final de este capítulo).

Para fermiones, como en el capítulo 9, se encuentra que la probabilidad de que dos fermiones se encuentren en el mismo estado es igual a cero, ya que la función de onda es cero:

$$\psi_F = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_a(\mathbf{r}_1)\psi_a(\mathbf{r}_2) - \psi_a(\mathbf{r}_2)\psi_a(\mathbf{r}_1)\right] = 0$$

Nuevamente, éste es el principio de exclusión de Pauli.

Distribuciones de Bose-Einstein y Fermi-Dirac

Como se ha visto, hay dos distribuciones para partículas indistinguibles que surgen de los requerimientos de paridad en las funciones de onda del sistema, la **distribución de Bose-Einstein** y la **distribución de Fermi-Dirac.** Para obtener la distribución de Bose-Einstein, se mantiene la hipótesis de MB de que no hay límite teórico para el número de partículas en cada estado. Las partículas que satisfacen la distribución de Bose-Einstein se denominan **bosones,** y se observa que tienen **espín entero.** Algunos ejemplos de bosones son: la partícula alfa ($S = 0$), el fotón ($S = 1$) y el deuterón ($S = 1$). Para obtener la distribución de Fermi-Dirac se establece que sólo una partícula puede ocupar un estado cuántico dado. Las partículas que obedecen la distribución de Fermi-Dirac se denominan **fermiones,** y se observa que tienen **espín semientero.** Algunos ejemplos importantes de fermiones son el electrón, el protón y el neutrón, todos con espín $\frac{1}{2}$.

A fin de ver los cambios esenciales introducidos por la estadística cuántica en la función de distribución, se volverá al sistema simple de seis partículas con energía total de $8E$. Primero se considerará el caso de Bose-Einstein; las partículas son indistinguibles y no hay límite para el número de partículas en un estado energético particular. La figura 10.1a se trazó para representar esta situación. Debido a que las partículas son indistinguibles, cada uno de los 20 arreglos que se muestran en la figura 10.1a es igualmente probable, de modo que la probabilidad de cada arreglo es 1/20. El número promedio de partículas en un estado energético particular puede calcularse usando de nuevo la ecuación 10.2. Se encuentra que el número promedio de partículas en el estado de energía cero es

$$\begin{aligned}\overline{n_0} &= (5)(1/20) + (4)(1/20) + (4)(1/20) + (3)(1/20) + (4)(1/20)\\ &\quad + (3)(1/20) + (2)(1/20) + (4)(1/20) + (3)(1/20) + (3)(1/20)\\ &\quad + (2)(1/20) + (1)(1/20) + (3)(1/20) + (2)(1/20) + (2)(1/20)\\ &\quad + (1)(1/20) + (0)(1/20) + (2)(1/20) + (1)(1/20) + (0)(1/20)\\ &= 49/20 = 2.45\end{aligned}$$

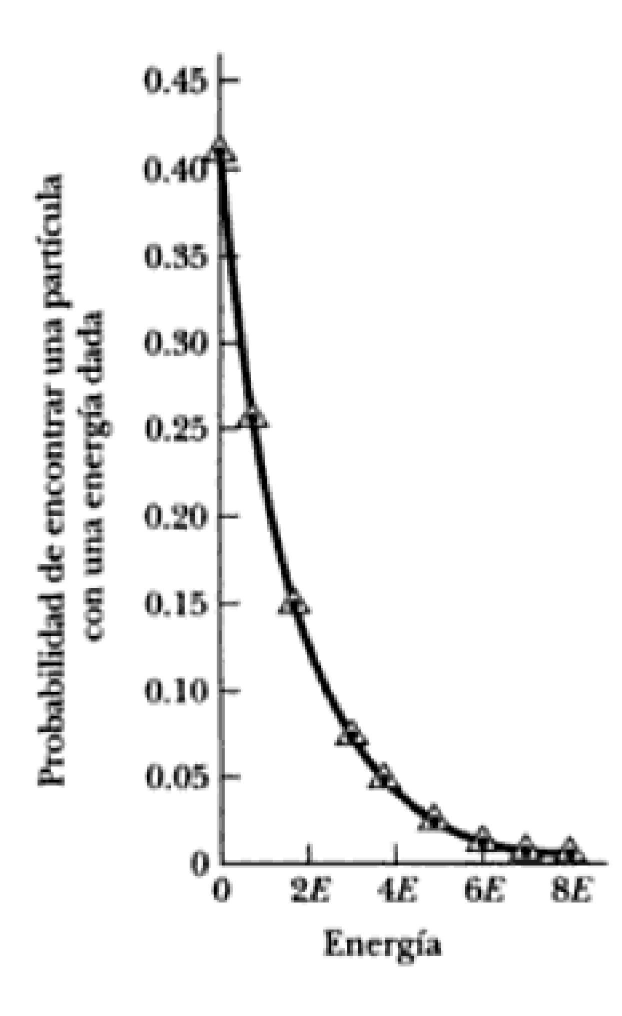


Figura 10.6 Función de distribución de seis partículas indistinguibles con una energía total $8E$ (bosones).

De manera semejante, se encuentra $\overline{n_1} = 31/20 = 1.55$, $\overline{n_2} = 18/20 = 0.90$, $\overline{n_3} = 9/20 = 0.45$, $\overline{n_4} = 6/20 = 0.30$, $\overline{n_5} = 3/20 = 0.15$, $\overline{n_6} = 2/20 = 0.10$, $\overline{n_7} = 1/20 = 0.05$, y $\overline{n_8} = 0.05$. Usando nuevamente la idea de que la probabilidad de encontrar una partícula con una energía dada, $p(E)$, es simplemente el número promedio de partículas con esa energía dividido entre el número total de partículas, se encuentra

$$p(0) = \frac{\overline{n_0}}{6} = \frac{2.45}{6} = 0.408$$

De manera semejante, se encuentra $p(1E) = 0.258$, $p(2E) = 0.150$, $p(3E) = 0.0750$, $p(4E) = 0.0500$, $p(5E) = 0.0250$, $p(6E) = 0.0167$, $p(7E) = 0.00833$ y $p(8E) = 0.00833$. Una gráfica de estos valores en la figura 10.6 muestra que la distribución de Bose-Einstein proporciona resultados semejantes, aunque no idénticos a los de la distribución de Maxwell-Boltzmann. En general, la distribución de Bose-Einstein tiende a tener más partículas en los niveles energéticos más bajos. A energías superiores, las curvas se aproximan entre sí y ambas exhiben un rápido decremento en la probabilidad con el aumento de energía.

Para ilustrar la forma distintiva de la distribución de Fermi-Dirac, nuevamente se considerará el ejemplo de seis partículas indistinguibles con energía $8E$. Debido a que las partículas son fermiones, se impone la restricción de que no más de dos partículas pueden asignarse a un estado energético dado (lo cual corresponde a electrones con espín hacia arriba y hacia abajo). De los 20 arreglos que se muestran en la figura 10.1a sólo hay tres (denotadas por FD) que cumplen esta restricción adicional impuesta por el principio de exclusión de Pauli. Debido a que cada uno de estos arreglos es igualmente probable, la probabilidad de tener de cada uno es 1/3, y de nueva cuenta se aplica la ecuación 10.2 para calcular el número promedio de fermiones que están en el nivel de energía cero, como sigue:

$$\overline{n_0} = (2)(1/3) + (2)(1/3) + (2)(1/3) = 2.00$$

De manera semejante, para el número promedio de fermiones con energías de $1E$ hasta $8E$ se encuentra lo siguiente:

$$\overline{n_1} = 5/3 = 1.67, \overline{n_2} = 3/3 = 1, \overline{n_3} = 3/3 = 1, \overline{n_4} = 1/3 = 0.33,$$
$$\overline{n_5} = \overline{n_6} = \overline{n_7} = \overline{n_8} = 0$$

Por último, se obtienen las probabilidades de encontrar un fermión con energías desde 0 hasta $8E$:

$$p(0) = 2.00/6 = 0.333, p(1E) = 0.278, p(2E) = 0.167, p(3E) = 0.167,$$
$$p(4E) = 0.0550 \text{ y } p(5E) = p(6E) = p(7E) = p(8E) = 0$$

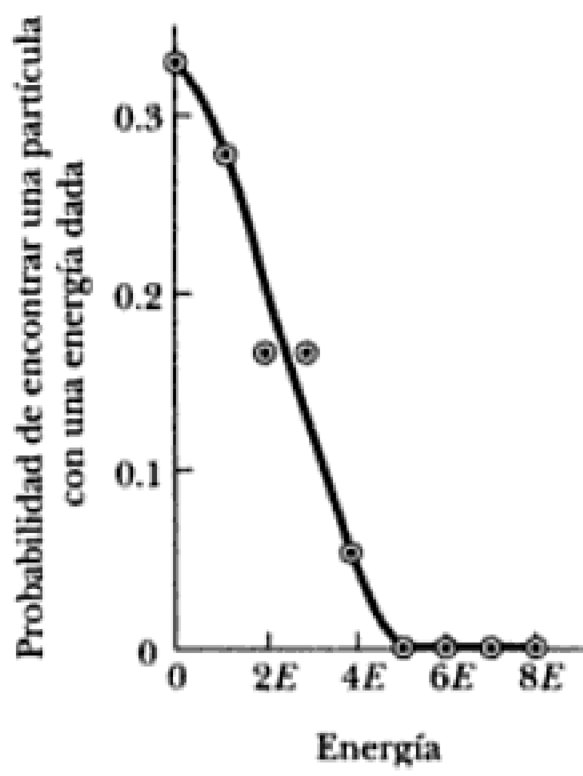


Figura 10.7 Función de distribución de seis partículas indistinguibles con una energía total $8E$, restringidas de modo que no más de dos partículas ocupan el mismo estado energético (fermiones).

Al graficar esta distribución se encuentra una forma distinta a la de las curvas de Maxwell-Boltzmann o de Bose-Einstein (figura 10.7). Los resultados muestran un "aplanamiento" de la probabilidad en ambas energías: bajas y altas. Aunque no resulta totalmente claro que los puntos trazados en la figura 10.7 se ajusten a la suave curva trazada, el considerar sistemas con más de seis partículas demuestra que éste es el caso (vea el problema 10.11).

Cuando se consideran grandes cantidades de partículas cuánticas, es posible deducir rigurosamente funciones de distribución *continuas* tanto para el caso de Bose-Einstein (BE) como para el de Fermi-Dirac (FD). Al maximizar el número de formas de distribuir las partículas cuánticas indistinguibles entre los estados energéticos permitidos, nuevamente sujetas a las dos restricciones de un número fijo de partículas y una energía total fija, se encuentra que las funciones de distribución tienen las formas explícitas:

$$f_{BE}(E) = \frac{1}{Be^{E/k_BT} - 1} \tag{10.19}$$

$$f_{FD}(E) = \frac{1}{He^{E/k_BT} + 1} \tag{10.20}$$

donde $f(E)$ es la probabilidad de encontrar una partícula en un estado particular de energía E a una temperatura absoluta dada T. Como ya se observó, el número de partículas por unidad de volumen con energía entre E y $E + dE$ está dado por

$$n(E)\ dE = g(E) f_{BE}(E)\ dE \tag{10.21}$$

o bien,

$$n(E)\ dE = g(E) f_{FD}(E)\ dE \tag{10.22}$$

Así, los parámetros B y H en las ecuaciones 10.19 y 10.20 pueden determinarse a partir del número total de partículas, N, ya que al integrar las ecuaciones 10.21 y 10.22 se obtiene

$$\left(\frac{N}{V}\right)_{\text{bosones}} = \int_0^\infty \frac{g(E)}{Be^{E/k_BT} - 1}\, dE \tag{10.23}$$

y

$$\left(\frac{N}{V}\right)_{\text{fermiones}} = \int_0^\infty \frac{g(E)}{He^{E/k_BT} + 1}\, dE \tag{10.24}$$

En general, se encuentra que B y H dependen de la temperatura del sistema y de la densidad de las partículas, como puede observarse en las ecuaciones 10.23 y 10.24. Para un sistema de bosones que no están fijos numéricamente con la temperatura, la ecuación 10.23 deja de ser válida para determinar B. Al maximizar las formas de distribuir a los bosones entre los estados permitidos sujetos a la única restricción de energía fija, es posible demostrar que el coeficiente B en la ecuación 10.19 es igual a 1. Éste es un caso particularmente importante, ya que tanto los fotones en una cavidad de cuerpo negro como los fonones en un sólido son bosones cuyos números por unidad de volumen aumentan cuando se incrementa la temperatura. (En breve se definirán los fonones.) Así,

$$f(E) = \frac{1}{e^{E/k_BT} - 1} \qquad \text{(para fotones o fonones)}$$

Para el caso de la distribución de Fermi-Dirac, H depende en gran medida de la temperatura, y a menudo se escribe en una forma explícitamente dependiente de la temperatura como $H = e^{-E_F/k_BT}$, donde E_F se denomina **energía de Fermi.**[2] Con esta sustitución, la ecuación 10.20 toma la forma más común

$$f_{FD}(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_BT} + 1} \tag{10.25}$$

Distribución de Fermi–Dirac

[2]Si se obliga a que la forma funcional de H sea $H = e^{-E_F/k_BT}$, E_F en sí tendrá una dependencia débil con respecto a T. Afortunadamente, esta dependencia de E_F con respecto a T es tan débil que en este caso puede ignorarse.

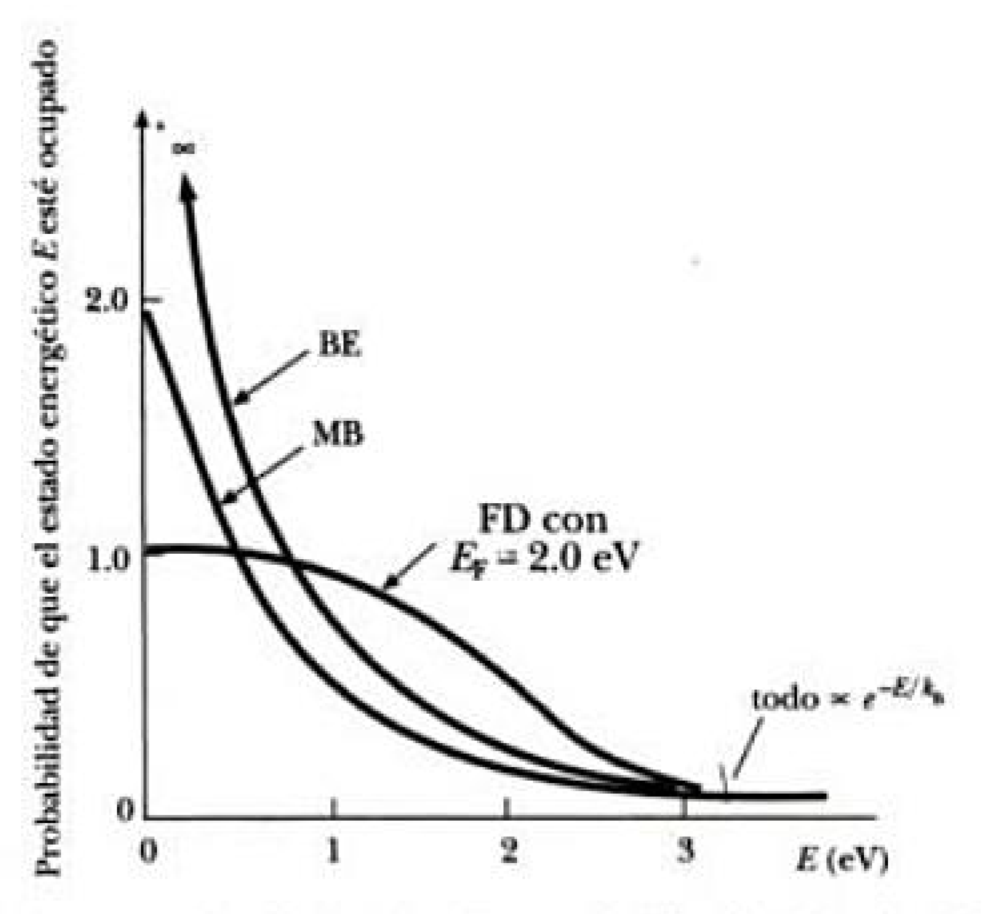


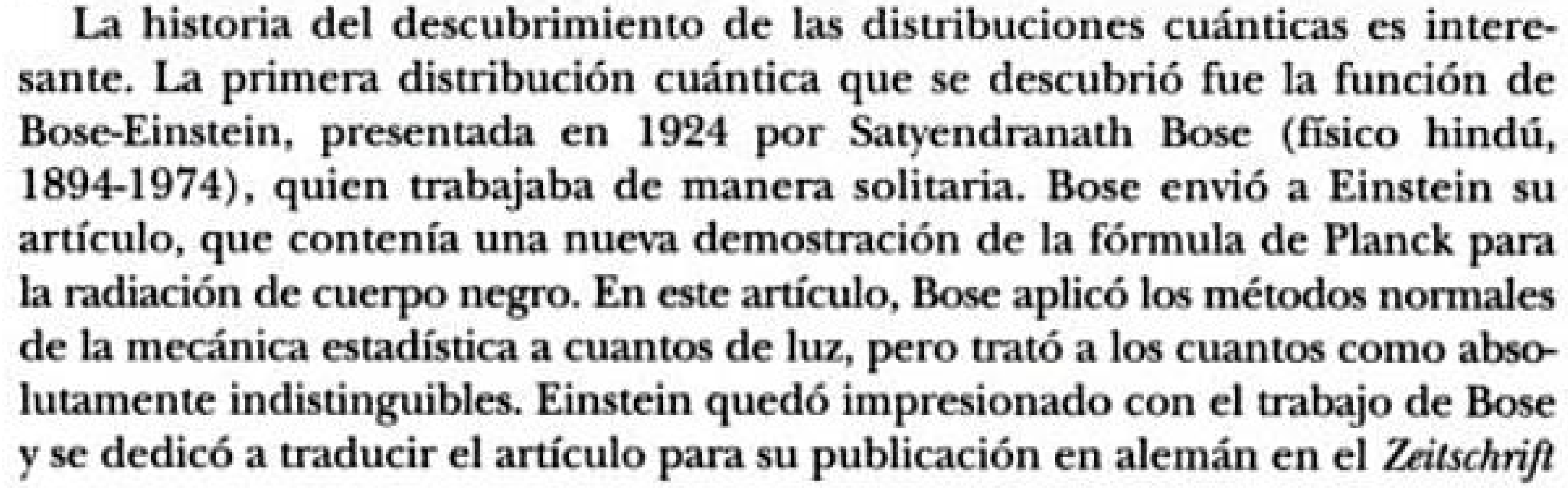
Figura 10.8 Comparación de las funciones de distribución de Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein y Fermi-Dirac a 5 000 K.



Satyendranath Bose (1894-1974). (*Indian National Council of Science Museums, Cortesía de AIP Emilio Segré Visual Archives.*)

Esta expresión muestra el significado de la energía de Fermi: La probabilidad de encontrar un electrón con una energía igual a la energía de Fermi es exactamente $\frac{1}{2}$ a cualquier temperatura.

En la figura 10.8 se muestra una gráfica en la que se comparan las distribuciones de Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein y Fermi-Dirac como funciones de la energía a una temperatura común de 5 000 K. Observe que para E grande, todas las probabilidades de ocupación decrecen a cero como e^{-E/k_BT}. Para valores pequeños de E, la probabilidad FD se satura en 1, como lo requiere el principio de exclusión; la probabilidad MB aumenta constantemente pero permanece finita, y la probabilidad BE tiende a infinito. Esta elevada probabilidad de que los bosones tengan bajas energías significa que a bajas temperaturas casi todas las partículas caen a su estado base. Cuando sucede esto, puede presentarse una nueva fase de materia con propiedades físicas diferentes. Este cambio de fase para un sistema de bosones se denomina **condensación de Bose-Einstein** (**BEC:** por sus siglas en inglés), y se presenta en helio líquido a una temperatura de 2.18 K. Debajo de esta temperatura el helio líquido se convierte en una mezcla del líquido normal y una fase donde todas las moléculas están en el estado base. La fase del estado base denominada helio líquido II, presenta varias propiedades interesantes, una de las cuales es viscosidad cero. Para conocer más acerca de la condensación de Bose y las aplicaciones de este extraordinario estado de la materia, consulte el ensayo de Steven Chu al final de este capítulo.



La historia del descubrimiento de las distribuciones cuánticas es interesante. La primera distribución cuántica que se descubrió fue la función de Bose-Einstein, presentada en 1924 por Satyendranath Bose (físico hindú, 1894-1974), quien trabajaba de manera solitaria. Bose envió a Einstein su artículo, que contenía una nueva demostración de la fórmula de Planck para la radiación de cuerpo negro. En este artículo, Bose aplicó los métodos normales de la mecánica estadística a cuantos de luz, pero trató a los cuantos como absolutamente indistinguibles. Einstein quedó impresionado con el trabajo de Bose y se dedicó a traducir el artículo para su publicación en alemán en el *Zeitschrift*



Enrico Fermi (1901-1954). (*Fermi National Accelerator Laboratory.*)

[5]S. N. Bose, *Z. Phys.*, 26:178, 1924.

de restitución son iguales en las direcciones *x*, *y* y *z*, así que cada átomo está representado por tres osciladores armónicos simples unidimensionales idénticos. La energía interna de cada átomo puede calcularse entonces a partir del teorema de equipartición clásico. Un oscilador armónico unidimensional tiene dos grados de libertad: uno para su energía cinética y otro para su energía potencial. (Físicamente, esto significa que la energía térmica añadida a los átomos en un sólido puede transformarse en vibración atómica o en trabajo realizado para estirar los resortes que mantienen en su sitio a los átomos.) Debido a que el teorema de equipartición establece que la energía térmica promedio de un sólido debe ser ($k_BT/2$ por grado de libertad) $\times$ (2 grados de libertad por oscilador unidimensional) $\times$ (tres osciladores por átomo) $= 3k_BT$. Ya que un mol contiene el número de Avogadro de átomos, N_A, se predice que la energía interna total por mol, U, es

$$U = 3N_{\mathrm{A}}k_{\mathrm{B}}T = 3RT \tag{10.30}$$

donde R es la constante universal de los gases dada por $R = N_Ak_B = 8.31$ J/mol·K = 1.99 cal/mol·K. Al usar $C = dU/dT$, de inmediato se observa que C debe ser constante con la temperatura:

$$C = \frac{d}{dT}(3RT) = 3R = 5.97 \text{ cal/mol} \cdot \text{K} \tag{10.31}$$

En efecto, el calor específico de muchos sólidos es constante con la temperatura, en especial a temperaturas altas, como puede verse en la figura 10.9, lo cual muestra una coincidencia aceptable con la idea clásica de que la energía térmica promedio es $k_BT/2$ por grado de libertad. No obstante, como también puede verse en la figura 10.9, el calor específico de todos los sólidos desciende drásticamente a alguna temperatura y tiende a cero a medida que la temperatura se aproxima a 0 K.

La explicación de por qué la física clásica fracasaba en proporcionar el valor correcto del calor específico a todas las temperaturas fue proporcionada por Einstein en 1907. Se dio cuenta de que las energías cuantizadas de los átomos en vibración en un sólido deben considerarse explícitamente a temperaturas bajas para asegurar la concordancia con mediciones experimentales del calor específico. Einstein supuso que los átomos del sólido podían modelarse como un sistema de osciladores armónicos *cuánticos* tridimensionales *indepen-*

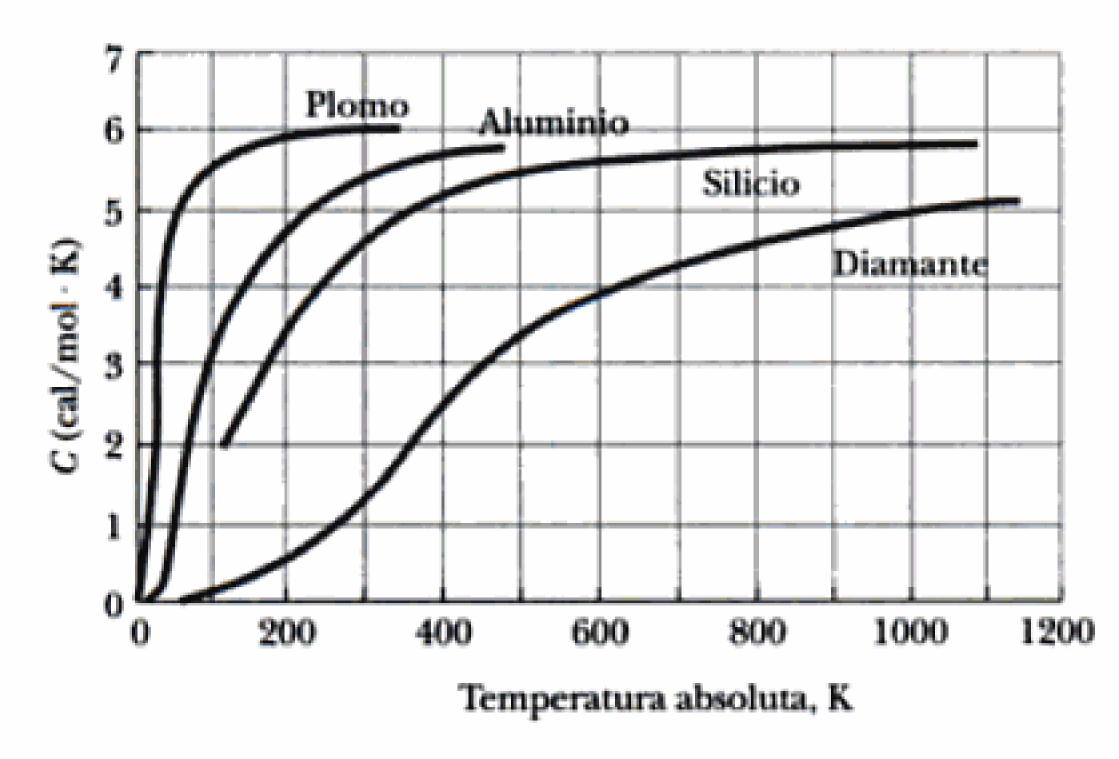


Figura 10.9 Dependencia del calor específico con respecto a la temperatura para varios elementos sólidos.

dientes o *sin acoplar*, con constantes de restitución iguales en las direcciones x, y y z. Luego, demostró que la energía promedio de un oscilador *unidimensional* con frecuencia ω a la temperatura T estaba dada por la distribución de Bose-Einstein, o bien,

$$\overline{E} = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$

Debido a que se considera que los átomos son independientes, Einstein calculó la energía interna de un mol de átomos, o de N_A átomos, como

$$U = 3N_A\overline{E} = 3N_A \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$

Por último, obtuvo el calor específico molar:

$$C = \frac{dU}{dT} = 3R\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)^2 \frac{e^{\hbar\omega/k_B T}}{(e^{\hbar\omega/k_B T} - 1)^2} \tag{10.32}$$

Se deja como ejercicio demostrar que la ecuación 10.32 predice que C tiende a cero para T pequeña cuando $e^{-\hbar\omega/k_B T}$, y que C tiende a $3R$ para T grande.

Para comprender cualitativamente la ecuación 10.32, considere la cantidad $\overline{E}$, la energía promedio de un oscilador cuántico unidimensional a la temperatura T:

$$\overline{E} = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \tag{10.33}$$

Recuerde que los átomos vibrantes del sólido tienen niveles de energía cuantizados separados por una distancia $\hbar\omega$. Para temperaturas altas, tales que $\hbar\omega \ll k_B T$, la separación $\hbar\omega$ entre los niveles de energía es pequeña respecto a la energía térmica promedio por átomo, de modo que puede esperarse que muchos átomos se encuentren en niveles energéticos excitados. De hecho, es posible desarrollar la exponencial en el denominador de la ecuación 10.33 como $\exp(\hbar\omega/k_B T) = 1 + \hbar\omega/k_B T + \cdots$ para obtener

$$\overline{E} = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \approx k_B T$$

En este caso, las energías atómicas parecen ser continuas y se cumple el resultado clásico $C = 3R$. Para temperaturas bajas, tales que $\hbar\omega \gg k_B T$, la ecuación 10.33 muestra que la energía térmica promedio de un oscilador tiende rápidamente a cero. Esto significa que la energía promedio es mucho menor que la separación entre niveles energéticos atómicos adyacentes, $\hbar\omega$, y que la energía térmica es insuficiente para llevar a un átomo de su estado base hasta niveles energéticos superiores. En este caso los átomos son incapaces de absorber energía del entorno para un pequeño aumento en temperatura, y el incremento en energía interna con la temperatura o calor específico tiende a cero.

Un punto final que debe mencionarse es que la ecuación 10.32 tiene sólo un parámetro ajustable, ω, la frecuencia de vibración del oscilador armónico, que se escoge para obtener el mejor ajuste de la ecuación 10.32 a los datos experimentales de capacidad calorífica. A menudo, ω se proporciona en términos de una temperatura equivalente T_E, denominada **temperatura de Einstein,** donde

$$\hbar\omega = k_B T_E \tag{10.34}$$

EJEMPLO 10.4 Calor específico del diamante

Como se ha visto, un sólido a temperatura T puede considerarse como un sistema de osciladores armónicos cuantizados, cuyos niveles energéticos discretos están separados por una distancia $\hbar\omega$. Los osciladores sólo pueden absorber energía térmica, no obstante, si la temperatura es suficientemente alta de modo que la energía térmica promedio del oscilador, $\overline{E}$, es aproximadamente igual a la separación de los niveles de energía del oscilador, $\hbar\omega$. Para bajas temperaturas, tales que $\overline{E} \ll \hbar\omega$, se dispone de tan poca energía térmica que los átomos ni siquiera pueden llevarse al primer estado excitado y el calor específico tiende a cero. En el siguiente ejemplo se muestra que los átomos de carbono en el diamante están desacoplados, en efectivo, de la energía térmica a temperatura ambiente, aunque son capaces de absorber energía a una temperatura de 1 500 K.

a) Calcule la frecuencia de vibración de los átomos de carbono en el diamante si la temperatura de Einstein es 1 300 K. Encuentre también la separación de los niveles de energía de los átomos de carbono.

Solución Como $\hbar\omega = k_B T_E$, la frecuencia de vibración de los átomos de carbono en el diamante es

$$\omega = \frac{k_B T_E}{\hbar} = \frac{(8.62 \times 10^{-5}\ \text{eV/K})(1\ 300\ \text{K})}{6.58 \times 10^{-16}\ \text{eV}\cdot\text{s}}$$
$$= 1.70 \times 10^{14}\ \text{Hz}$$

La separación entre niveles de energía adyacentes del oscilador es

$$\hbar\omega = (6.58 \times 10^{-16}\ \text{eV}\cdot\text{s})(1.70 \times 10^{14}\ \text{Hz}) = 0.112\ \text{eV}$$

b) Calcule la energía promedio del oscilador $\overline{E}$ a temperatura ambiente y a 1 500 K y compare esta energía con la separación de los niveles de energía de los átomos de carbono, $\hbar\omega$. En promedio, ¿existe suficiente energía térmica para excitar los átomos de carbono a 300 K? ¿Y a 1 500 K?

Solución La energía promedio del oscilador a temperatura ambiente (300 K) es

$$\overline{E} = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$$
$$= \frac{0.112\ \text{eV}}{e^{0.112\ \text{eV}/(8.62\times10^{-5}\ \text{eV/K})(300\ \text{K})} - 1} = 0.00149\ \text{eV}$$

en tanto que la energía promedio del oscilador a 1 500 K es

$$\overline{E} = \frac{0.112\ \text{eV}}{e^{0.112\ \text{eV}/(8.62\times10^{-5}\ \text{eV/K})(1\ 500\ \text{K})} - 1} = 0.0813\ \text{eV}$$

Al comparar, se observa que $\overline{E}$ a 300 K es alrededor de 0.01 $\hbar\omega$, y $\overline{E}$ a 1 500 K es aproximadamente igual a $\hbar\omega$. Esto significa que a 300 K casi todos los átomos de carbono están congelados en el estado base del oscilador y que el calor específico tiende a cero.

Ejercicio 4 a) Calcule la frecuencia de vibración de los átomos de plomo y la separación de sus niveles de energía si la temperatura de Einstein del plomo es 70 K. b) Explique la baja temperatura de Einstein del plomo con respecto a la del diamante en términos de las propiedades físicas del plomo. c) Calcule la energía promedio de un oscilador unidimensional en el plomo a temperatura ambiente. ¿Se tiene la suficiente energía para excitar los átomos de plomo fuera del estado base a 300 K?

10.5 UNA APLICACIÓN DE LA ESTADÍSTICA DE FERMI-DIRAC: TEORÍA DEL GAS LIBRE DE ELECTRONES PARA LOS METALES

Debido a que los electrones externos están débilmente ligados a los átomos individuales en un metal, estos electrones de conducción pueden ser considerados como un gas de fermiones atrapados en el interior de una cavidad formada por la superficie metálica. Muchas cantidades físicas de interés, como la energía promedio, la energía de Fermi, el calor específico y la tasa de emisión termoiónica, pueden deducirse a partir de la expresión para la concentración de electrones con energías entre E y $E + dE$:

$$n(E)\ dE = g(E) f_{FD}(E)\ dE \qquad (10.22)$$

Recuerde que la probabilidad de encontrar a un electrón en un estado energético particular E está dada por la función de distribución de Fermi-Dirac,

$$f_{FD}(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1}$$

Tabla 10.1 Valores calculados de varios parámetros para metales, con base en la teoría del electrón libre

Metal	Concentración de electrones (m^{-3})	Energía de Fermi (eV)	Velocidad de Fermi (m/s)	Temperatura de Fermi (K)
Li	4.70×10^{28}	4.72	1.29×10^{6}	5.48×10^{4}
Na	2.65×10^{28}	3.23	1.07×10^{6}	3.75×10^{4}
K	1.40×10^{28}	2.12	0.86×10^{6}	2.46×10^{4}
Cu	8.49×10^{28}	7.05	1.57×10^{6}	8.12×10^{4}
Ag	5.85×10^{28}	5.48	1.39×10^{6}	6.36×10^{4}
Au	5.90×10^{28}	5.53	1.39×10^{6}	6.41×10^{4}

$$T_F \equiv \frac{E_F}{k_B} \qquad (10.45)$$

Como nota final, es interesante que un viejo problema relacionado con la anómalamente pequeña contribución del "gas" de electrones de conducción a la capacidad calorífica de un sólido tenga una solución cualitativa en términos de la distribución de Fermi-Dirac. Si los electrones de conducción tuviesen un comportamiento clásico, el calentamiento de un gas con N electrones desde 0 hasta 300 K debería dar por resultado un incremento en la energía promedio de $3k_BT/2$ para *cada* partícula, o una energía térmica total por mol, U, dada por

$$U = N_A\left(\tfrac{3}{2}k_BT\right) = \tfrac{3}{2}RT$$

Así, la capacidad calorífica electrónica por mol debería estar dada por

$$C_{el} = \frac{dU}{dT} = \tfrac{3}{2}R$$

suponiendo un electrón libre por átomo. Al analizar la figura 10.12, no obstante, se observa que al calentar a partir de 0 K, muy pocos electrones se excitan y ganan energía k_BT. Sólo una pequeña fracción f en un intervalo menor a k_BT de E_F puede excitarse térmicamente. Esta fracción f puede aproximarse por la razón del área de un rectángulo delgado de ancho k_BT y altura $n(E_F)$ al área total bajo $n(E)$. Así,

$$f \approx \frac{\text{área del rectángulo sombreado en la figura 10.12}}{\text{área total bajo } n(E)}$$

$$= \frac{(k_BT)g(E_F)}{D\int_0^{E_F} E^{1/2}\,dE} = \frac{(k_BT)D(E_F)^{1/2}}{\frac{2}{3}DE_F^{3/2}} = \frac{3}{2}\frac{k_BT}{E_F} = \frac{3}{2}\frac{T}{T_F}$$

Debido a que sólo fN de los electrones gana una energía del orden de k_BT, la verdadera energía térmica total ganada por mol es

$$U = \left(\frac{3}{2}\frac{T}{T_F}\right)(N_Ak_BT) = \frac{3}{2}\frac{RT^2}{T_F}$$

Con base en este resultado, se encuentra que la capacidad calorífica electrónica es

$$C_{el} = \frac{dU}{dT} \approx 3R\,\frac{T}{T_F}$$

Al sustituir $T = 300$ K y $T_F = 5 \times 10^4$ K, se encuentra un valor muy pequeño para la capacidad calorífica electrónica a temperaturas normales:

$$C_{el} \approx 3R\left(\frac{300\text{ K}}{50\,000\text{ K}}\right) = 0.018R$$

Así, los electrones contribuyen a la capacidad calorífica con sólo $0.018R/1.5R$, o alrededor de 1% de la cantidad esperada desde el punto de vista clásico.

EJEMPLO 10.5 Energía de Fermi del oro

a) Calcule la energía de Fermi del oro a 0 K.

Solución La densidad del oro es 19.32 g/cm^3, y su peso molar es 197 g/mol. Suponiendo que cada átomo de oro contribuye con un electrón libre al gas de Fermi, la concentración de electrones puede calcularse como sigue:

$$\frac{N}{V} = (19.32\text{ g/cm}^3)\left(\frac{1}{197\text{ g/mol}}\right) \times (6.02 \times 10^{23}\text{ electrones/mol})$$
$$= 5.90 \times 10^{22}\text{ electrones/cm}^3$$
$$= 5.90 \times 10^{28}\text{ electrones/m}^3$$

Al utilizar la ecuación 10.44, se encuentra

$$E_F(0) = \frac{h^2}{2m_e}\left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{2/3}$$
$$= \frac{(6.625 \times 10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s})^2}{2(9.11 \times 10^{-31}\text{ kg})}\left(\frac{3 \times 5.90 \times 10^{28}\text{ m}^{-3}}{8\pi}\right)^{2/3}$$
$$= 8.85 \times 10^{-19}\text{ J} = 5.53\text{ eV}$$

b) Calcule la velocidad de Fermi para el oro a 0 K.

Solución Debido a que $\frac{1}{2}m_e v_F^2 = E_F$,

$$v_F = \left(\frac{2E_F}{m_e}\right)^{1/2} = \left(\frac{2 \times 5.85 \times 10^{-19}\text{ J}}{9.11 \times 10^{-31}\text{ kg}}\right)^{1/2}$$
$$= 1.39 \times 10^6\text{ m/s}$$

c) Calcule la temperatura de Fermi para el oro a 0 K.

Solución La temperatura de Fermi está dada por

$$T_F = \frac{E_F}{k_B} = \frac{5.53\text{ eV}}{8.62 \times 10^{-5}\text{ eV/K}}$$
$$= 64\,000\text{ K}$$

Así, ¡un gas de partículas clásicas debe calentarse hasta aproximadamente 64 000 K para dotarlo de una energía promedio por partícula igual a la energía de Fermi a 0 K!

RESUMEN

La física estadística estudia la distribución de una cantidad fija de energía entre un número de partículas que son idénticas e indistinguibles de cualquier forma (partículas cuánticas) o partículas idénticas que son distinguibles en el límite clásico de estrechos paquetes de ondas de partículas y baja densidad de partículas. En casi cualquier situación, no existe interés en conocer las energías de todas las partículas en un instante dado, sino más bien en el promedio temporal del número de partículas en un nivel energético particular. El número promedio de partículas en un nivel energético dado es de especial interés en espectroscopía porque la intensidad de la radiación emitida o absorbida es proporcional al número de partículas en un estado energético particular.

Para un sistema descrito por una distribución continua de niveles energéticos, el número de partículas por unidad de volumen con energía entre E y $E + dE$ está dado por

$$n(E)\,dE = g(E)f(E)\,dE \tag{10.6}$$

donde $g(E)$ es la densidad de estados o el número de estados energéticos por unidad de volumen en el intervalo dE y $f(E)$ es la probabilidad de que una partícula se encuentre en el estado energético E. La función $f(E)$ se denomina **función de distribución.**

Entonces, el número de electrones por unidad de volumen con energía entre E y $E + dE$ es

$$n(E)\ dE = \frac{8\sqrt{2}\pi m_e^{3/2}\ E^{1/2}}{h^3(e^{(E-E_F)/k_BT} + 1)}\ dE \tag{10.41}$$

Al integrar la ecuación 10.1 puede obtenerse una expresión para la energía de Fermi a 0 K como una función de la concentración de electrones. Se encuentra

$$E_F(0) = \frac{h^2}{2m_e}\left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{2/3} \tag{10.44}$$

La pequeña contribución electrónica a la capacidad calorífica de un metal puede explicarse si se observa que sólo una pequeña fracción de los electrones próximos a E_F ganan k_BT en energía térmica cuando el metal se calienta de 0 K hasta T K.

BIBLIOGRAFÍA ADICIONAL SUGERIDA

1. A. Beiser, *Concepts of Modern Physics*, 5a. edición, Nueva York, McGraw-Hill Book Co., 1995.

Un tratamiento más avanzado de la física estadística puede encontrarse en los siguientes libros:

2. P. M. Morse, *Thermal Physics*, Nueva York, Benjamin, 1965.
3. C. Kittel, *Thermal Physics*, Nueva York, Wiley, 1969.
4. D. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1994.

PREGUNTAS

1. Discuta las hipótesis básicas de las estadísticas de Maxwell-Boltzmann, Fermi-Dirac y Bose-Einstein. ¿En qué se diferencian y cuáles son sus semejanzas?
2. Explique el papel del principio de exclusión de Pauli en la descripción de las propiedades eléctricas de los metales.

PROBLEMAS

10.1 Distribución de Maxwell-Boltzmann

1. Compruebe que para un sistema de seis partículas distinguibles con energía total $8E$, las probabilidades de encontrar una partícula con energías desde $1E$ hasta $8E$ son: 0.256, 0.167, 0.0978, 0.0543, 0.0272, 0.0117, 0.00388, 0.000777.
2. Demuestre que la velocidad más probable de una molécula de gas es

$$v_{mp} = \sqrt{\frac{2k_BT}{m}}$$

   Observe que la velocidad más probable corresponde al punto en que la curva de distribución de velocidades de Maxwell, $n(v)$, tiene un máximo.
3. En la figura P10.3 se muestra un aparato semejante al utilizado por Otto Stern en 1920 para comprobar la distribución de velocidades de Maxwell. Se deja entrar un haz colimado de moléculas de gas provenientes de un horno, O, a un cilindro que gira rápidamente cuando la rendija S coincide con el haz. Luego, el pulso de moléculas creado por la rápida rotación de S choca contra una placa detectora de vidrio, D, y se adhiere a ésta. La velocidad de una molécula puede determinarse a partir de su posición en la placa de vidrio (donde las moléculas más rápidas están a la derecha). El número de moléculas que llegan a una velocidad dada puede determinarse midiendo la densidad de las moléculas depositadas sobre D en una posición dada. Suponga que el horno

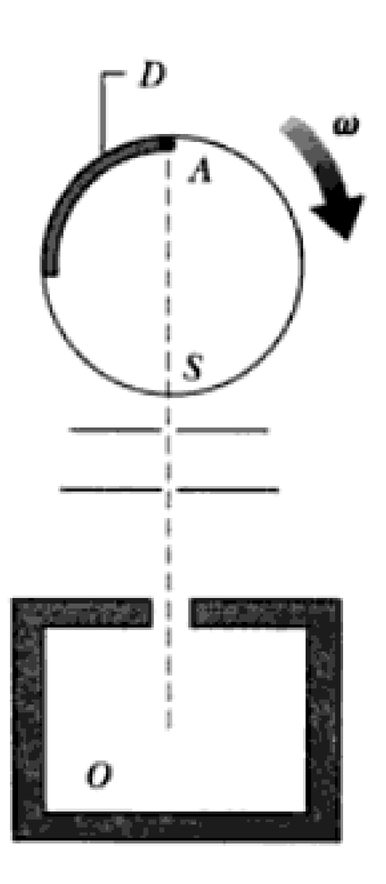


Figura P10.3 Esquema de un aparato utilizado para comprobar la distribución de velocidades de Maxwell.

contiene un gas de moléculas de bismuto (Bi_2) a 850 K, que el cilindro mide 10 cm de diámetro y que gira a 6 250 rpm. a) Encuentre la distancia a A de los puntos de impacto de las moléculas que se desplazan a $\overline{v}$, v_{rms} y v_{mp}. b) ¿Por qué cree que las mediciones se hicieron originalmente con Bi_2 en vez de O_2 o N_2?

4. Se han observado niveles energéticos denominados niveles de tunelaje para iones de CN^- incorporados en cristales de KCl. Estos niveles surgen por el movimiento rotacional de tunelaje los iones de CN^- a medida que éstos perforan un túnel, a bajas temperaturas, a través de barreras que separan mínimos de potencial cristalino. Según un modelo, los niveles de tunelaje deben constar de cuatro niveles equidistantes en la región lejana del infrarrojo, con una separación de 12.41×10^{-5} eV (1 cm^{-1}). Suponga que los iones CN^- cumplen la estadística de Maxwell-Boltzmann y use la figura P10.4 para calcular y trazar la apariencia esperada de los espectros de absorción (intensidad de absorción contra energía) a 4 K y 1 K. Suponga probabilidades iguales de transición para todas las transiciones permitidas, y haga la intensidad de absorción proporcional a la altura del pico. Use $k_B = 8.62 \times 10^{-5}$ eV/K.

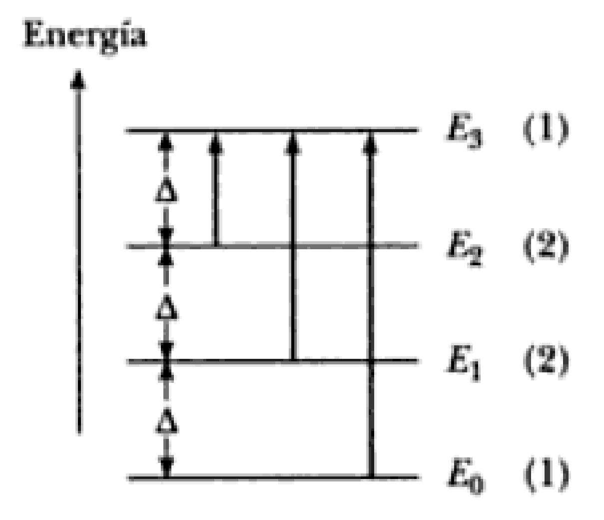


Figura P10.4 Niveles energéticos de tunelaje. Las flechas verticales indican las transiciones permitidas. La degeneración de cada nivel se señala entre paréntesis.

5. Ajuste una curva exponencial $P(E) = Ae^{-BE}$ a la figura 10.2 para ver cuán próximo a una distribución exponencial se hace el sistema de seis partículas distinguibles. Use los valores a energías de 0 y $1E$ para determinar A y B.

6. La diferencia de energía entre el primer estado excitado y el estado base del mercurio es 4.86 eV. a) Si una muestra de mercurio vaporizado a la flama contiene 10^{20} átomos en equilibrio térmico a 1 600 K, calcule el número de átomos en los estados $n = 1$ (base) y $n = 2$ (primer estado excitado). (Suponga que es válida la distribución de Maxwell–Boltzmann y que los estados $n = 1$ y $n = 2$ tiene el mismo peso estadístico). b) Si la vida media del estado $n = 2$ es τ segundos, la probabilidad de transición es $1/\tau$ y el número de fotones emitidos por segundo por el estado $n = 2$ es n_2/τ, donde n_2 es el número de átomos en el estado 2. Si la vida media del estado $n = 2$ es 100 ns, calcule la potencia (en watts) emitida por los átomos calientes.

7. Considere una molécula con un momento dipolar eléctrico permanente **p**, colocada en un campo eléctrico ε, con **p** alineada de forma paralela o antiparalela a ε. a) Recuerde que la energía de un dipolo en un campo eléctrico está dada por $E = -\mathbf{p}\cdot\varepsilon$, y demuestre que este sistema cuenta con dos estados energéticos permitidos separados por $2p\varepsilon$. b) Suponga que la energía en el estado base es igual a 0, que la energía en el estado excitado es $2p\varepsilon$ y que hay degeneraciones en la razón $g(2p\varepsilon)/g(0) = 2/1$. Para una conjunto de N moléculas que satisfacen la estadística de Maxwell-Boltzmann, calcule la razón entre el número de moléculas en el estado excitado y el número de moléculas en el estado base a la temperatura T. c) Para una temperatura T alta, de modo que $k_BT >> 2p\varepsilon$, la razón del número de moléculas en el estado superior al número de moléculas en el estado inferior es 2 a 1. Tomando estimaciones razonables de $p = 1 \times 10^{-30}$ C·m y $\varepsilon = 1 \times 10^6$ V/m, encuentre la temperatura a la que ha descendido la razón por un 10% mensurable de 1.9 a 1. d) Calcule la energía promedio $\overline{E} \rightarrow$ a T y demuestre que $\overline{E}$ cuando $T \rightarrow 0$ y $\overline{E} \rightarrow 4p\varepsilon/3$ cuando $T \rightarrow \infty$. e). Encuentre E_{total} a partir de $\overline{E}$, y demuestre que la capacidad calorífica para este sistema de dos niveles es

$$C = \left(\frac{Nk_B}{2}\right)\left(\frac{2p\varepsilon}{k_BT}\right)^2\left(\frac{e^{2p\varepsilon/k_BT}}{(1 + \frac{1}{2}e^{2p\varepsilon/k_BT})^2}\right)$$

f) Grafique C como una función de $2p\varepsilon/k_BT$, encuentre el valor de $2p\varepsilon/k_BT$ al que C es un máximo y explique, en términos físicos, la dependencia de C con respecto a T.

8. Use la función de distribución proporcionada en el ejercicio 10.1,

$$n(E)\ dE = \frac{2\pi(N/V)}{(\pi k_BT)^{3/2}} E^{1/2}e^{-E/k_BT}\ dE$$

para encontrar a) la energía cinética más probable de las moléculas del gas a temperatura T, b) la energía cinética media a T, y c) la raíz cuadrática media de la energía cinética a T.

9. La luz proveniente de un gas atómico caliente está desplazada en frecuencia debido al movimiento térmico azaroso de los átomos emisores de luz hacia el observador o en dirección contraria a éste. Calcule el desplazamiento Doppler fraccionario ($\Delta f/f_0$), suponiendo que se emite luz de frecuencia f_0 en el sistema de referencia propio de cada átomo, que los átomos emisores de luz son de hierro en una estrella a una temperatura de 6 000 K, y que los átomos se mueven con respecto a un observador a la velocidad media

$$\overline{v} = \pm\sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}}$$

Para realizar este cálculo, ¿es necesario utilizar la siguiente fórmula relativista para el corrimiento Doppler?

$$f = f_0\ \frac{\sqrt{1 \pm v/c}}{\sqrt{1 \mp v/c}}$$

Tales desplazamientos térmicos Doppler son mensurables y se utilizan para determinar temperaturas estelares superficiales.

10.2 Condiciones físicas en que se aplica la estadística de Maxwell-Boltzmann

10. Los átomos de helio tienen un espín igual a 0 y, por tanto, son bosones. a) ¿Es necesario utilizar la distribución de Bose-Einstein a temperatura y presión normales para describir al helio o basta con usar la distribución de Maxwell-Boltzmann? b) El helio se convierte en líquido con una densidad de 0.145 g/cm^3 a 4.2 K y a la presión atmosférica. En este caso, ¿es necesario utilizar la distribución de Bose-Einstein? Explique su respuesta.

10.3 Estadística cuántica

11. A fin de obtener una representación más claramente definida de la distribución de Fermi-Dirac, considere un sistema de 20 partículas fermiones que comparten 94 unidades de energía. Mediante diagramas como el de la figura P10.11, demuestre que hay nueve microestados distintos. Use la ecuación 10.2 para calcular y graficar el número promedio de partículas en cada nivel energético desde 0 hasta $14E$. Localice la energía de Fermi a 0 K en su gráfica a partir del hecho de que los electrones a esta temperatura llenan consecutivamente hacia arriba todos los niveles hasta la energía de Fermi. (A 0 K el sistema ya no tiene 94 unidades de energía, sino la cantidad *mínima* de $90E$.)

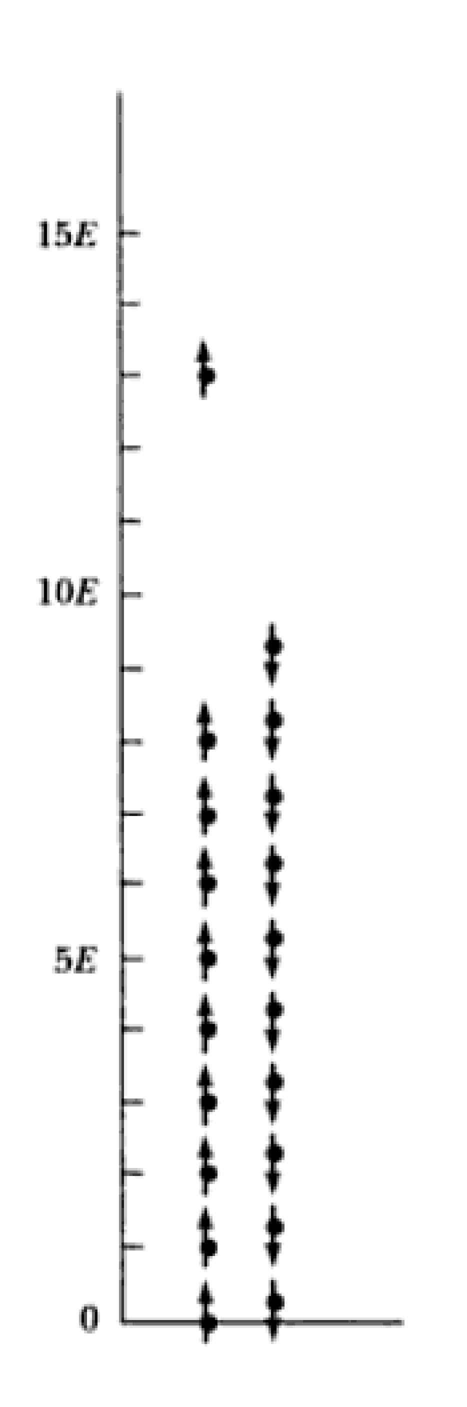


Figura P10.11 Uno de los nueve microestados igualmente probables para 20 partículas de Fermi–Dirac con una energía total de $94E$.

10.4 Aplicaciones de la estadística de Bose-Einstein

12. a) Encuentre la energía promedio por fotón para fotones que están en equilibrio térmico con una cavidad a temperatura T. b) Calcule la energía promedio de los fotones en electrón-voltos a $T = 6\,000$ K. (*Sugerencia:* Dos integrales de utilidad son:

$$\int_0^\infty \frac{z^2 dz}{e^z - 1} \approx 2.41 \quad \text{y} \quad \int_0^\infty \frac{z^3 dz}{e^z - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

13. a) Demuestre que el calor específico de cualquier sustancia en el modelo de Einstein es igual a 5.48 cal/mol·K a $T = T_E$. b) Use este resultado para calcular la temperatura de Einstein del plomo, aluminio y silicio utilizando la figura 10.9. c) Use las temperaturas calculadas en el inciso b) para determinar los calores específicos de Einstein de cada elemento a intervalos de 50 K y compare con los resultados experimentales que se muestran en la figura 10.9. Para facilitar la comparación, quizá convenga que fotocopie esta figura y trace sus valores calculados en ella.

10.5 Una aplicación de la estadística de Fermi-Dirac

14. La energía de Fermi del cobre a 0 K es de 7.05 eV. a) ¿Cuál es la energía promedio de un electrón de conducción en el cobre a 0 K? b) ¿A qué temperatura la energía promedio de una molécula de un gas ideal es igual a la energía obtenida en el inciso a)? (Vea el problema 16.)
15. La energía de Fermi del aluminio es 11.63 eV. a) Suponiendo que el modelo del electrón libre es válido para el aluminio, calcule el número de electrones libres por unidad de volumen a bajas temperaturas. b) Determine la valencia del aluminio al dividir la respuesta encontrada en el inciso a) entre el número de átomos de aluminio por unidad de volumen, según se calculó a partir de la densidad y el peso atómico. Observe que la densidad del aluminio es igual a 2.70 g/cm^3.
16. Demuestre que la energía cinética promedio de un electrón de conducción en un metal a 0 K está dada por $\overline{E} = 3E_F/5$. A manera de contraste, observe que ¡*todas* las moléculas en un gas ideal a 0 K tienen *energía igual a cero*! *Sugerencia:* Use la definición normal de un promedio dado por

$$\overline{E} = \frac{\int_0^\infty Eg(E) f_{FD}(E)\, dE}{N/V}$$

donde E_F está en electrón-volts cuando n está en electrones por metro cúbico.

17. Aunque suele aplicarse la estadística de Fermi-Dirac a electrones libres en un conductor, la estadística de Fermi-Dirac es válida para cualquier sistema de partículas con espín $\frac{1}{2}$, incluyendo a los protones y neutrones en un núcleo. Debido a que los protones son distinguibles de los neutrones, suponga que cada conjunto de nucleones satisface de manera independiente la distribución de Fermi-Dirac y que el número de protones es igual al número de neutrones. Use estas ideas a fin de calcular E_F y $\overline{E}$ para los nucleones del Zn. (El Zn tiene 30 protones, 34 neutrones y un radio de 4.8×10^{-15} m.) ¿Son razonables sus respuestas? Explíquelas.

18. Demuestre que la ecuación 10.44 puede escribirse como

$$E_F = (3.65 \times 10^{-19}) n^{2/3} \text{ eV}$$

donde E_F está en electrón-volts cuando n está en electrones por metro cúbico.

19. Calcule la probabilidad de que un electrón de conducción en el cobre a 300 K tenga una energía igual a 99% de la energía de Fermi.

20. Encuentre la probabilidad de que un electrón de conducción en un metal tenga una energía igual a la energía de Fermi a una temperatura de 300 K.

21. El sodio es un metal monovalente que tiene una densidad de 0.971 g/cm^3 y una masa molar de 23 g/mol. Use esta información para calcular a) la densidad de portadores de carga, b) la energía de Fermi y c) la velocidad de Fermi para el sodio.

22. Calcule la energía de un electrón de conducción en la plata a 800 K si la probabilidad de encontrar el electrón en ese estado es 0.95. Suponga que la energía de Fermi para la plata es 5.48 eV a esta temperatura.

23. Considere un cubo de oro de 1 mm de arista. Calcule el número aproximado de electrones de conducción en este cubo cuyas energías se encuentran en el intervalo de 4.000 hasta 4.025 eV a 300 K. Suponga que $E_F(300 \text{ K}) = E_F(0)$.

24. a) Considere un sistema de electrones confinados en una caja tridimensional. Calcule la razón del número de niveles energéticos permitidos a 8.5 eV al número de niveles energéticos permitidos a 7 eV. b) El cobre tiene una energía de Fermi igual a 7 eV a 300 K. Calcule la razón del número de niveles ocupados a una energía de 8.5 eV al número de niveles ocupados a la energía de Fermi. Compare su respuesta con la que obtuvo en el inciso a).

Problemas para resolver con calculadora o computadora

25. Considere un sistema de 10^4 moléculas de oxígeno por centímetro cúbico a una temperatura T. Calcule y trace una gráfica de la distribución de Maxwell, $n(v)$, como una función de v y T. Use su programa para evaluar $n(v)$ para velocidades que van desde $v = 0$ hasta $v = 2\ 000$ m/s (en intervalos de 100 m/s) a temperaturas de a) 300 K y b) 1 000 K. c) Elabore gráficas de $n(v)$ contra v y use la gráfica a $T = 1\ 000$ K para calcular el número de moléculas por centímetro cúbico que tienen velocidades entre 800 m/s y 1000 m/s a $T = 1\ 000$ K. d) Calcule e indique en cada gráfica la raíz cuadrática promedio de la velocidad, la velocidad promedio y la velocidad más probable (vea el problema 2).

26. Grafique la función de distribución de Fermi-Dirac, ecuación 10.25, contra la energía. Grafique $f(E)$ contra E para a) $T = 0.2T_F$ y b) $T = 0.5T_F$, donde T_F es la temperatura de Fermi, definida por la ecuación 10.45.

27. El cobre tiene una energía de Fermi de 7.05 eV a 300 K, y una concentración de electrones de conducción de 8.49×10^{28} m^{-3}. Calcule y grafique a) la densidad de estados, $g(E)$, contra E; b) la función de distribución de partículas, $n(E)$, como una función de la energía a $T = 0$ K; y c) la función de distribución de partículas contra E a $T = 1\ 000$ K. Sus escalas de energía deben variar desde $E = 0$ hasta $E = 10$ eV.



Ludwig Boltzmann pasó el verano de 1905 enseñando en la Universidad de California en Berkeley. Algunos de sus amigos vieneses, incluyendo al artista que hizo este dibujo, se divertían al imaginar a Boltzmann enseñando física teórica en el "salvaje oeste". Para saber más acerca de la experiencia de Boltzmann en California, consulte el artículo de L. Boltzmann "A German Professor's Trip to El Dorado", *Physics Today*, enero de 1922, p. 44. (*Universidad de Viena/Cortesía de AIP Emilio Segrè Visual Archives.*)

MANEJO DE ÁTOMOS CON LÁSER



Por Steven Chu

Universidad de Stanford

La habilidad para controlar partículas cargadas a distancia con campos eléctricos y magnéticos ha conducido a numerosos avances en ciencia y tecnología. Las aplicaciones incluyen aceleradores de partículas, fuentes de rayos X y tubos al vacío. Hasta hace poco, nuestra capacidad para controlar el movimiento de partículas neutras había sido mucho más limitada. Normalmente, el dispositivo que se utiliza para sostener un objeto, como las puntas de los dedos o las paredes de una botella, no ejerce ninguna fuerza sobre el objeto en cuestión hasta que el dispositivo se acerca a unos cuantos diámetros atómicos del objeto. Una vez que los átomos en la superficie de los dedos están a una distancia atómicamente próxima de un objeto, los electrones de los dedos son repelidos por los electrones del objeto. Las fuerzas eléctricas generadas por esta repulsión permiten contener o sostener los objetos neutros.

En las dos últimas décadas, los científicos desarrollaron la capacidad de manipular partículas neutras como átomos, moléculas y partículas que miden micras. Esta nueva capacidad ha conducido rápidamente a una amplia gama de aplicaciones, incluyendo el estudio de interacciones átomo-átomo e interacciones luz-materia en un régimen completamente nuevo: la producción de nuevos estados cuánticos de la materia y la construcción de relojes y acelerómetros atómicos extraordinariamente precisos.

ENFRIAMIENTO CON LÁSER

La revolución en el control de átomos neutros se basa en la habilidad para enfriar átomos a temperaturas extremadamente bajas utilizando rayos láser. ¿Cuán frío? La superficie del Sol (5 000 K) es 18 veces más caliente que el punto de congelación del agua y 1 250 veces más caliente que la temperatura de licuefacción del helio (4 K). Para efectos de comparación, algunos átomos han sido enfriados utilizando rayos láser a menos de 10^{-9} K, mil millones de veces más fríos que las temperaturas del helio líquido.

Los primeros métodos de enfriamiento con láser eran simples. Debido a que los fotones poseen cantidad de movimiento, la luz puede ejercer fuerzas sobre los átomos. Para un fotón de frecuencia f, su cantidad de movimiento es $p_\gamma = E/c = hf/c$. Como ejemplo, un átomo de sodio que absorbe un cuanto de luz amarilla a 589 nm retrocede con un cambio de velocidad $\Delta v = p_\gamma/m_{\text{Na}} = 3$ cm/s. Aunque las velocidades atómicas típicas son del orden de 10^5 cm/s, la luz láser dirigida contra un haz de átomos puede usarse para aminorar la velocidad de los átomos, ya que un láser es capaz de inducir más de 10^7 absorciones de fotones por segundo. Típicamente, los átomos en un haz térmico pueden detenerse en unos cuantos milisegundos.

Los átomos absorben luz sólo si el láser está sintonizado a una frecuencia de resonancia. Un átomo que se dirige hacia un haz láser con una velocidad v experimenta un desplazamiento de frecuencia fraccionario Doppler hacia arriba, dado por $\Delta f/f = v/c$. Así, un átomo que se dirige hacia un haz láser a 10^5 cm/s estará en resonancia con éste sólo si la luz está sintonizada 1.7 GHz por debajo de la resonancia atómica. A medida que el átomo disminuye de velocidad, para mantenerlo en resonancia es necesario incrementar de manera continua la frecuencia del láser.

Una vez que los átomos están razonablemente fríos, se obtiene enfriamiento adicional con rayos láser si se rodea al átomo con haces láser que se propagan en direcciones opuestas sintonizados ligeramente al lado de baja frecuencia de una resonancia atómica, como se muestra en la figura 1. Los átomos absorben más fotones provenientes del haz que se opone a su movimiento debido al desplazamiento Doppler, independientemente de la dirección de movimiento. Al rodear al átomo con seis haces láser se obtiene enfriamiento en cada una de las tres dimensiones. Este método de enfriamiento con rayos láser fue propuesto por primera vez en 1975 por Theodore Hänsch y Arthur Schawlow en la Universidad de Stanford y demostrado por primera vez por Steven Chu y sus colegas en los Laboratorios Bell de AT&T en 1985. En esa época, los átomos de sodio eran enfriados desde alrededor de 500 K hasta 240 μK. El océano de fotones que rodea los átomos era de nominado "melaza óptica" porque el campo de luz funciona como un medio de amortiguamiento viscoso que disminuye el movimiento de los átomos.

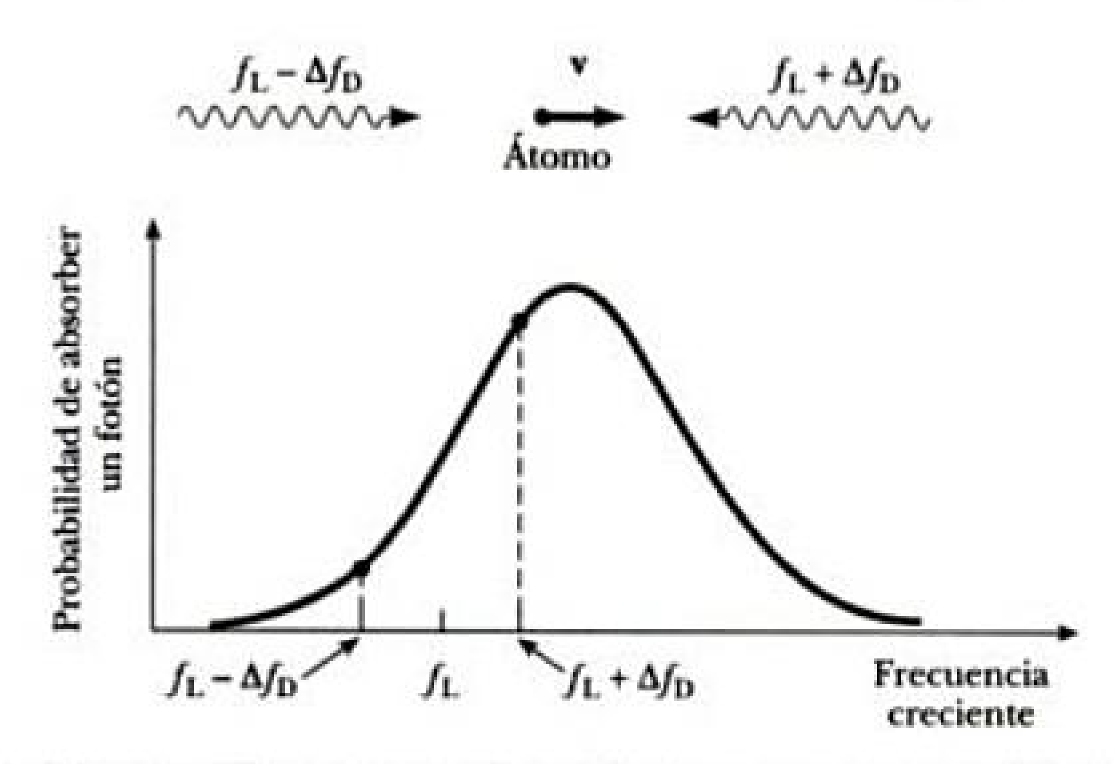
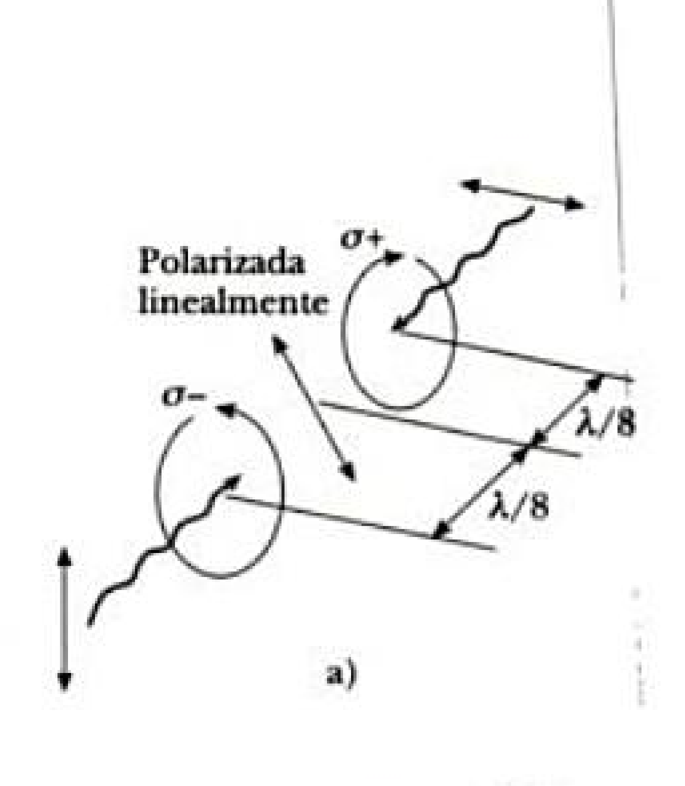


Figura 1 Un átomo radiado por dos haces láser en contrapropagación sintonizados a la frecuencia f_L "verá" las frecuencias $f_L \pm \Delta f_D$. Si f_L se sintoniza por debajo de la resonancia atómica, el átomo recibirá más impactos de cantidad de movimiento del fotón provenientes del haz que se opone al movimiento.

A medida que los átomos se enfrían a temperaturas a las cuales el desplazamiento Doppler promedio es una pequeña fracción del ancho de la línea de resonancia, la absorción diferencial, y por tanto la fuerza de enfriamiento, disminuye. Cuando la velocidad de enfriamiento de la melaza óptica equilibra la velocidad de calentamiento debido a la absorción y emisión aleatorias de fotones, se alianza una temperatura en equilibrio. Para un átomo simple que consta de un estado base y un estado excitado separados por $\hbar\omega$, la temperatura en equilibrio mínima que se calcúlo fue $k_B T = \hbar\omega/2$. En 1988, un grupo del NIST[1] en Gaithersburg, Maryland, dirigido por William Phillips descubrió que los átomos podían congelarse en melazas ópticas hasta temperaturas mucho más bajas que esta temperatura mínima teórica.

Jean Dalibard y Claude Cohen-Tannoudji en la École Normale Supérieure, y Steven Chu, ahora en Stanford, se dieron cuenta que las bajas temperaturas se debían a la interacción de varios efectos físicos. 1) Los átomos con cantidad de movimiento angular diferente de cero poseen varios subniveles Zeeman en los estados fundamental y excitados. 2) Estos niveles de energía Zeeman se desplazan varias cantidades en presencia de luz, dependiendo de la intensidad del acoplamiento del átomo con el campo de luz. Si el láser se sintoniza por debajo de la frecuencia de resonancia, los estados se desplazan hacia una menor energía. 3) Para una polarización dada del campo de luz, el átomo es excitado de manera preferencial hacia los estados cuánticos de energía más baja. (La población de estados Zeeman específicos debido a la luz polarizada se denomina "bombeo óptico". Alfred Kastler fue galardonado con el premio Nobel en 1966 por sus estudios sobre este efecto.)

Los haces láser que se contrapropagan con polarización lineal ortogonal generan un campo láser que presenta polarización espacialmente dependiente, como se muestra en la figura 2. Un átomo en una región espacial donde la luz posee helicidad positiva (σ^+) bombea ópticamente hacia un estado base de baja energía $m_F = +F$. Si luego se mueve hacia una región espacial donde la luz posee helicidad negativa (σ^-), el estado $+F$ se convierte en el estado fundamental con energía máxima. Así, la energía cinética del átomo se transforma en energía interna. Esta energía interna es disipada por el efecto de bombeo óptico, que excita al átomo hacia el estado $m_F = -F$, el estado de baja energía para luz σ^-. En efecto, el átomo aminora su velocidad a medida que remonta una colina de potencial creada por el desplazamiento de luz de los estados energéticos atómicos. Cerca de la cima de la colina, el átomo se bombea ópticamente hacia el nuevo estado de baja energía; es decir, se encuentra en el fondo de una nueva colina. Las melazas ópticas con gradientes de polarización algunas veces son denominadas enfriamiento de Sísifo, según el mito del hombre condenado que debía encarar el tormento perpetuo de empujar una roca cuesta arriba sólo para que, al llegar a la cúspide, la roca rodase cuesta abajo, con lo que el ciclo de empujarla cuesta arriba se repetía interminablemente. Con este proceso de enfriamiento se ha logrado enfriar átomos de sodio hasta 35 μK y átomos de cesio hasta 3 μK.



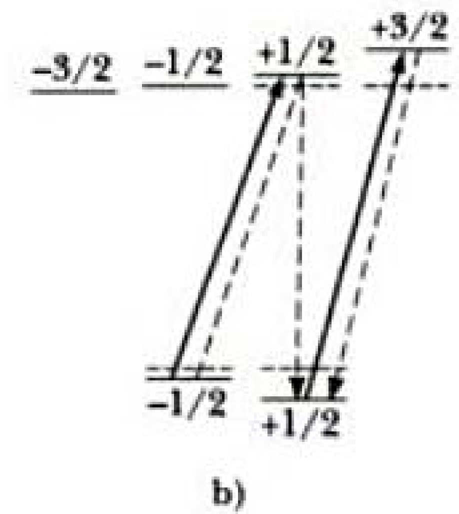


Figura 2 a) Gradientes de polarización que resultan de la superposición de luz polarizada linealmente de forma ortogonal. La polarización local de la luz cambia de helicidad positiva (σ^+) a lineal a polarización de helicidad negativa (σ^-) en una distancia $\lambda/4$. b) Niveles energéticos de un átomo con un estado fundamental, o base, $F = 1/2$ y un estado excitado $F = 3/2$ irradiado con luz de helicidad negativa. Las líneas discontinuas muestran las trayectorias de emisión espontánea permitidas, y las líneas punteadas denotan los niveles energéticos en ausencia de desplazamientos de luz. Debido a que la luz de excitación siempre intenta agregar $+\hbar$ unidades de momento angular al átomo, la excitación repetida y la emisión espontánea bombean ópticamente al átomo hacia el estado fundamental $+1/2$. Los desplazamientos de luz están bastante exagerados con respecto a la separación de los niveles energéticos. (*Tomado de S. Chu, Science, 253:861–866, 1991.*)



[1]Instituto Nacional de Normas y Tecnología

Con otras técnicas de enfriamiento con rayos láser que usan varios trucos de coherencia cuántica y a las que se han asignado denominaciones exóticas, como "captura coherente de población" y "enfriamiento estimulado de Raman", se han enfriado átomos a temperaturas en el intervalo de los nanokelvin, a los cuales la velocidad promedio es menor al cambio en velocidad que experimenta un átomo si retrocede desde un simple fotón. En los artículos enumerados al final de este ensayo puede encontrarse una explicación de estos métodos de enfriamiento.

Una vez que los átomos han sido enfriados a bajas temperaturas, correspondientes a velocidades del orden de 1 cm/s, pueden manipularse muy fácilmente con luz, así como con campos magnéticos o eléctricos estáticos. Por ejemplo, átomos enfriados hasta energías del orden de los microkelvin han sido lanzados hacia arriba con luz para obtener una fuente atómica. Debido a que siguen la trayectoria balística determinada por la gravedad, están en un entorno casi libre de perturbaciones, por lo que es posible realizar mediciones muy precisas de las separaciones de los niveles energéticos atómicos.

Una limitación fundamental a la precisión de cualquier medición es el principio de incertidumbre de Heisenberg, el cual establece que el producto de la medición cuántica del tiempo Δt y la incertidumbre en la medición de la energía ΔE debe ser mayor que $\hbar/2$: $\Delta E\,\Delta t \geq \hbar/2$. Para un átomo en un haz atómico, la medición del tiempo está limitado por el tiempo de tránsito del átomo a través del aparato de medición. Con una fuente atómica, el tiempo de medición se ha incrementado desde unos cuantos milisegundos hasta aproximadamente un segundo. Este incremento del orden de mil en el tiempo medido sin duda alguna llevará a la obtención de relojes atómicos más precisos. La norma temporal actual, definida por la separación de niveles energéticos entre dos estados fundamentales del átomo de cesio, es exacta hasta una parte en 10^{14}.

Las fuentes atómicas también se han utilizado para elaborar interferómetros atómicos. De manera semejante al interferómetro óptico, un interferómetro atómico separa el átomo en una superposición de dos estados coherentes que se apartan espacialmente y vuelven a combinarse para formar franjas de interferencia. Los interferómetros atómicos constituyen detectores inerciales extremadamente sensibles debido al largo tiempo de tránsito de los átomos a través del dispositivo. El grupo de Stanford midió g, la aceleración de un átomo debida a la gravedad, con una resolución de una parte en 10^8 con un interferómetro atómico, y es probable que la incertidumbre se reduzca a menos de una parte en 10^{11}. Una versión portátil de este aparato podría sustituir a los medidores mecánicos de "g", que se utilizan actualmente en investigaciones petrolíferas. Un valor bajo de g podría indicar la presencia de roca porosa cargada de petróleo, cuya densidad es menor a la de roca sólida.

CAPTURA DE ÁTOMOS

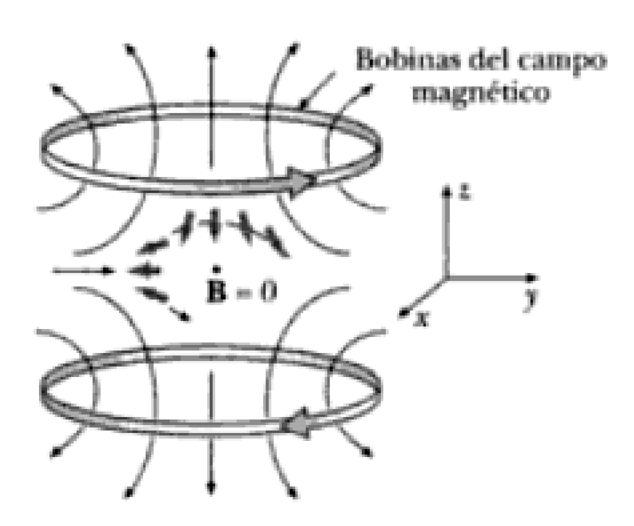


Figura 3 Trampa cuadrupolar esférica que muestra algunas de las líneas de campo magnético y la dirección de las corrientes. La línea discontinua indica un átomo que se mueve en la trampa donde su momento magnético (flechas en color gris) permanece antiparalelo a las líneas de campo.

Los átomos que se han enfriado por debajo de un milikelvin también pueden mantenerse en el espacio ya sea con campos magnéticos estáticos, campos láser o una combinación de un campo magnético débil y luz polarizada circularmente. Se han utilizado trampas de átomos para acumular un gran número de átomos enfriados con rayos láser, confinarlos para su uso ulterior y usarlos para estudios de colisiones atómicas a temperaturas muy bajas.

Una trampa magnética ejerce fuerzas sobre un átomo a través del momento magnético del átomo. La energía potencial de un dipolo magnético en un campo magnético **B** está dada por $-\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}$, donde μ es el momento magnético, por lo general del orden de 1 μ_B. La primera vez que se pudo atrapar átomos magnéticamente ocurrió en 1985 por el grupo del NIST utilizando un "campo cuadrupolar esférico", como se muestra en la figura 3. En el centro de las bobinas de captura, el campo **B** es cero y crece linealmente a medida que uno se desplaza radialmente hacia fuera. Un átomo cuyo dipolo magnético se encuentra alineado en forma antiparalela al campo **B** minimiza su energía al buscar regiones donde la magnitud del campo es mínima; es decir, el átomo experimenta una fuerza que lo conduce hacia el centro de la trampa. Si el átomo se mueve lentamente en ésta, puede permanecer alineado en forma antiparalela al campo magnético, aun si éste cambia de dirección. Desde el punto de vista clásico, si el momento magnético tiene un movimiento de precesión alrededor de un campo magnético que cambia lentamente, continúa girando alrededor de un eje cambiante del campo. Desde el punto de vista de la mecánica cuántica, el estado del átomo sigue "adiabáticamente" las condiciones del campo externo que definen el estado cuántico.

Los átomos también pueden fijarse con una haz láser usando luz intensa sintonizada lejos de una resonancia atómica a fin de polarizar el átomo. El momento dipolar **p**

CONDENSACIÓN DE BOSE-EINSTEIN

Los átomos enfriados en trampas con rayos láser permiten estudiar las colisiones atómicas en el nuevo terreno de temperaturas ultrafrías. A temperaturas muy bajas, los átomos dejan de mostrar una distribución de energías de Maxwell-Boltzmann. Dependiendo de si un gas de átomos posee cantidad de movimiento angular total $0\hbar$, $1\hbar$, $2\hbar$, . . . o $\hbar/2$, $3\hbar/2$, $5\hbar/2$, . . . , los átomos satisfacen a estadística de Bose-Einstein o la de Fermi-Dirac. Uno de los efectos gaseosos cuánticos más impresionantes predichos por Einstein debe ocurrir cuando la longitud de onda de De Broglie $\lambda = h/p$ de los bosones sea comparable a la separación interatómica. A la densidad espacial de fase crítica de $n\lambda^3 = 2.612$, donde n es la densidad de los átomos en el gas, una fracción mensurable de los átomos deberá empezar a condensarse en un solo estado cuántico.

En 1995, un grupo de investigación de la Universidad de Colorado en Boulder dirigido por Eric Cornell y Carl Wieman comprobó esta predicción para un gas de átomos de rubidio al combinar muchas de las técnicas de enfriamiento y captura desarrolladas durante la década anterior. El equipo comenzó por enfriar y capturar átomos en una trampa magneto-óptica. Utilizando melazas ópticas y enfriamiento de Sísifo en ausencia de un campo magnético se logró un enfriamiento adicional. En este punto, la densidad espacial de fase de los átomos fue incrementada 13 órdenes de magnitud por arriba de la densidad espacial de un intenso haz atómico térmico. Luego, los átomos se bombearon ópticamente hacia un estado Zeeman atómico particular y se cargaron en una trampa magnética.

La trampa magnética, cuadrupolar y esférica, que utilizaron fue modificada a fin de corregir un defecto conocido de la trampa del NIST. Si un átomo en la trampa se aventura cerca del punto cero del campo magnético, la frecuencia de precesión del átomo desciende a cero y su espín ya no es capaz de seguir la dirección de la línea del campo. Luego, el espín puede vibrar para colocarse paralelamente al campo y así ser antiatrapado: la trampa tiene un "hueco" en su centro. El grupo de Boulder resolvió este problema haciendo girar el punto cero del campo magnético con bobinas adicionales del campo magnético. Si la frecuencia de rotación se hace mucho más rápida que el movimiento atómico en la trampa, los átomos experimentan un potencial, promediado temporalmente, centrado en el punto de rotación. Debido a que el hueco gira fuera del conjunto de átomos, éstos jamás "perciben" el hueco.

El enfriamiento final hasta aproximadamente 20 nK fue logrado por "evaporación" de la trampa magnética, una técnica de enfriamiento demostrada por primera vez por Harold Hess, Tom Greytak, Dan Kleppner y otros colegas en el MIT en 1989. La evaporación permite que los átomos extremadamente calientes abandonen la muestra, lo que reduce así la energía promedio de los átomos restantes. Las colisiones vuelven a calentar la muestra produciendo más átomos calientes, y a medida que avanza la evaporación, la barrera de evaporación disminuye para continuar el proceso de enfriamiento. Usando esta técnica, el equipo pudo incrementar la densidad espacial de fase en otros 5 órdenes de magnitud.

En la figura 5 se muestra la distribución de velocidades de una nube integrada por aproximadamente 2 000 átomos de rubidio enfriados cerca de la condensación crítica de Bose. La verdadera dificultad experimental es enfriar y mantener al mismo tiempo una densidad suficientemente baja en la nube (distancia interatómica aproximada de 10^{-4} cm) para mantener el carácter de gas ideal de la nube, minimizar las fuerzas interatómicas e impedir la licuefacción. Justo por arriba de la densidad espacial de fase necesaria, la energía atómica se distribuye en todas las direcciones por igual entre los diversos estados cuánticos, según el teorema de equipartición de la física estadística. A medida que se cruza la condición crítica, comienza a formarse un pico central en $v = 0$, lo que significa el desencadenamiento de una condensación. Con un enfriamiento adicional, la mayor parte de los átomos se condensan en el estado cuántico base del sistema. Debido a que el potencial de la trampa no es esféricamente simétrico, el estado cuántico fundamental también es antisimétrico.

Una vez que los átomos están en un condensado de Bose, su energía se define en términos de la energía de localización $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$. Debido a que los átomos permanecen en el condensado de Bose a medida que se relajan las fuerzas de confinamiento de la trampa, la temperatura efectiva $k_B T/2 = 3\Delta p^2/2m$ puede hacerse llegar al intervalo de los picokelvin.

La actividad de enfriamiento con rayos láser y captura de átomos ha irrumpido en muchas áreas de física, química, biología y medicina. Una de las alegrías de la ciencia es que muchas de estas aplicaciones no fueron previstas por los inventores del campo en los primeros días.

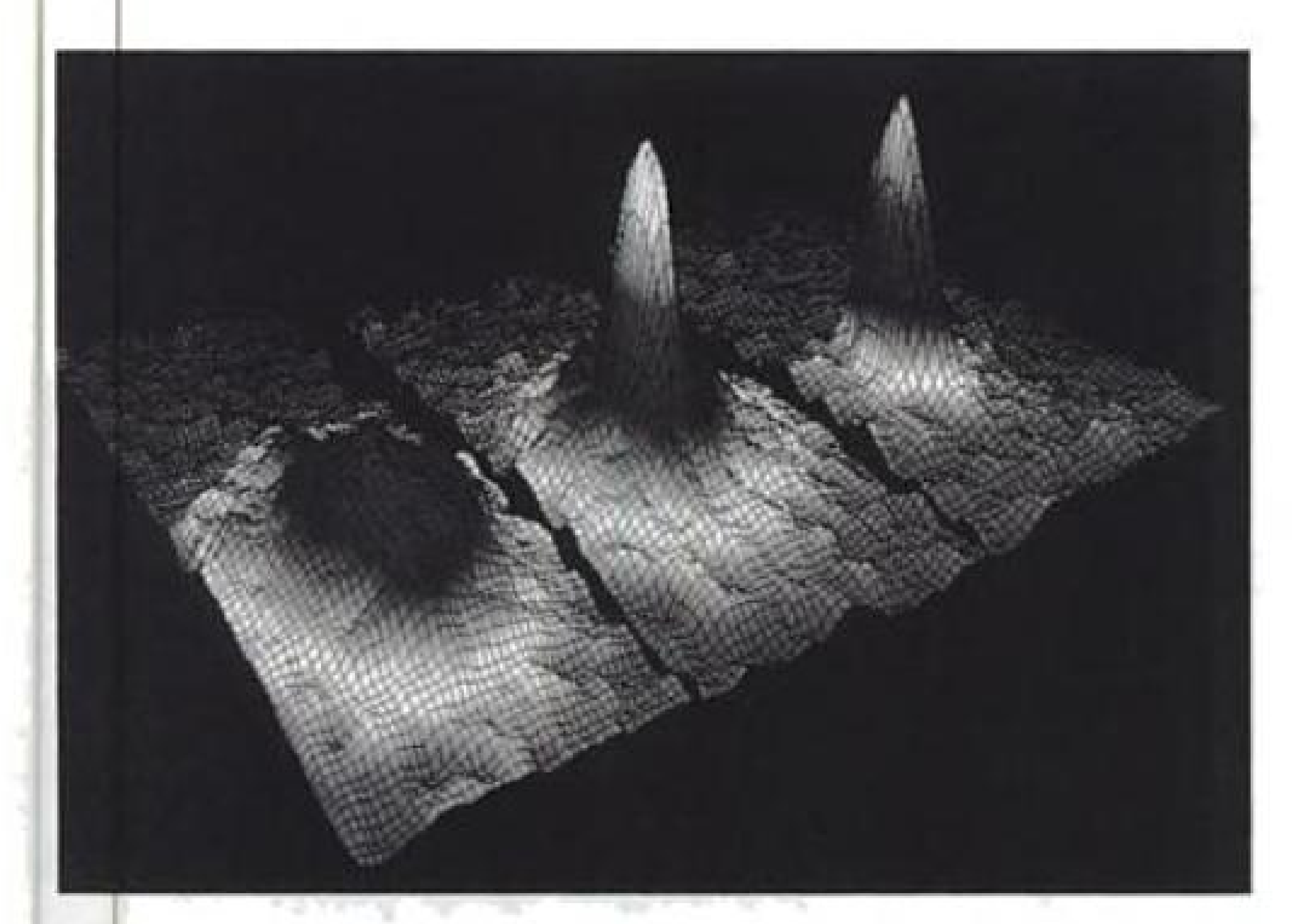


Figura 5 Imágenes generadas por computadora de la distribución de velocidades de una nube de átomos de rubidio. Antes de alcanzar la región crítica de Bose-Einstein, la distribución de velocidades es uniforme. La imagen de la extrema izquierda se obtuvo justo antes de la aparición del condensado de Bose-Einstein. Inmediatamente después de la aparición del condensado (imagen de en medio), arriba de la distribución uniforme más ancha aparece un pico de velocidad asimétrico centrado en $v = 0$. A densidades espaciales de fase aún superiores (imagen de la extrema derecha), casi todos los átomos restantes se han condensado en un estado cuántico fundamental. El campo de visión de cada sistema es de 200×270 μm, lo cual corresponde a la distancia que los átomos se han desplazado en alrededor de 1/20 de segundo. (*Imágenes cortesía de Eric Cornell y Mike Matthews, JILA Research Team, Universidad de Colorado en Boulder.*)

De manera semejante, tampoco es posible predecir las aplicaciones de un condensado de Bose-Einstein de átomos. Debido a que el condensado es semejante a los fotones en fase en una cavidad láser, es posible, en principio, elaborar un exquisitamente intenso haz de átomos o láser de átomos. Otra aplicación no prevista es el extraordinario aminoramiento y detención de pulsos de luz en un condensado de Bose-Einstein de átomos de sodio, que fue observado por vez primera en 2000 por el físico danés-estadounidense Lene Vestergaard Hau.[2] Debido a que todo el contenido de información en un pulso de luz detenido en un BEC es recuperable momentos después, probablemente este efecto pueda aplicarse en componentes optoelectrónicos como interruptores, memorias y líneas de retardo.

En efecto, esta sigue siendo una época maravillosa para la física.

BIBLIOGRAFÍA ADICIONAL SUGERIDA

Para un repaso general sobre enfriamiento y captura, consulte los artículos de S. Chu, *Sci. Am.*, febrero de 1992; y S. Chu, *Science*, 253:861, 1991.

Para una descripción de métodos más recientes de enfriamiento con rayos láser, consulte el artículo de C. Cohen–Tannoudji y W. D. Phillips, *Phys. Today*, 43:33, 1990. El enfriamiento de Raman se describe en el artículo de M. Kasevich y S. Chu, *Phys. Rev. Lett.*, 69:1741, 1992.

La primera condensación de Bose-Einstein se describe en el artículo de M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman y E. A. Cornell, *Science*, 269:198, 1995.

[2]Hau *et al.*, *Nature*, 18 de febrero de 1999.

11
Estructura molecular

Contenido del capítulo

Excepto por los gases inertes, los elementos suelen combinarse para formar compuestos químicos cuya unidad básica es la *molécula*, un agregado de átomos individuales unidos por enlaces químicos. Las propiedades físicas y químicas de las moléculas se derivan de sus átomos constituyentes: su disposición, la manera y grado en que interactúan, y sus estructuras electrónicas individuales.

Las propiedades de las moléculas pueden estudiarse experimentalmente analizando sus espectros. Así como ocurre con los átomos, una molécula puede emitir o absorber fotones, al realizar transiciones entre los niveles de energía permitidos de la molécula. El espectro de emisión o absorción resultante es diferente para cada molécula y actúa como un tipo de huella digital de su estructura electrónica.

Pero las moléculas también emiten y absorben energía de formas que no se encuentran en los átomos. Las moléculas pueden rotar, almacenando energía en forma de energía cinética de rotación, y pueden vibrar, de modo que poseen energía de vibración. Como veremos, las energías rotacional y vibracional están cuantizadas, de modo que dan origen a sus propios espectros. Los espectros moleculares son mucho más complicados que los espectros atómicos, aunque también contienen una mayor cantidad de información. En particular, el espectro de rotación-vibración indica cómo están dispuestos los átomos individuales que integran la molécula, así como la intensidad de su interacción.

En este capítulo se describen los mecanismos de enlace en las moléculas, la radiación emitida o absorbida por ellas y los varios modos de excitación

molecular. En este estudio se buscarán los orígenes cuánticos del enlace químico y se descubrirá por qué algunos átomos se enlazan para formar una molécula y otros no. El papel desempeñado por el principio de exclusión y el tunelaje es fundamental. Estos dos conceptos no clásicos subrayan la importancia de la mecánica cuántica para el estudio de la estructura molecular.

11.1 MECANISMOS DE ENLACE: UN ESTUDIO

Debido a la fuerza de atracción neta entre dos átomos, éstos se pueden combinar para formar moléculas. Además, la energía total de la molécula ligada es menor que la energía total de los átomos individuales; la diferencia es la energía que debe suministrarse para romper la molécula en sus átomos constituyentes.

Fundamentalmente, los mecanismos de enlace en una molécula se deben en primer lugar a fuerzas electrostáticas entre átomos (o iones). Cuando dos átomos están separados por una distancia infinita, la fuerza entre ellos es cero, así como su energía electrostática. A medida que los átomos se aproximan entre sí, entran en juego fuerzas de atracción y repulsión. A separaciones muy grandes, la naturaleza de las fuerzas dominantes es de atracción. Para separaciones pequeñas, empiezan a dominar las fuerzas de repulsión entre cargas semejantes. La energía potencial del par puede ser positiva o negativa, dependiendo de la separación entre los átomos.

La energía potencial total U de un sistema de dos átomos a menudo se aproxima mediante la expresión

$$U = -\frac{A}{r^n} + \frac{B}{r^m}$$

donde r es la distancia internuclear de separación entre los dos átomos, A y B son constantes asociadas con las fuerzas de atracción y de repulsión, y n y m son números enteros pequeños. En la figura 11.1 se presenta una gráfica de la energía potencial total como función de la separación internuclear para un sistema de

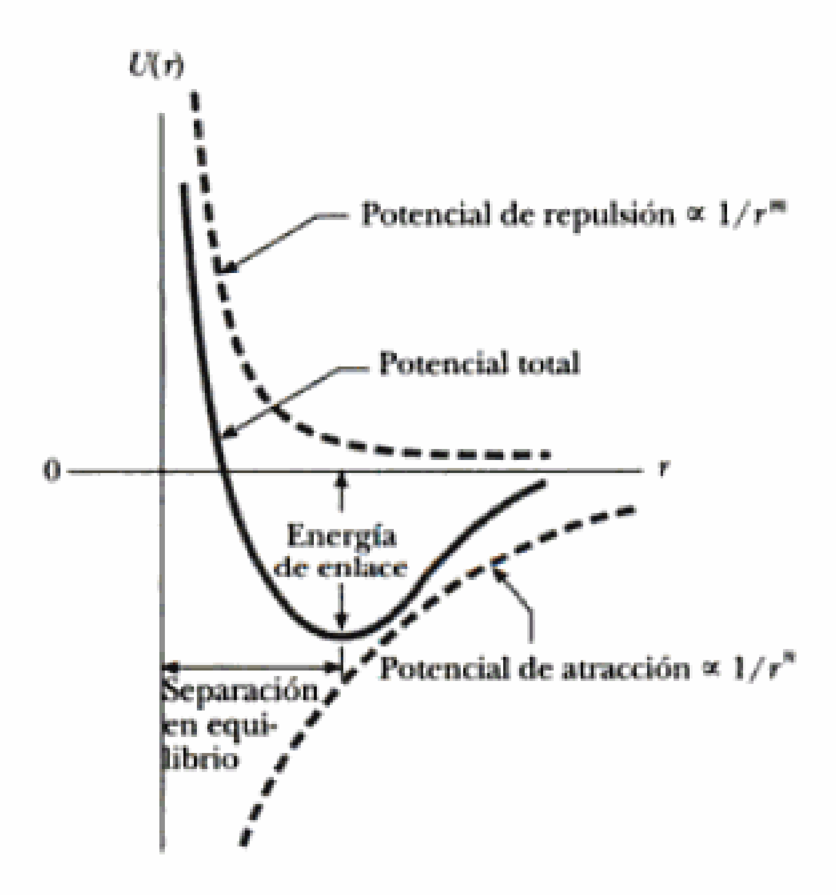


Figura 11.1 Energía total de la partícula como una función de la separación internuclear para un sistema de dos átomos.

dos átomos. Observe que la energía potencial para grandes separaciones es negativa, lo cual corresponde a una fuerza de atracción neta. A una separación de equilibrio, las fuerzas de atracción y repulsión justo se equilibran. En este punto, la energía potencial toma su valor mínimo y la pendiente de la curva es cero.

Describir por completo los mecanismos de enlace en las moléculas es un problema bastante complicado porque los enlaces implican las interacciones mutuas de muchas partículas. En esta sección analizaremos algunos modelos simplificados en orden decreciente de intensidad de enlace: el enlace iónico, el enlace covalente, el enlace de Van der Waals y el enlace del hidrógeno.

Enlaces iónicos

Cuando dos átomos se combinan de forma que uno o más electrones se transfieren de un átomo al otro, el enlace formado se denomina **enlace iónico.** Fundamentalmente, los enlaces iónicos son provocados por la fuerza de atracción de Coulomb entre iones con cargas opuestas. Un ejemplo conocido de una molécula enlazada iónicamente es el cloruro de sodio, NaCl, o sal común. El sodio, cuya configuración electrónica es $1s^22s^22p^63s$, entrega su electrón de valencia $3s$ para formar un ion Na^+. La energía necesaria para ionizar el átomo a fin de obtener Na^+ es 5.1 eV. Al cloro, cuya configuración electrónica es $1s^22s^22p^5$, le falta un electrón para poseer la estructura de capa cerrada del argón. Debido a que las configuraciones de capa cerrada son energéticamente más favorables, el ion Cl^- es más estable que el átomo neutro Cl. La energía liberada cuando un átomo toma un electrón es la **afinidad electrónica.** Para el cloro, la afinidad electrónica es 3.7 eV. En consecuencia, la energía necesaria para formar Na^+ y Cl^- a partir de átomos aislados es $5.1 - 3.7 = 1.4$ eV. Toma 5.1 eV remover el electrón del átomo de Na, pero se ganan 3.7 eV cuando el electrón se une al átomo de Cl. La diferencia, en este caso 1.4 eV, se denomina **energía de activación** de la molécula. A medida que los iones se aproximan entre sí, su energía mutua decrece debido a la atracción electrostática. A separaciones suficientemente pequeñas, la energía de formación se hace negativa, lo que indica que ahora se prefiere energéticamente al par iónico que a los átomos neutros de Na y Cl.

La energía total como función de la separación internuclear para iones de Na^+ y Cl^- se muestra en la figura 11.2. Para distancias de separación muy grandes, la energía del sistema de iones es 1.4 eV, como se calculó. La energía total tiene un valor mínimo de -4.2 eV en la separación de equilibrio, aproximadamente igual a 0.24 nm. Esto significa que la energía necesaria para romper el enlace $Na^+{-}Cl^-$ y formar átomos neutros de sodio y cloro, denominada **energía de disociación,** es 4.2 eV.

Cuando los dos iones se aproximan mutuamente a más de 0.24 nm, los electrones en capas cerradas comienzan a traslaparse, lo cual da por resultado la repulsión entre las capas cerradas. Esta repulsión es en parte electrostática de origen y en parte un resultado de la identidad de los electrones. Debido a que deben satisfacer el principio de exclusión (capítulo 9), algunos electrones en las capas traslapadas son forzados a moverse hacia estados energéticos superiores y la energía del sistema se incrementa, como si entre ellos hubiese una fuerza de repulsión.

Enlaces covalentes

Un **enlace covalente** entre dos átomos es aquél en que los electrones suministrados por uno o ambos átomos son compartidos por los dos átomos. Muchas moléculas diatómicas, como H_2, F_2 y CO, deben su estabilidad a enlaces cova-

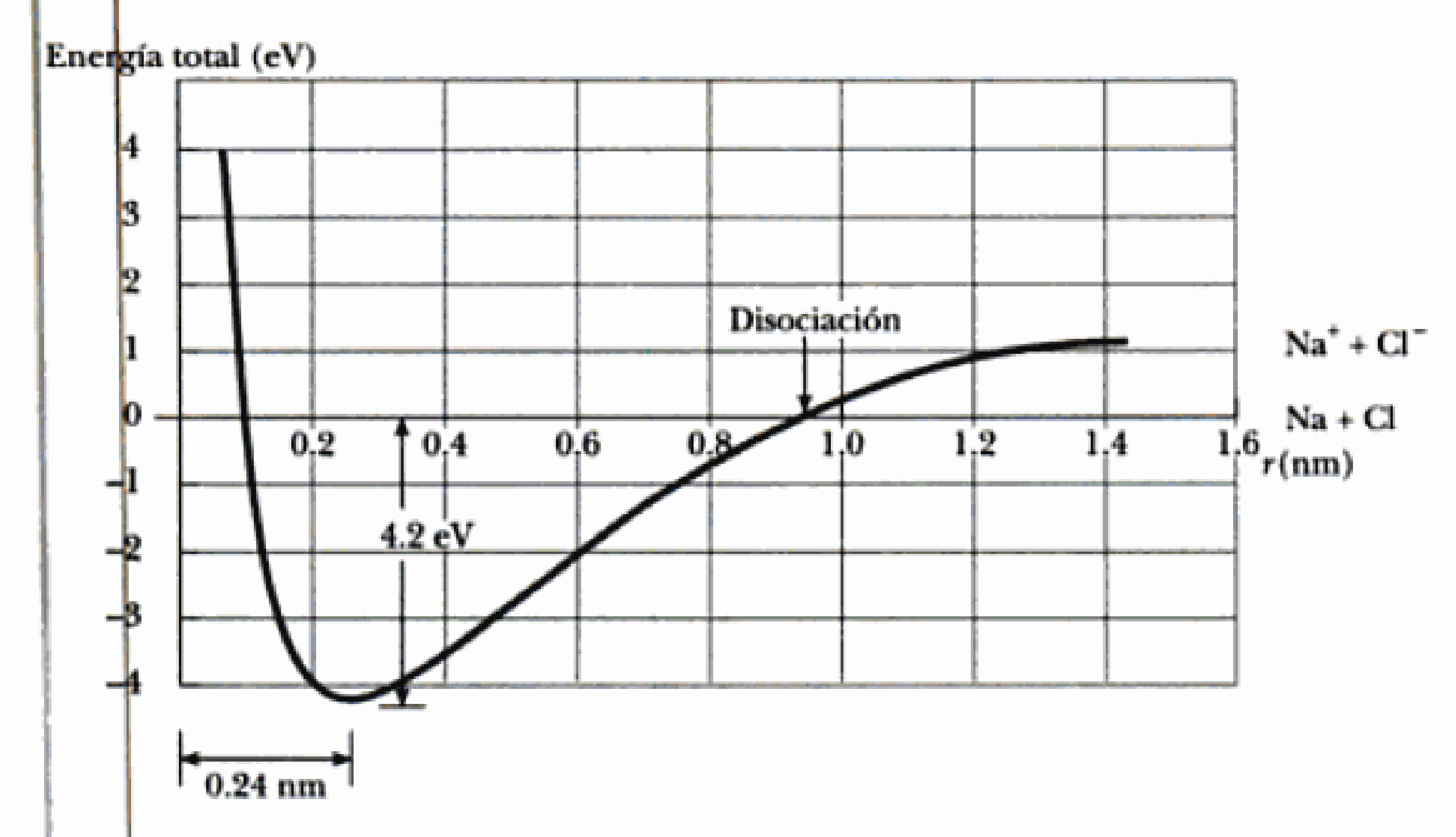


Figura 11.2 Energía total como función de la separación internuclear para iones Na^+ y Cl^-. La energía necesaria para separar la molécula NaCl en átomos neutrales de Na y Cl es la energía de disociación, 4.2 eV.

lentes. En el caso de la molécula de H_2, los dos electrones son compartidos por igual entre los núcleos y forman lo que se denomina orbital molecular. Es más probable que los dos electrones se encuentren entre ambos núcleos, por lo que la densidad de electrones es grande en esta región. La figura 11.3 representa la formación del orbital molecular a partir de los orbitales *s* de los dos átomos de hidrógeno. Debido al principio de exclusión, los dos electrones en el estado fundamental del H_2 deben tener espines antiparalelos. Si un tercer átomo de H se aproxima a la molécula de H_2, el tercer electrón debe ocupar un estado cuántico de energía superior debido al principio de exclusión, la cual es una situación energéticamente desfavorable. Así, ahora la molécula de H_3 no es estable, por lo que no se forma. La estabilidad del H_2 y la de especies relacionadas se analizan con más detalle en la sección 11.4.

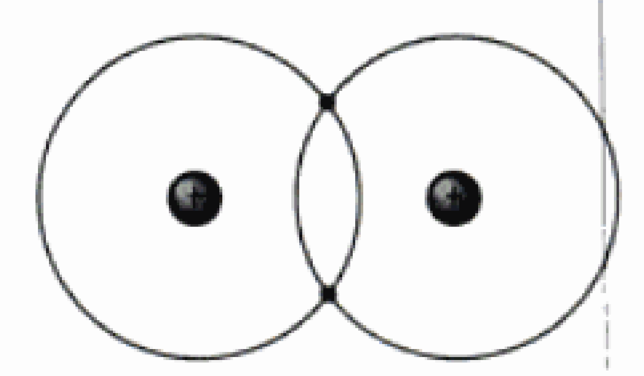


Figura 11.3 Modelo orbital clásico para el enlace covalente formado por los dos electrones 1*s* de la molécula de H_2.

Moléculas complejas más estables, como H_2O, CO_2 y CH_4, también se forman por enlaces covalentes. Considere el metano, CH_4, una molécula orgánica típica que se muestra esquemáticamente en el diagrama de compartición de electrones de la figura 11.4a. Observe que entre el átomo de carbono y cada uno de los cuatro átomos de hidrógeno se forman enlaces covalentes. La distribución espacial de los electrones de los enlaces covalentes se muestra en la figura 11.4b. Los cuatro núcleos de hidrógeno están en las esquinas de un tetraedro regular, donde el centro es el núcleo del carbono.

Enlaces de Van der Waals

Los enlaces iónicos y covalentes se presentan entre los átomos para formar moléculas o sólidos iónicos, de modo que pueden describirse como enlaces *en el interior* de las moléculas. *Entre* las moléculas pueden ocurrir dos tipos adicionales de enlace: los enlaces de Van der Waals y los enlaces del hidrógeno.

Podría esperarse que dos moléculas neutras no interactúen por medio de la fuerza eléctrica porque cada una posee carga neta cero. Se ha encontrado, no obstante, que se atraen mutuamente debido a fuerzas electrostáticas débiles denominadas fuerzas de Van der Waals. De manera semejante, los átomos que no forman enlaces iónicos o covalentes se atraen mutuamente por fuerzas de Van der Waals. Los gases inertes, por ejemplo, debido a que su estructura de capas está llena, no suelen formar moléculas. Debido a las fuerzas de Van der

moleculares. La energía electrónica de una molécula es muy complicada porque implica la interacción de muchas partículas cargadas. Las energías electrónicas constituyen el tema de la sección 11.4. Aquí la atención se enfoca en la importante información sobre la molécula que puede deducirse del análisis de los estados de energía de rotación y de vibración, que proporcionan las líneas espectrales en la región infrarroja del espectro electromagnético.

Rotación molecular

Se considerará la rotación de una molécula alrededor de su centro de masa. El análisis se restringe a la molécula diatómica, aunque los mismos conceptos pueden extenderse a moléculas poliatómicas. Como se muestra en la figura 11.6a, la molécula diatómica sólo tiene 2 grados de libertad rotacional, que corresponden a su rotación alrededor de los ejes y y z; es decir, los ejes perpendiculares al eje molecular.[1]

Toda la energía de una molécula que rota de manera rígida es cinética. Sean m_1 y m_2 las masas atómicas, con velocidades v_1 y v_2. Para una molécula en rotación, las velocidades v_1 y v_2 están relacionadas. En términos de la velocidad angular de rotación, se tiene

$$v_1 = \omega r_1 \qquad \text{y} \qquad v_2 = \omega r_2$$

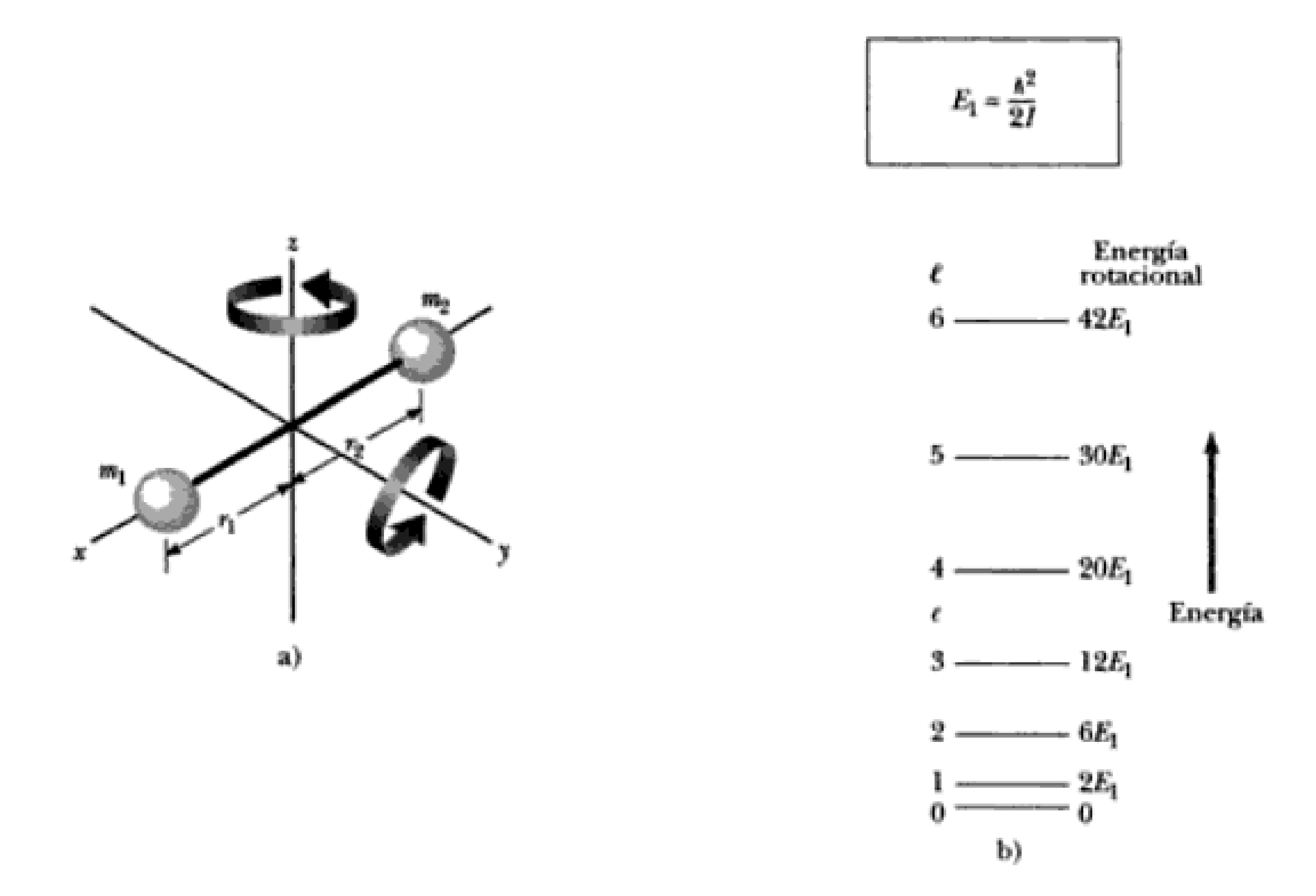


Figura 11.6 a) Una molécula diatómica orientada a lo largo del eje x tiene dos grados de libertad rotacionales, correspondientes a la rotación alrededor de los ejes y y z. b) Energías rotacionales permitidas de una molécula diatómica, calculada usando la ecuación 11.5.

[1]La energía de excitación para rotaciones alrededor del eje molecular es tan grande que tales modos no son observables. Esto se concluye debido a que casi toda la masa molecular está concentrada en el intervalo de dimensiones nucleares del eje de rotación, lo que proporciona un momento de inercia despreciablemente pequeño alrededor de la línea internuclear (vea el problema 12).

donde r_1 es la distancia de m_1 al eje de rotación y de manera semejante para r_2 (vea la figura 11.6a). El momento angular de rotación alrededor del eje z es

$$L = m_1 v_1 r_1 + m_2 v_2 r_2 = \{m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2\}\omega = I\omega$$

La cantidad entre llaves es el momento de inercia, denotado por I. Con esta identificación, la energía de rotación es

$$E_{\text{rot}} = \tfrac{1}{2}m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2 v_2^2 = \tfrac{1}{2}I\omega^2$$

Al eliminar ω de las dos ecuaciones anteriores se llega al simple resultado

Energía rotacional y momento angular

$$E_{\text{rot}} = \frac{L^2}{2I} \tag{11.1}$$

Al comparar la ecuación 11.1 con la energía cinética de una partícula en traslación, $p^2/2m$, se observa que el momento de inercia I de la molécula mide la resistencia de ésta al cambiar su movimiento de rotación de la misma forma en que la masa m de una sola partícula mide su resistencia al cambiar su traslación. No obstante, el valor de I depende del eje de rotación. Cuando el eje de rotación pasa por el centro de masa,[2] se tiene $m_1 r_1 = m_2 r_2$, y r_1 y r_2 pueden escribirse en términos de la separación atómica $R_0 = r_1 + r_2$ como

$$R_0 = \left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right) r_2 = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) r_1$$

Entonces, el momento de inercia con respecto del centro de masa, I_{CM}, se convierte en

$$I_{\text{CM}} = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) R_0^2 = \mu R_0^2 \tag{11.2}$$

donde μ es la **masa reducida de la molécula,**

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \tag{11.3}$$

A diferencia del momento de inercia, que es una propiedad de la molécula, el momento angular L es una variable dinámica; en la transición a la mecánica cuántica, L^2 se vuelve cuantizada. Como se muestra en el capítulo 8, la regla de cuantización correcta es

$$L^2 = \ell(\ell + 1)\hbar^2 \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots \tag{11.4}$$

que, a su vez, restringe la energía de rotación a que asuma uno de los valores discretos

Energías permitidas para rotación

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2I_{\text{CM}}} \ell(\ell + 1) \tag{11.5}$$

En el contexto de la rotación molecular, el entero ℓ se denomina **número cuántico rotacional.** Así, se observa que **la energía de rotación de la molécula está cuantizada y depende del momento de inercia de la molécula.** Las energías de rotación permitidas de una molécula diatómica se muestran en la figura 11.6b.

[2]Debido a que la molécula no está restringida a rotar sobre ningún eje, el eje correcto para calcular la energía rotacional es aquel que pasa por el centro de masa. La energía asociada con la rotación alrededor de cualquier otro eje debe incluir algo de energía de traslación, así como energía de rotación.

Tabla 11.1 Líneas de absorción de microondas para varias transiciones rotacionales de la molécula de CO

Transición rotacional	Longitud de onda de la línea de absorción (m)	Frecuencia de la línea de absorción (Hz)
$\ell = 0 \rightarrow \ell = 1$	2.60×10^{-3}	1.15×10^{11}
$\ell = 1 \rightarrow \ell = 2$	1.30×10^{-3}	2.30×10^{11}
$\ell = 2 \rightarrow \ell = 3$	8.77×10^{-4}	3.46×10^{11}
$\ell = 3 \rightarrow \ell = 4$	6.50×10^{-4}	4.61×10^{11}

Estos resultados también son válidos para moléculas poliatómicas, en el supuesto de que se aplique una generalización idónea de I_{CM}.

La separación entre niveles rotacionales adyacentes puede calcularse a partir de la ecuación 11.5:

$$\Delta E = E_\ell - E_{\ell-1} = \frac{\hbar^2}{2I_{CM}}\{\ell(\ell+1) - (\ell-1)\ell\} = \frac{\hbar^2}{I_{CM}}\ell \qquad (11.6)$$

donde ℓ es el número cuántico del nivel energético superior. Al pasar de un estado rotacional al siguiente, la molécula pierde (o gana) energía, ΔE. La pérdida (o ganancia) típicamente va acompañada de emisión (o absorción) de fotones a la frecuencia $\omega = \Delta E/\hbar$. Así, a las frecuencias $\omega_0 = \hbar/I_{CM}$, $2\omega_0$, $3\omega_0$, . . . Estas predicciones coinciden de manera excelente con los experimentos.[3] Las longitudes de onda y las frecuencias para el espectro de absorción de la molécula de CO se proporcionan en la tabla 11.1. Las frecuencias más bajas están en el *intervalo de microondas* del espectro electromagnético, como es típico en los espectros de rotación de todas las moléculas. Esto indica que la energía necesaria para excitar una molécula a rotar es bastante pequeña, del orden de 10^{-4} eV. A partir de los datos es posible deducir los momentos de inercia y la longitud de enlace de la molécula, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 11.1 Rotación de la molécula de CO

La transición rotacional de $\ell = 0$ hasta $\ell = 1$ de la molécula de CO ocurre a una frecuencia de 1.15×10^{11} Hz. a) Use esta información para calcular el momento de inercia de la molécula con respecto de su centro de masa.

Solución A partir de la ecuación 11.6, se observa que la diferencia energética entre los niveles rotacionales $\ell = 0$ y $\ell = 1$ es $\hbar^2/I_{CM}$. Al igualar esto con la energía del fotón absorbido, se obtiene

$$\frac{\hbar^2}{I_{CM}} = \hbar\omega$$

La frecuencia angular ω de la radiación absorbida es

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(1.15 \times 10^{11}\ \text{Hz}) = 7.23 \times 10^{11}\ \text{rad/s}$$

de modo que I_{CM} se convierte en

$$I_{CM} = \frac{\hbar}{\omega} = \frac{1.055 \times 10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}}{7.23 \times 10^{11}\ \text{rad/s}} = 1.46 \times 10^{-46}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

b) Calcule la longitud de enlace de la molécula.

Solución La ecuación 11.2 puede aplicarse para calcular la longitud de enlace una vez que se encuentra la masa reducida de la molécula. Debido a que las masas del carbono y del oxígeno son 12 u y 16 u, respectivamente, la masa reducida de la molécula de CO es, utilizando la ecuación 11.3,

$$\mu = \frac{(12.0\ \text{u})(16.0\ \text{u})}{12.0\ \text{u} + 16.0\ \text{u}} = 6.857\ \text{u} = 1.14 \times 10^{-26}\ \text{kg}$$

[3]Estos simples planteamientos deben refinarse cuando se toma en cuenta la vibración molecular, como se analiza en la sección 11.3.

donde se ha usado la conversión 1 u = 1.66×10^{-27} kg.

$$R_0 = \sqrt{\frac{I_{CM}}{\mu}} = \sqrt{\frac{1.46 \times 10^{-46}\,\text{kg}\cdot\text{m}^2}{1.14 \times 10^{-26}\,\text{kg}}}$$
$$= 1.13 \times 10^{-10}\,\text{m} = 0.113\,\text{nm}$$

¡Este ejemplo sugiere el inmenso poder de las mediciones espectroscópicas para determinar las propiedades moleculares!

Vibración molecular

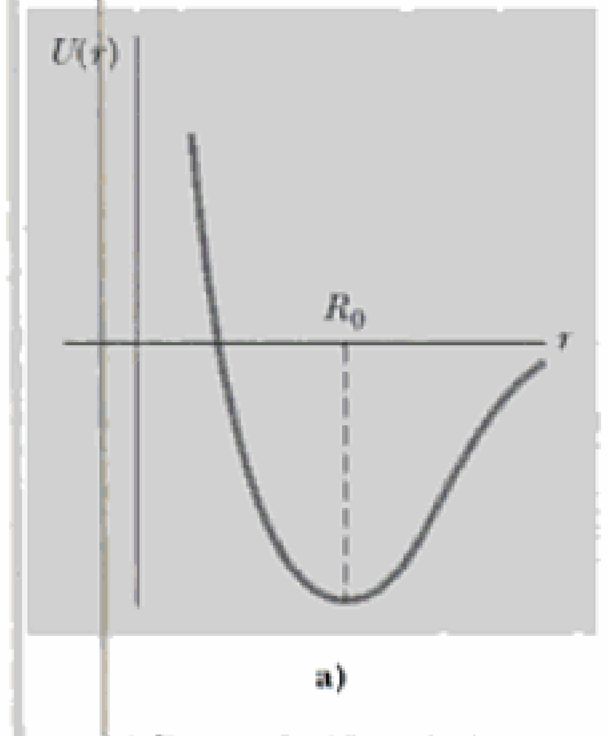
Una molécula es una estructura flexible cuyos átomos están enlazados entre sí, por lo que se consideran "resortes efectivos". Si es perturbada, la molécula puede vibrar, adquiriendo energía de vibración. Esta energía puede modificarse si la molécula se expone a radiación de frecuencia idónea.

Considere nuevamente una molécula diatómica. En la figura 11.7a se muestra la energía potencial $U(r)$ en términos de la separación atómica de dicha molécula. La separación en equilibrio de los átomos se denota ahí por R_0; con pequeños desplazamientos con respecto al equilibrio, los átomos vibran, como si estuvieran unidos por un resorte de longitud R_0 sin estirar y constante de restitución K (figura 11.7b).[4] Los desplazamientos atómicos en la dirección del eje molecular provocan oscilaciones a lo largo de la línea que une a los átomos. Para estas vibraciones longitudinales, el sistema es efectivamente unidimensional, donde las coordenadas de cada átomo se miden a lo largo del eje molecular.

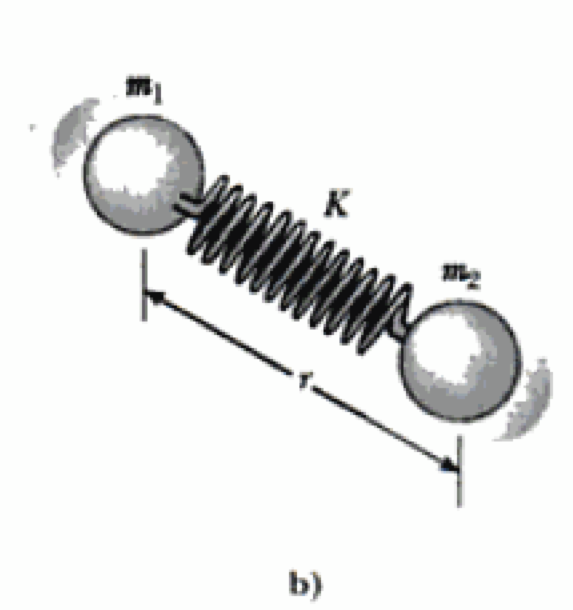
Los desplazamientos de m_1 y m_2 con respecto al equilibrio se denotan por ξ_1 y ξ_2, respectivamente. En términos de estos desplazamientos, el resorte efectivo se estira una cantidad neta $\xi_1 - \xi_2$, y la energía elástica del par de átomos es

Aproximación armónica a la vibración molecular

$$U = \tfrac{1}{2}K(\xi_1 - \xi_2)^2$$



a)



b)

Figura 11.7 a) Gráfica de la energía potencial de una molécula diatómica contra la separación atómica. El parámetro R_0 es la separación en equilibrio de los átomos. b) Modelo de una molécula diatómica cuyos átomos están enlazados por un resorte efectivo con constante de restitución K. La vibración fundamental es a lo largo del eje molecular.

[4]En la sección 6.6 del capítulo 6 se demostró que la constante de fuerza efectiva K está dada por la curvatura de $U(r)$ evaluada en la separación de equilibrio R_0; es decir, $K = \partial^2 U/\partial r^2|_{R_0}$.

armónicos esféricos, $Y_\ell^{m_\ell}(\theta, \phi)$, multiplicados por soluciones, $R(r)$, de la ecuación de onda radial (sección 8.2). En este contexto, los números cuánticos del momento angular ℓ y m_ℓ especifican el estado rotacional de la molécula. La vibración molecular es descrita por la onda radial $R(r)$ y refleja la elección de potencial interatómico $U(r)$. Cerca del equilibrio, $U(r)$ se asemeja bastante al potencial del resorte, lo cual lleva a energías de vibración características del oscilador cuántico.

Efectos antiarmónicos

En realidad, los átomos de una molécula ejercen fuerzas complicadas entre sí; estas fuerzas son armónicas sólo cuando los átomos están próximos a sus posiciones de equilibrio. Más energía vibracional implica amplitud de vibración más amplia, y con ello una ruptura de la aproximación armónica: el resorte efectivo da lugar a una representación más precisa de la fuerza interatómica verdadera. Una forma de lograr esto consiste en remplazar el potencial armónico $\frac{1}{2}K\xi^2$ en la ecuación 11.7 por el **potencial de Morse** que se muestra en la figura 11.9a. Cerca del equilibrio ($r = R_0$) el potencial de Morse es armónico; más lejos, $U(r)$ imita la asimetría característica de las fuerzas interatómicas, que se vuelve cero cuando la separación entre los átomos es bastante grande ($r \to \infty$) aunque asciende en gran medida conforme los átomos se aproximan entre sí. En consecuencia, se producen oscilaciones alrededor de una posición media $\langle r \rangle$ *que aumenta* con la energía de vibración. Éste es el origen de la expansión térmica, en donde el incremento de la energía de vibración resulta del aumento de la temperatura de la muestra. A diferencia del oscilador armónico, el intervalo que separa niveles consecutivos del oscilador de Morse disminuye de manera continua a energías superiores, como se ilustra en la figura 11.9b. El oscilador de Morse se analiza con mayor detalle en los problemas 14 a 17.

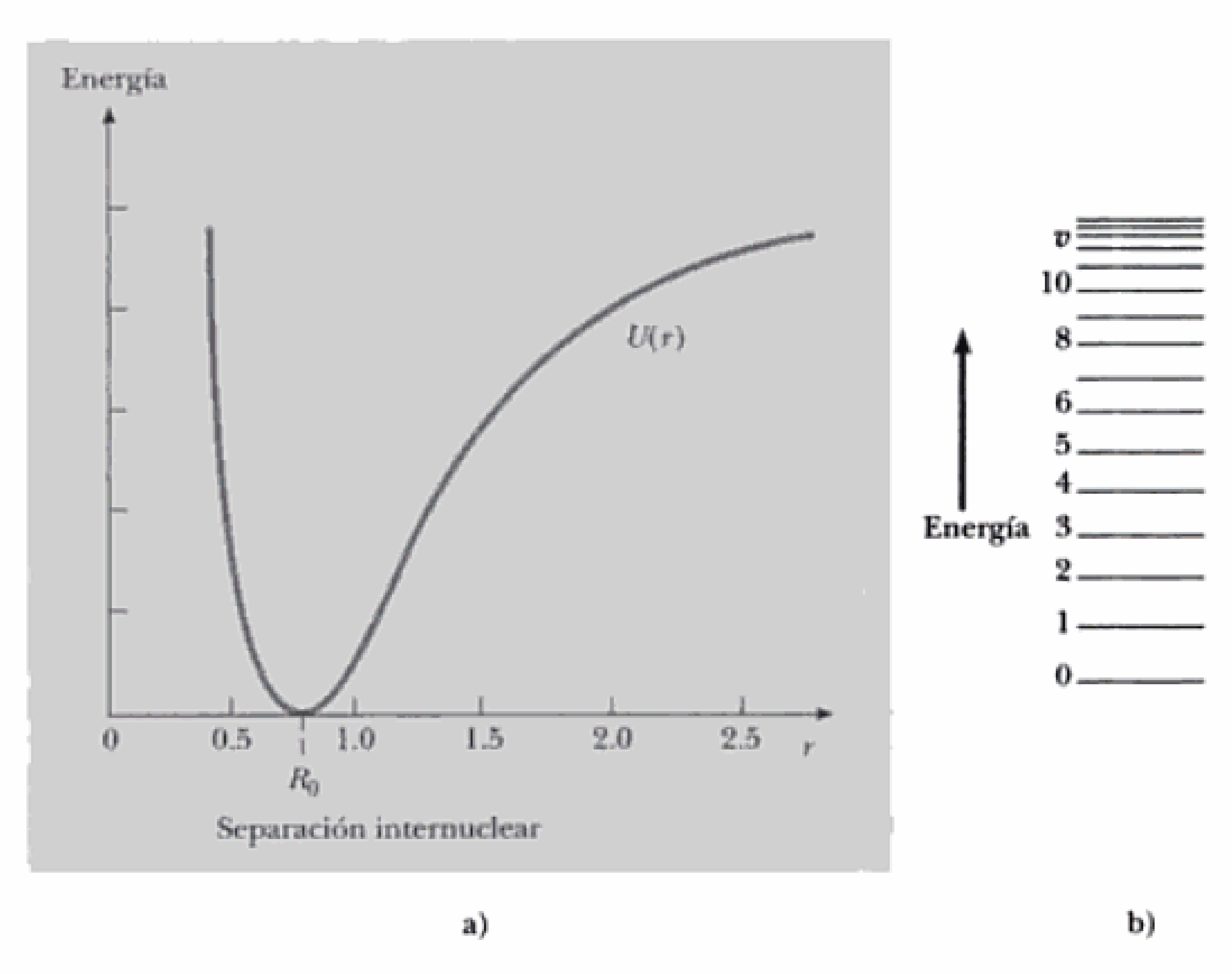


Figura 11.9 a) Energía potencial $U(r)$ para el oscilador de Morse. En la región en equilibrio alrededor de R_0, $U(r)$ es armónica, aunque sube en forma pronunciada a medida que los átomos se aproximan entre sí. b) Energías de vibración permitidas para el oscilador de Morse. Observe que la separación entre niveles adyacentes *disminuye* con el aumento de energía.

11.3 ESPECTROS MOLECULARES

En general, una molécula gira y vibra a la vez. Hasta una primera aproximación, estos movimientos son independientes entre sí y la energía de rotación y de vibración total de la molécula está dada por la suma de las ecuaciones 11.5 y 11.8:

Espectro rotación-vibración de una molécula diatómica

$$E_{\text{rot}-\text{vib}} = \frac{\hbar^2}{2I_{\text{CM}}}\,\ell(\ell + 1) + (v + \tfrac{1}{2})\hbar\omega \tag{11.10}$$

Los niveles descritos por la ecuación 11.10 constituyen la aproximación más simple al **espectro de rotación-vibración** de cualquier molécula. Cada nivel posee dos índices correspondientes a los números cuánticos ℓ y v, que especifican el estado de rotación y vibración, respectivamente. Para cada valor permitido del número cuántico vibracional v, hay un conjunto completo de niveles rotacionales, que corresponden a $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ Debido a que los niveles rotacionales consecutivos están separados por energías mucho menores que la energía de vibración $\hbar\omega$, los niveles de rotación-vibración de una molécula típica son como se muestra en la figura 11.10. Normalmente, la molécula asumiría la configuración con la energía mínima, en este caso la designada por $v = 0$ y $\ell = 0$. Influencias externas, como la temperatura o la presencia de radiación electromagnética, pueden modificar la condición molecular, lo que daría como resultado una transición de un nivel de rotación-vibración a otro. El cambio en energía molecular debe compensarse por absorción o emisión de energía en alguna otra forma. Cuando existe radiación electromagnética, las transiciones, denominadas **transiciones ópticas,** también están sujetas a otras leyes de conservación, ya que los fotones transportan cantidad de movimiento y energía.

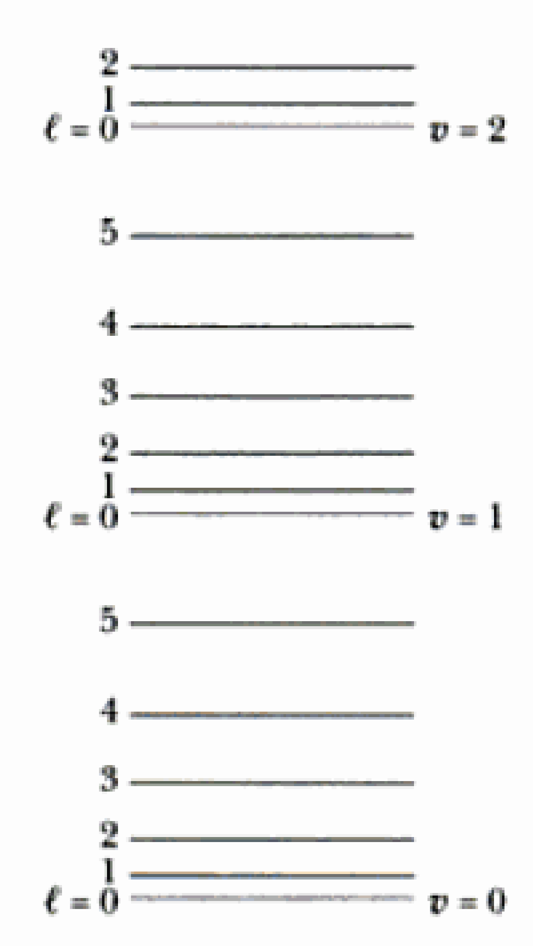


Figura 11.10 Niveles de rotación-vibración para una molécula típica. Observe que los niveles vibracionales están separados por energías mucho más grandes, de modo que un espectro rotacional puede asociarse con cada nivel vibracional.

Cualquier transición óptica entre niveles moleculares con energías E_1 y E_2 deben ir acompañadas por la emisión o absorción de fotones a la frecuencia

$$f = \frac{|E_2 - E_1|}{h} \quad \text{o bien,} \quad \Delta E = \pm hf \tag{11.11}$$

Debido a que la energía del fotón es hf, ésta corresponde a la conservación de energía para el sistema integrado por la molécula y el fotón. La ecuación 11.11 expresa un tipo de resonancia entre los dos; a menos que haya fotones disponibles de la frecuencia correcta (energía), no es posible ninguna transición. Restricciones semejantes son válidas para otras cantidades de las que se sabe deben conservarse en el proceso de transición. En particular, los estados inicial y final de una transición óptica también deben diferir por exactamente una unidad de momento angular:

$$|\ell_2 - \ell_1| = 1 \quad \text{o bien,} \quad \Delta\ell = \pm 1 \tag{11.12}$$

La conclusión que se obtiene de la ecuación 11.12 es que el fotón transporta cantidad de movimiento en la cantidad $\hbar$; es decir, el fotón es una partícula con espín 1 cuyo número cuántico de espín es $s = 1$. Así, la ecuación 11.12 expresa la conservación del momento angular para el sistema integrado por la molécula y el fotón. Las ecuaciones 11.11 y 11.12 son las **reglas de selección para las transiciones ópticas.**

Para los niveles vibracionales inferiores, también hay una restricción sobre el número cuántico vibracional v:

$$|v_2 - v_1| = 1 \quad \text{o bien,} \quad \Delta v = \pm 1 \tag{11.13}$$

La ecuación 11.13 refleja el carácter armónico de la fuerza interatómica, más que cualquier propiedad del fotón; en efecto, para energías vibracionales superiores,

el concepto de un resorte efectivo que une los átomos es inexacto, y entonces la ecuación 11.13 deja de ser válida.

Las reglas de selección restringen bastante el número de frecuencias o longitudes de onda del fotón observadas en espectros moleculares, ya que las transiciones están prohibidas a menos que todas las reglas se cumplan de manera simultánea.[5] Por ejemplo, una transición puramente rotacional no se vería, ya que requiere $\Delta v = 0$, lo que viola la ecuación 11.13. De igual forma, una transición puramente vibracional ($\Delta\ell = 0$) está prohibida, y se concluye que las transiciones ópticas suelen implicar tanto vibración como rotación moleculares.

El espectro de una molécula particular puede predecirse al considerar una colección de tales moléculas, inicialmente sin perturbar. A temperaturas normales hay insuficiente energía térmica para excitar cualquier modo de vibración, excepto el $v = 0$, aunque las moléculas estarán en varios estados de rotación. Debido a que una transición rotacional pura está prohibida, la absorción óptica debe resultar de transiciones en las que v crece en una unidad pero ℓ aumenta o disminuye, también en una unidad (figura 11.11a). En consecuencia, el espectro de absorción molecular consta de dos secuencias de líneas, representadas por $\Delta\ell = \pm 1$, con $\Delta v = +1$ en ambos casos. Las energías de los fotones absorbidos se calculan fácilmente a partir de la ecuación 11.14:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \hbar\omega + \frac{\hbar^2}{I_{CM}}(\ell + 1) \qquad \ell = 0, 1, \ldots \qquad (\Delta\ell = +1) \\ \Delta E &= \hbar\omega - \frac{\hbar^2}{I_{CM}}\ell \qquad \ell = 1, 2, \ldots \qquad (\Delta\ell = -1) \end{aligned} \tag{11.14}$$

Aquí ℓ es el número cuántico rotacional del estado inicial. La primera de las ecuaciones 11.14 genera una serie de líneas equidistantes a frecuencias *por arriba* de la frecuencia de vibración característica ω, y la segunda genera una serie *por abajo* de esta frecuencia. Líneas adyacentes están separadas en frecuencia (angular) por la unidad fundamental $\hbar/I_{CM}$. Observe que ω misma está excluida, ya que ℓ no puede ser cero si la transición es una para la cual ℓ decrece ($\Delta\ell = -1$). En la figura 11.11b se muestran las frecuencias esperadas en el espectro de absorción para la molécula; estas mismas frecuencias aparecen en el espectro de emisión.

El espectro de absorción de la molécula de HCl que se muestra en la figura 11.12 sigue este patrón bastante bien y refuerza nuestro modelo. Sin embargo, una peculiaridad resulta evidente: cada línea en el espectro HCl se separa en un doblete. Esta duplicación ocurre debido a que la muestra es una mezcla de dos isótopos del cloro, ^{35}Cl y ^{37}Cl, cuyas masas diferentes originan los dos valores distintos de I_{CM}. Observe, también, que no todas las líneas espectrales aparecen con la misma intensidad, ya que incluso las transiciones permitidas ocurren a *tasas* distintas (número de fotones absorbidos por segundo). Las tasas de transición están regidas principalmente por las poblaciones de los estados inicial y final, y éstas dependen de la degeneración en los niveles, así como de la temperatura del sistema.

[5] Las reglas de selección proporcionadas son para oscilaciones y rotaciones armónicas de un rotor rígido. En la práctica se dan violaciones a estas reglas debido a razones predecibles como la antiarmonía o el acoplamiento rotación-vibración.

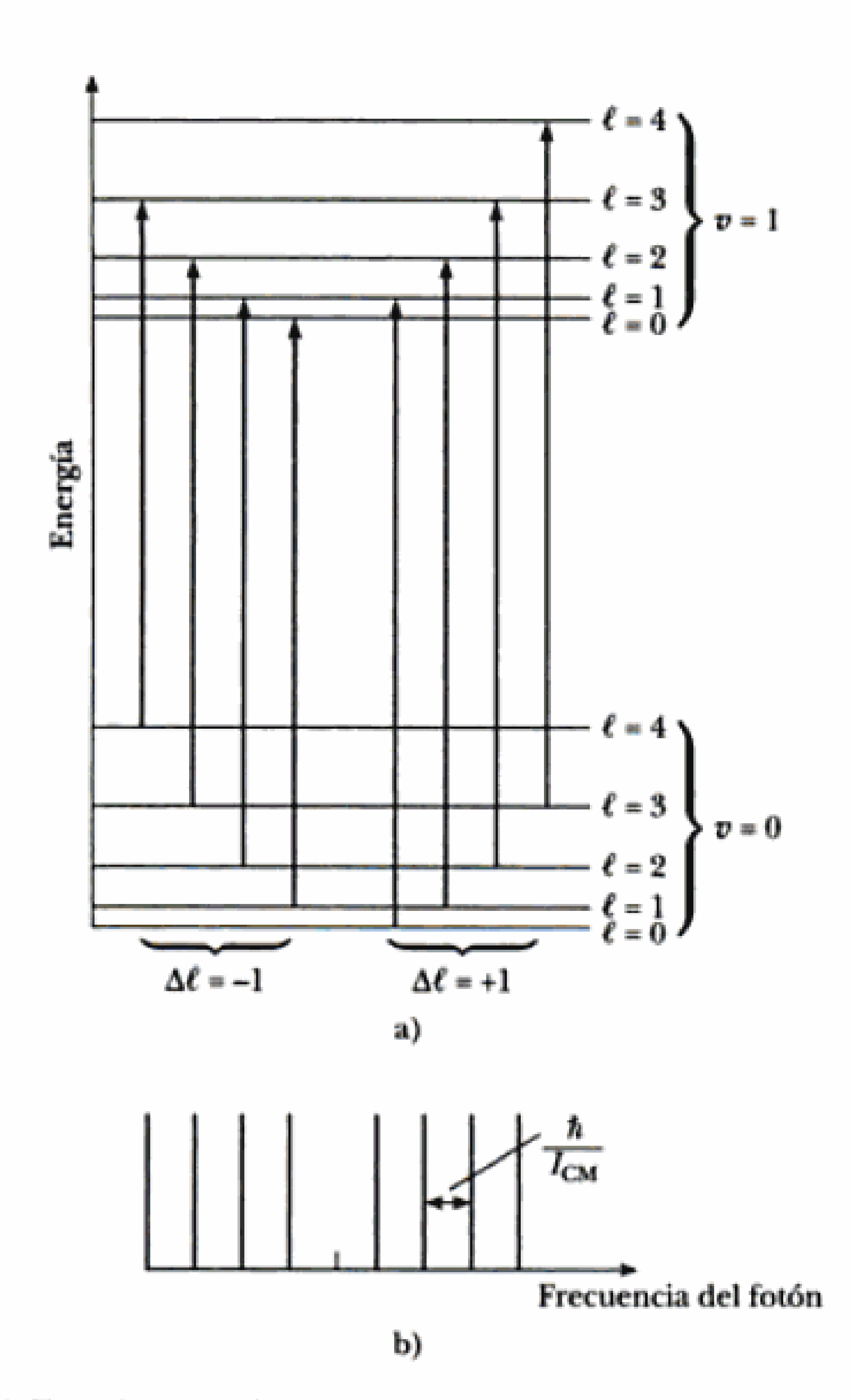


Figura 11.11 a) Transiciones absorbentes entre los estados vibracionales $v = 0$ y $v = 1$ de una molécula diatómica. Las transiciones cumplen la regla de selección $\Delta\ell = \pm 1$ y caen en dos secuencias: aquellas para las cuales $\Delta\ell = +1$ y aquellas para las cuales $\Delta\ell = -1$. Las energías de transición están dadas por la ecuación 11.14. b) Líneas esperadas en el espectro de absorción óptico de una molécula. Las líneas al lado derecho del centro corresponden a transiciones en las cuales ℓ cambia por $+1$, y las líneas al lado izquierdo del centro corresponden a transiciones en las cuales ℓ cambia por -1. Estas mismas líneas aparecen en el espectro de emisión.

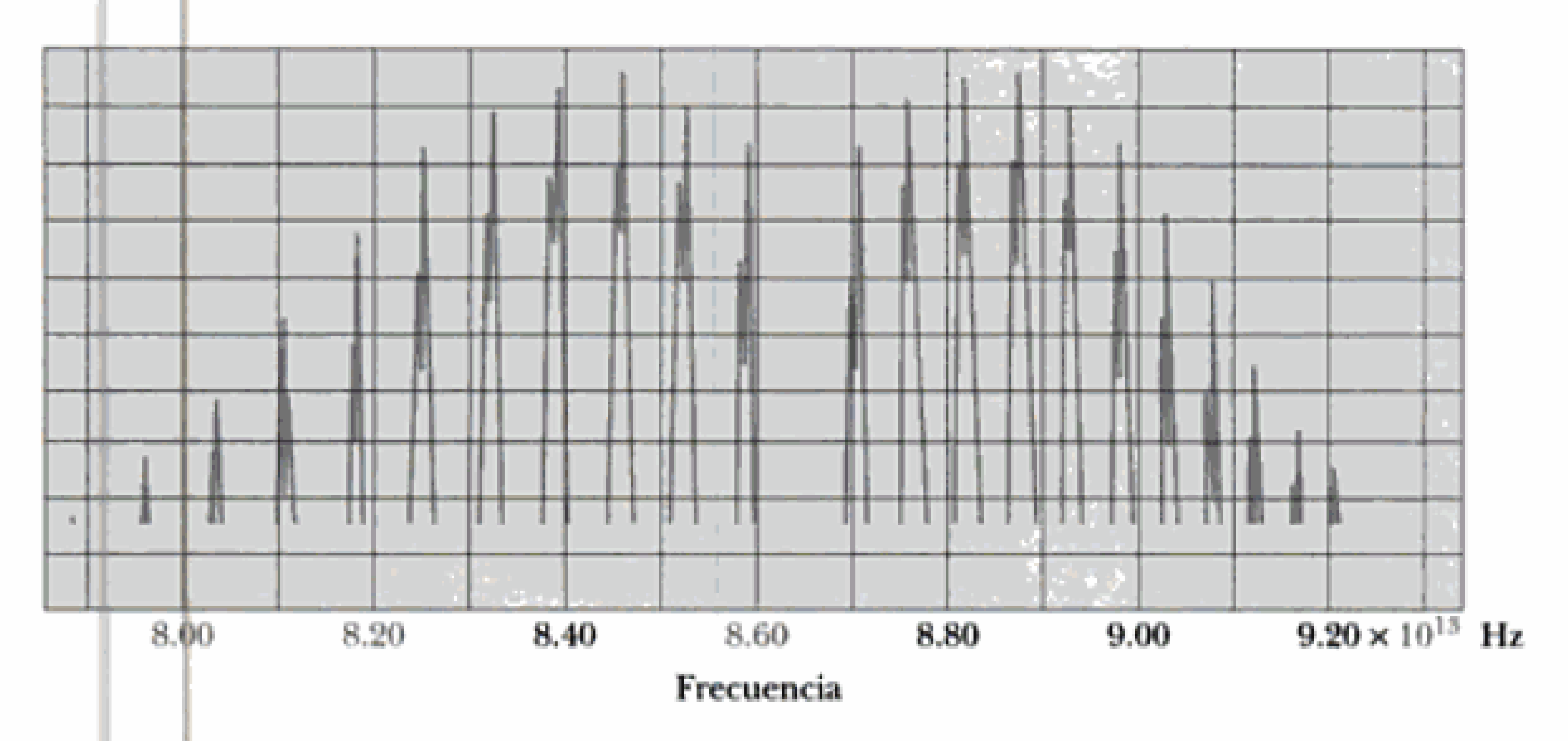


Figura 11.12 Espectro de absorción de la molécula de HCl. Cada línea se separa en un doblete debido a que el cloro tiene dos isótopos, ^{35}Cl y ^{37}Cl, que tienen diferentes masas nucleares. (Ésta es una adaptación de los datos tomados por T. Faulkner y T. Nestrick en la Universidad de Oakland en Rochester, MI.)

La excitación de los niveles energéticos rotacional y vibracional es una consideración importante en los modelos actuales del calentamiento global. Para moléculas de CO_2, casi todas las líneas de absorción están en la porción infrarroja del espectro. Así, la luz visible proveniente del Sol no es absorbida por CO_2 atmosférico, sino que choca contra la superficie terrestre, calentándola. A su vez, la superficie de la Tierra, que está a una temperatura mucho más baja que la del Sol, emite radiación térmica que alcanza un máximo en la sección infrarroja del espectro electromagnético. La radiación infrarroja es absorbida por las moléculas de CO_2 en el aire, en vez de irradiarlas hacia el espacio. Así, el CO_2 atmosférico actúa como una válvula unidireccional para la energía proveniente del Sol y es responsable, junto con otras moléculas atmosféricas, del incremento en la temperatura de la superficie terrestre por arriba de su valor en ausencia de atmósfera. Este fenómeno suele denominarse "efecto invernadero". La quema de combustibles fósiles en la sociedad industrializada de hoy agrega más CO_2 a la atmósfera. Muchos científicos temen que esto incrementará la absorción de radiación infrarroja, elevando aún más la temperatura de la Tierra, y podría provocar cambios climatológicos sustanciales.

Por último, se observa que las moléculas, como los átomos, a menudo simplemente *dispersan* la radiación, sin tener que absorberla primero y luego re-emitirla. (En efecto, fotones con cualquier energía pueden dispersarse de modo que no haya resonancia.) En la **dispersión de Rayleigh,** la energía del fotón permanece sin cambio por la colisión. La dispersión de Rayleigh es más intensa a longitudes de onda más cortas del fotón, y es esta selectividad en la dispersión la que explica el color azul del cielo diurno. Pero también puede ocurrir **dispersión de Raman,** donde el fotón pierde, o incluso gana, energía en la colisión. (Sir Chandrasekhara V. R., Raman, físico hindú, 1888-1970, fue galardonado con el premio Nobel de Física debido a su trabajo sobre la dispersión de la luz y el efecto que lleva su nombre.) Debido a que la energía del fotón cambia, el efecto Raman es un ejemplo de un proceso inelástico. Para tales procesos, la energía sigue conservándose globalmente, donde la pérdida o ganancia de energía del fotón se compensa con un cambio en el estado rotacional/vibracional de la molécula. Cuando hay rotación implicada, la energía que se intercambia en la dispersión de Raman satisface la regla de selección $\Delta\ell = \pm 2$. En la figura 11.13 se muestra un proceso Raman típico, en el cual un fotón que llega con energía E es dispersado y emerge con una energía reducida E', donde la

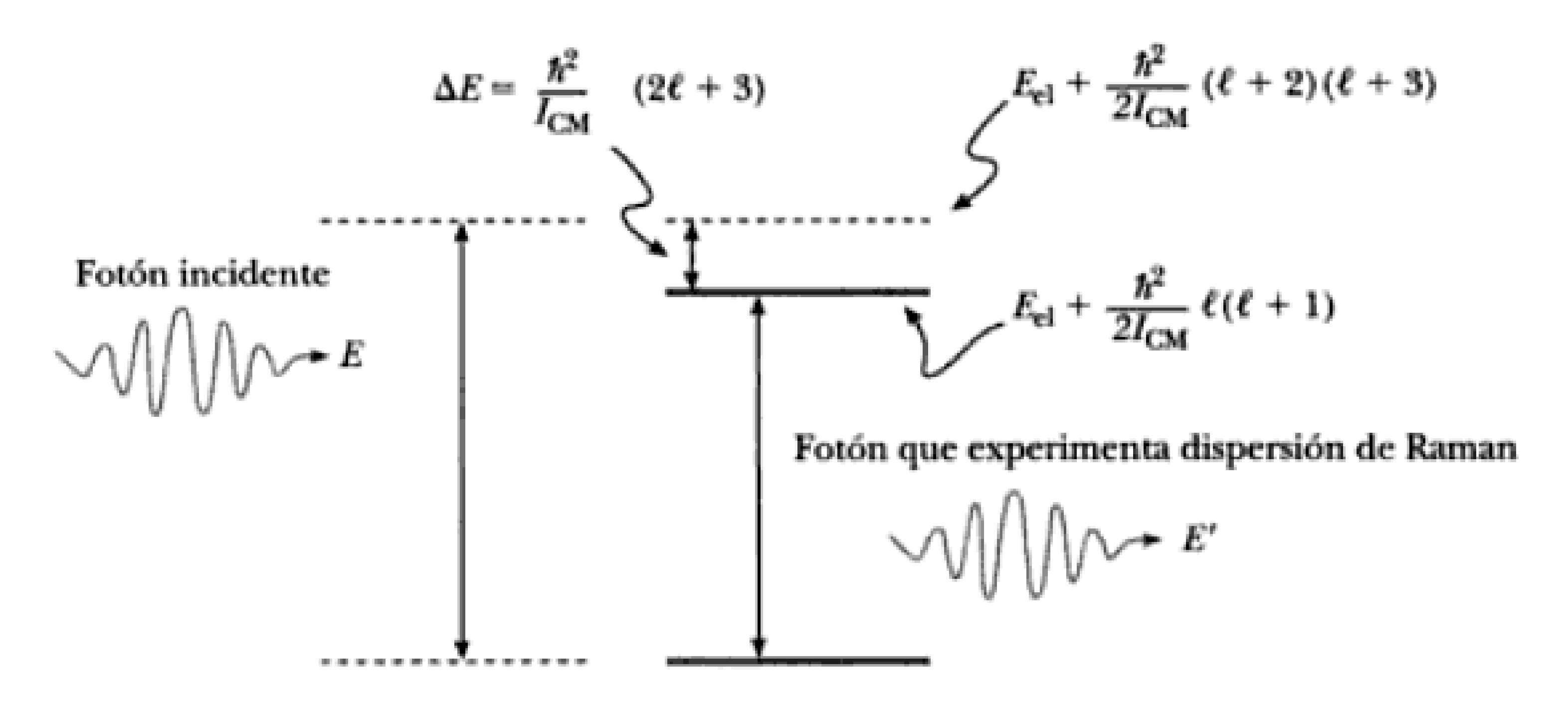


Figura 11.13 Ilustración de la dispersión de Raman. En este caso un fotón incidente con energía E es dispersado por una molécula y emerge con energía reducida E'. La energía perdida por el fotón incrementa la energía rotacional de la molécula, en acuerdo con la regla de selección $\Delta\ell = 2$. La energía perdida se traduce en un cambio en la frecuencia del fotón, el desplazamiento de Raman, puede usarse para probar la estructura molecular.

diferencia se ha gastado al excitar a la molécula a un estado rotacional superior. La energía de excitación ΔE se encuentra a partir de la ecuación 11.10 usando ℓ, v para los números cuánticos del estado inicial y $\ell + 2$, v para los números cuánticos del estado final $\Delta\ell = 2$, $\Delta v = 0$). El fotón dispersado posee una frecuencia menor f' en comparación con la original; el **desplazamiento de Raman** $f - f'$ es justo la energía de excitación ΔE dividida entre h, o bien,

Desplazamiento de Raman

$$f - f' = \frac{\hbar}{2\pi I_{CM}}(2\ell + 3) \tag{11.15}$$

Para determinar el momento de inercia de la molécula, que proporciona claves importantes sobre la estructura molecular, pueden utilizarse las mediciones del desplazamiento de Raman. En efecto, los espectros de Raman sirven como un tipo de "huella digital" de las moléculas, y se han usado con gran éxito para identificar minerales en muestras de suelo lunar.

La dispersión de Raman es relativamente débil, y observable sólo si la radiación incidente es suficientemente intensa. Con el descubrimiento de poderosas fuentes láser monocromáticas, la espectroscopía Raman ha encontrado aplicación en el monitoreo remoto de contaminantes. Por ejemplo, la dispersión producida por un haz láser dirigido a la parte superior de una chimenea industrial puede utilizarse para monitorear el humo a fin de determinar los niveles de las moléculas que producen líneas de Raman identificables.

En el proceso de Raman, el estado electrónico de la molécula permanece sin modificar. Los espectros moleculares en los cuales ocurren cambios en el estado electrónico, así como en los estados vibracional y/o rotacional de la molécula, se denominan **espectros electrónicos.** Debido a que los niveles energéticos electrónicos de una molécula están separados por energías mucho mayores ($\sim$ 1 eV) que los niveles vibracionales (o rotacionales), las transiciones electrónicas originan líneas espectrales que están en el intervalo visible o ultravioleta. Por la misma razón, un conjunto completo de niveles vibracionales puede asociarse con cada nivel electrónico, justo como un espectro rotacional completo acompaña a cada nivel vibracional.

Fluorescencia y fosforescencia

Al catalogar los espectros electrónicos de las moléculas, se encuentra que pueden ocurrir otros procesos fotónicos, que como la dispersión de Raman, no tienen contraparte en los espectros atómicos. Las moléculas que absorben energía electromagnética en el intervalo visible o cerca del ultravioleta pueden volver a emitir a longitudes de onda más largas en un proceso denominado **fluorescencia.** Este fenómeno cumple la secuencia de tres pasos que se muestra esquemáticamente en la figura 11.14. El paso 1 es la absorción del fotón, que excita la molécula a un estado electrónico-vibracional más energético. En el paso 2, la molécula se proporciona a sí misma algo de energía vibracional al colisionar con moléculas vecinas. A esto le sigue desexcitación al nivel original en el paso 3 con la emisión de un fotón con menos energía (longitud de onda más larga) que el fotón absorbido. La diferencia en energía, denominada **desplazamiento de Stokes,** es fundamental para la sensibilidad de técnicas fluoroscópicas ya que permite que los fotones emitidos se detecten contra un entorno aislado de los fotones absorbidos. En un proceso relacionado denominado **fosforescencia,** el paso 2 se da a través de un mecanismo diferente que deja a la molécula en un estado metaestable. Así, el paso 3 debe realizarse mediante una transición prohibida; es decir, una que viole las reglas de selección para transiciones ópticas y que en promedio, ocurra en mucho más tiempo. En algunos materiales fosforescentes, la emisión se retarda por minutos e, incluso, *por horas* luego de la absorción. La luminosidad remanente asociada con la fosforescencia se aplica en cuestiones relacionadas con el "brillo en la oscuridad", como carátulas de relojes y varios artículos novedosos.

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{ke^2}{|\mathbf{r}|} - \frac{ke^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \tag{11.16}$$

En esta expresión, se supone que un protón está en el origen de coordenadas $\mathbf{r} = 0$, y el otro en $\mathbf{R}$. La separación en equilibrio $R = |\mathbf{R}|$ de los protones en H_2^+ es alrededor de 0.1 nm. Las funciones de onda de estado estacionario y las energías para el electrón H_2^+ son soluciones a la ecuación de Schrödinger con el potencial $U(\mathbf{r})$ de la ecuación 11.16.

Es de utilidad considerar el problema en los dos casos límites $R \to 0$ y $R \to \infty$, para los cuales ya se conocen los resultados, a fin de orientarnos mejor. Cuando $R \to 0$, los dos protones se unen para formar un núcleo de helio; en consecuencia, las funciones de onda y las energías en este **límite de átomos unidos** son las del He^+, proporcionadas por las fórmulas del capítulo 8 con número atómico $Z = 2$. En particular, el estado base y el primer estado excitados son ambos esféricamente simétricos con energías de -54.4 eV y -13.6 eV, respectivamente. En el **límite del átomo separado** $R \to \infty$, el electrón sólo ve el campo de un solo protón y los niveles son los del hidrógeno atómico, -13.6 eV para el estado base y -3.4 eV para el primer estado excitado. Las energías para estos casos extremos pueden indicarse en el **diagrama de correlación** de la figura 11.16. La degeneración de estos niveles (excluyendo el espín) es importante y está dada por los números entre paréntesis. Observe especialmente que el estado base del átomo unido es no degenerado, aunque el estado base de los átomos separados es doblemente degenerado. La degeneración adicional surge por la presencia del segundo protón en H_2^+; en el límite del átomo separado, el electrón puede ocupar un orbital semejante al del hidrógeno alrededor de *cualquier* protón. El mismo razonamiento muestra que todos los niveles atómicos en el límite del átomo separado poseen una degeneración adicional doble, correspondiente a las funciones de onda semejantes a las del hidrógeno centradas en la posición de cualquier protón. El diagrama de correlación completo para H_2^+ incluye los niveles de energía a cualquier separación entre los protones.

Para descubrir qué ocurre a valores intermedios de R, primero se considera el caso en que R es finito pero grande, de modo que la influencia del otro protón, aunque débil, no puede ignorarse. Esta aparición de un segundo centro de fuerza de atracción significa que el electrón no permanece indefinidamente con su protón original. Después de cierto tiempo, el electrón puede "perforar un túnel" a través de la barrera de potencial para ocupar un orbital atómico alrededor del protón lejano. Poco después, el electrón regresa al protón original. En principio, la situación no es diferente de la inversión de la molécula de amoniaco analizada en la sección 7.2: en efecto, H_2^+ es un oscilador doble, para el cual los estados estacionarios no son funciones de onda concentradas en un solo centro de fuerza, sino que están divididas igualmente entre ellos. El tiempo de tunelaje aumenta con la separación entre protones, y de hecho puede ser muy largo: algo así como 1 s para protones separados por una distancia de 1 nm (una eternidad según los patrones atómicos). Pero el tiempo en sí es intrascendente, ya que aquí se tiene interés en los estados estacionarios que tienen, por así decirlo, "todo el tiempo del mundo" para formarse.

A partir de la simetría de H_2^+, la probabilidad de tunelaje de un protón al otro debe ser la misma en cualquier dirección, por lo que se espera que el electrón pase cantidades iguales de tiempo en la vecindad de cada uno. Se concluye que la onda de estado estacionario es una mezcla igual de funciones de onda semejantes a las atómicas centradas en cada protón como, por ejemplo,

Orbitales moleculares a partir de funciones de onda

$$\psi_+(\mathbf{r}) = \psi_a(\mathbf{r}) + \psi_a(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \tag{11.17}$$

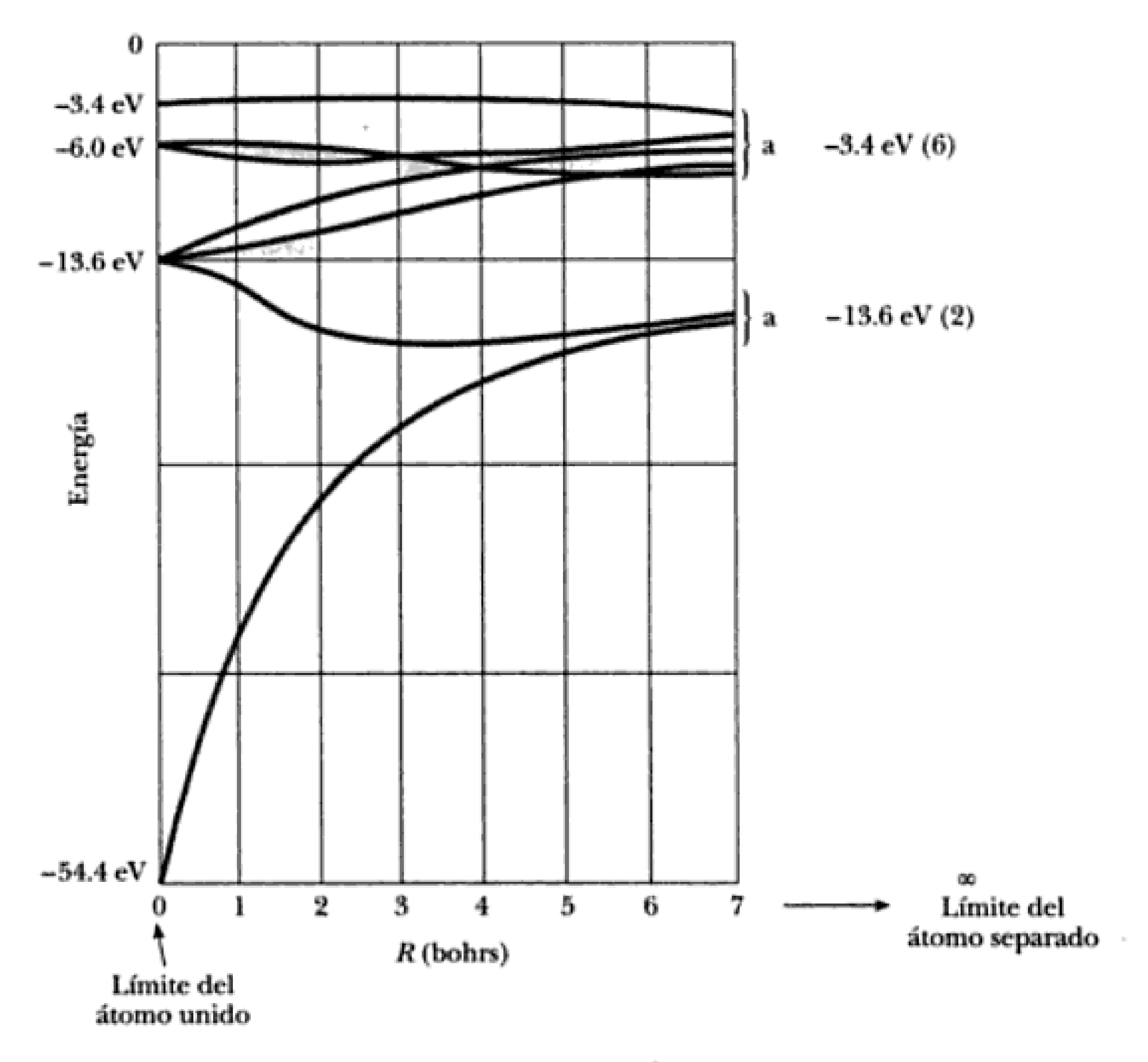


Figura 11.16 Diagrama de correlación para H_2^+, que muestra los dos niveles energéticos electrónicos más bajos como una función de la separación entre los protones, en bohrs. [Recuerde que 1 bohr (a_0) = 0.529 Å.] En $R = 0$, los niveles son los del átomo unido (ion) He^+, y en $R = \infty$ los niveles son los del H neutral. La degeneración de los distintos niveles (excluyendo el espín) se proporciona por los números entre paréntesis.

El subíndice a en el lado derecho de la ecuación 11.17 es una etiqueta colectiva para todos los números cuánticos necesarios para identificar un estado atómico; para el estado base del hidrógeno atómico, a es (1, 0, 0), lo cual significa que $n = 1$, $\ell = 0$ y $m_\ell = 0$. La ecuación 11.17 describe la combinación simétrica de dos funciones de onda atómicas centradas en las posiciones de los protones $\mathbf{r} = 0$ y $\mathbf{r} = \mathbf{R}$. La función de onda y la densidad de probabilidad dadas por $\psi_+(\mathbf{r})$ se muestran en las figuras 11.17a y b; ambas son simétricas alrededor del centro molecular localizado en $\mathbf{r} = \mathbf{R}/2$, o a la mitad de la distancia entre los dos protones.

Sin embargo, también hubiera podido escribirse la forma *antisimétrica*

$$\psi_-(\mathbf{r}) = \psi_a(\mathbf{r}) - \psi_a(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \tag{11.18}$$

Esto conduce de nuevo a una distribución de probabilidad simétrica, pero que tiene un nodo en el centro molecular (figuras. 11.17c y d). De hecho, las ecuaciones 11.17 y 11.18 se aproximan a funciones de onda moleculares cuando R es grande, aunque describen estados que poseen energías diferentes. En particular, ψ_- posee una energía algo mayor que ψ_+, ya que el electrón en el estado antisimétrico está más confinado, siendo relegado en gran medida a la vecindad de un núcleo u otro. Así como una partícula en una caja, este mayor grado de

Si ψ es la verdadera función de onda molecular, esta ecuación proporciona el valor exacto de la energía de la partícula en el estado ψ. Si ψ es una función de onda aproximada, la ecuación 11.19 brinda una aproximación para E.

Al sustituir ψ por la combinación simétrica ψ_+ (normalizada de manera idónea; consulte el apéndice en la Red del capítulo 11, titulado "Integrales de traslape de funciones de onda atómicas") se obtiene una primera aproximación a la energía de los orbitales de enlace en H_2^+. Para el caso en que ψ_a se refiere al estado base del átomo de hidrógeno, puede demostrarse que la energía molecular E_+ es

Orbital de enlace del H_2^+

$$E_+ = -1 - \frac{2}{1+\Delta}\left\{\frac{1}{R} - \frac{1}{R}(1+R)e^{-2R} + (1+R)e^{-R}\right\} \quad (11.20)$$

con la integral de traslape de funciones de onda encontradas en el apéndice en la Red del capítulo 11:

$$\Delta = \left(1 + R + \frac{R^2}{3}\right)e^{-R}$$

Estas expresiones para E_+ y Δ están dadas en unidades atómicas, donde el rydberg (1 Ry $= -13.6$ eV) ha sido adoptado como la unidad de energía para estar de acuerdo con el bohr como unidad de longitud.

En el límite de R grande, $\Delta \to 0$ y E_+ tiende a la energía de un átomo de hidrógeno aislado, $E_a = -1$ Ry, como debe ser. Cuando R decrece, E_+ se vuelve cada vez más negativa, llegando finalmente a -3 Ry en $R = 0$, donde los núcleos se unen. (El valor correcto de -4 Ry para el estado base del He^+ no se reproduce debido a la aproximación inherente en la aplicación de la ecuación 11.17 para la función de onda molecular, que fracasa por completo cuando $R \to 0$.) Debido a que E_+ decrece continuamente con R, la molécula parece inestable y debe colapsarse a $R = 0$ bajo la tendencia de enlace del electrón en órbita. Pero esto ignora la energía de Coulomb de los protones, que debe incluirse para obtener la energía molecular total. Dos protones separados por una distancia R se repelen entre sí con una energía ke^2/R, o $2/R$ Ry. La repulsión de Coulomb de los protones compensa la atracción de enlace del electrón para estabilizar la molécula a una separación en la cual la energía total es mínima. La energía molecular total proporcionada por nuestro modelo se muestra como una función de R en la figura 11.18. El mínimo se presenta en $R_0 = 2.49$ bohrs, o 0.132 nm, y coincide razonablemente bien con la longitud de enlace observada para H_2^+, 0.106 nm.

A la separación en equilibrio de 2.49 bohrs, se encuentra $E_+ = -2.13$ Ry y una energía molecular total de $E_+ + 2/R_0 = -1.13$ Ry. El negativo de esta cantidad, 1.13 Ry o 15.37 eV, representa el trabajo necesario para separar la molécula en sus constituyentes y es la energía de disociación que se introdujo en la sección 1. La energía de disociación medida para H_+ es aproximadamente 16.3 eV. La **energía de enlace,** o el trabajo necesario para separar H_2^+ en H y H^+, es la diferencia entre la energía molecular en $R = \infty$ y el equilibrio. Nuestro modelo predice una energía de enlace de 15.37 eV $-$ 13.6 eV $=$ 1.77 eV, que es algo menor que el valor real de 2.65 eV. La diferencia puede atribuirse al empleo de la ecuación 11.17 para la función de onda molecular, una aproximación que es mejor para grandes valores de R.

A fin de obtener la energía de los orbitales de antienlace para H_2^+, se sustituye ψ en la ecuación 11.19 por la función de onda antisimétrica ψ_- de la

La molécula de hidrógeno

La adición de un electrón más al H_2^+ nos lleva a la molécula de hidrógeno, H_2. El segundo electrón proporciona incluso más "pegamento" para el enlace covalente y debe producir un enlace más fuerte que el que se observa en H_2^+. En efecto, la energía de enlace para el H_2 es 4.5 eV, en comparación con 2.65 eV para H_2^+. (Ingenuamente, hubiera podido esperarse que la energía de enlace se duplicara con el número de electrones, pero éstos se repelen mutuamente: un efecto antienlace.) El segundo electrón también lleva en una longitud de enlace medida para el H_2 igual a 0.074 nm, la cual es evidentemente más corta que el 0.1 nm que se encontró para el ion molecular H_2^+ con un solo enlace.

EJEMPLO 11.3 El enlace molecular del hidrógeno

Calcule la longitud de enlace y la energía de enlace del H_2, suponiendo que cada electrón se mueve independientemente del otro y que es descrito por la función de onda aproximada de la ecuación 11.17.

Solución Si los electrones no interactúan, la energía de cada uno debe ser la energía de enlace E_+ de la ecuación 11.20. Así, la energía total de la molécula en este *modelo de partículas independientes* es

$$E_{\text{total}} = \frac{2}{R} + 2E_+$$

$$= \frac{2}{R} - 2 - \frac{4}{1+\Delta}\left\{\frac{1}{R} - \frac{1}{R}(1+R)e^{-2R} + (1+R)e^{-R}\right\}$$

Al tanteo se descubre que la energía mínima se tiene en aproximadamente $R_0 = 1.44$ bohrs, o 0.076 nm, que se convierte en la energía de enlace predicha por nuestro modelo. La energía molecular a esta separación es $E_0 = -3.315$ Ry. Al comparar esto con la energía total de los átomos de hidrógeno separados, -2 Ry, se obtiene 1.315 Ry, o 17.88 eV para la energía de enlace. Debido a que se ignoró la repulsión entre los electrones, este modelo exagera enormemente la energía de enlace, aunque proporciona la longitud de enlace casi en forma correcta. No obstante, quizá también esta última coincidencia es fortuita, ya que no se espera que la ecuación 11.17 sea precisa incluso para electrones que no interactúan a separaciones nucleares tan pequeñas como 1.5 bohrs.

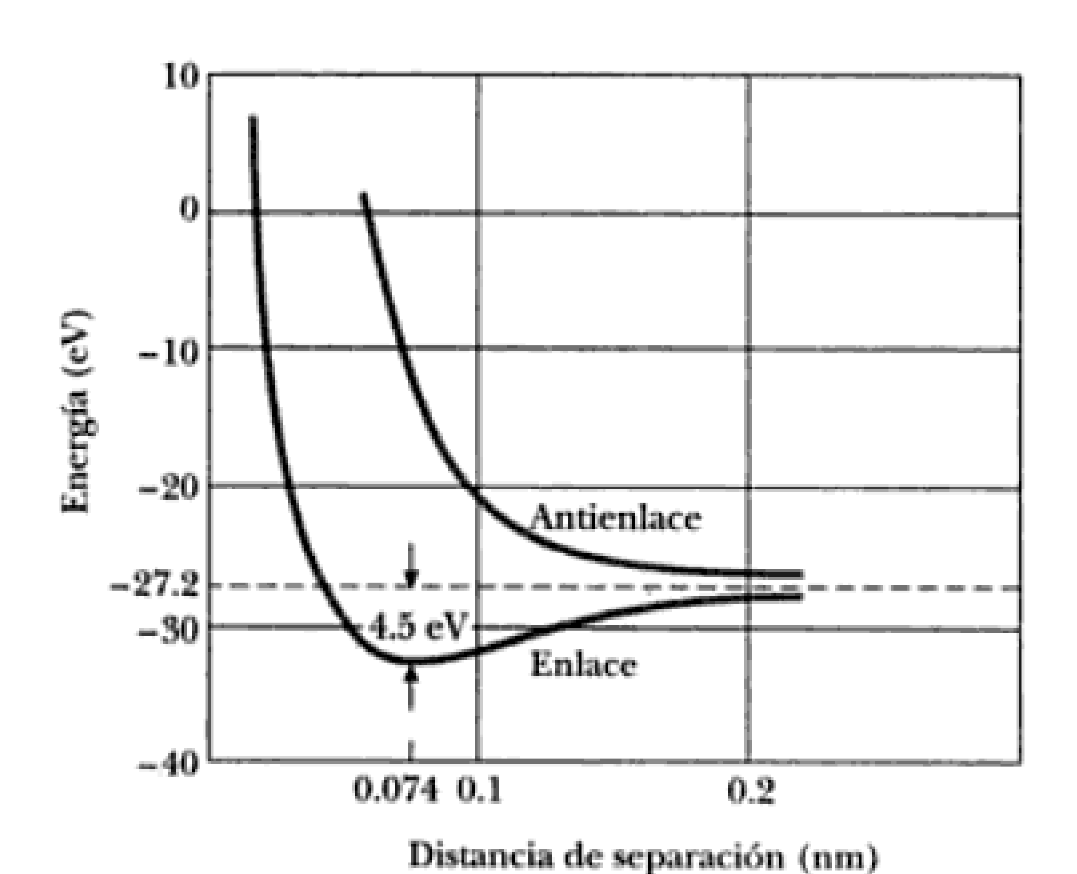


Figura 11.19 Energía molecular total para los orbitales de enlace y antienlace del H_2. Para que ambos electrones estén en el orbital de enlace, sus espines deben estar opuestos. La energía de enlace para el H_2 es 4.5 eV y la longitud de enlace es 0.07 4nm. Debido a que la energía del orbital de antienlace excede la del átomo de H aislado, en este estado no puede formarse ninguna molécula estable.

Hasta el momento no se ha reconocido que los dos electrones en el H_2, al ser fermiones idénticos, estén sujetos al principio de exclusión de Pauli. Si ambos electrones ocupan el orbital de enlace del H_2, como se ha supuesto, *sus espines deben estar opuestos.* Si sus espines fuesen paralelos, un electrón sería llevado hacia el orbital antienlace, donde tendría mayor energía. En la figura 11.19 se muestra la energía electrónica de la molécula para los dos casos. Éstas curvas se obtuvieron a partir de cálculos complejos que explican de manera aproximada el efecto de la repulsión electrón-electrón. Los resultados implican que en el caso de espines paralelos no se forma ninguna molécula estable.

OPCIONAL

11.5 ENLACES EN MOLÉCULAS COMPLEJAS

Los enlaces que se encuentran en H_2 y en H_2^+ se denominan enlaces moleculares **tipo sigma** y se denotan por σ. Son provocados por el traslape de estados atómicos s y se caracterizan por una densidad electrónica que es axialmente simétrica alrededor de la línea que une los dos átomos. Los enlaces entre átomos que tienen más electrones a menudo implican el traslape de estados p u otros orbitales atómicos y llevan a otros tipos de enlaces moleculares con sus propias características distintivas.

Considere la molécula de nitrógeno, N_2, la molécula más simple que presenta enlaces distintos al enlace tipo σ. La configuración electrónica del átomo de nitrógeno es $1s^22s^22p^3$. El enlace molecular en el N_2 se debe principalmente a los tres electrones de valencia en la subcapa $2p$; los electrones interiores s están bastante enlazados a sus átomos originales como para participar en la "compartición" necesaria para la formación de enlaces. La subcapa $2p$ está integrada por tres orbitales atómicos ($m_\ell = 1, 0, -1$), y cada uno de éstos origina un orbital de enlace y de antienlace para la molécula. La molécula de N_2 tiene seis electrones de valencia para acomodar, tres por cada átomo de N. Con dos electrones en cada uno de los tres orbitales de enlace, la molécula de N_2 es especialmente estable, con una energía de enlace de 9.8 eV y una longitud de enlace de 0.11 nm.

De los tres pares orbitales enlace-antienlace en el nitrógeno, no obstante, sólo uno es un enlace sigma. Recuerde que los estados atómicos p son estructuras lobulares con características altamente direccionales. La densidad electrónica en el orbital p_z ($m_\ell = 0$) está concentrada a lo largo del eje z; de forma semejante, los orbitales p_x y p_y están marcados por densidades electrónicas a lo largo de los ejes x y y, respectivamente (figura 8.13). (Los orbitales p_x y p_y no son estados propios de L_z, sino que se forman a partir de los estados $m_\ell = \pm 1$, según la ecuación 8.50 del capítulo 8.) Cuando dos átomos de N se aproximan mutuamente, uno de los tres ejes, por ejemplo el eje z, se convierte en el eje molecular para N_2 a fin de maximizar los traslapes atómicos y producir el enlace más fuerte. Éste es el enlace sigma, ya que tiene simetría axial. Sin embargo, los orbitales p_x también se traslapan para formar un tipo de enlace diferente, el **enlace pi** (π), que tiene un plano de simetría en el plano nodal del orbital p. Lo mismo es válido para los orbitales p_y. La figura 11.20 ilustra los distintos tipos de enlace que se presentan en la molécula de N_2. Los enlaces pi son más débiles que el enlace sigma porque implican menor traslape de electrones.

Enlaces sigma y pi para el N_2

Hasta el momento sólo se han analizado moléculas formadas a partir de átomos semejantes. Estas moléculas *homonucleares* ejemplifican el enlace covalente puro. La unión de dos especies atómicas diferentes para formar una molécula *heteronuclear* produce enlaces covalentes polares. La molécula de fluoruro de hidrógeno, HF, es un buen ejemplo. El átomo de F tiene nueve electrones en la configuración $1s^22s^22p^5$. De los cinco electrones $2p$, cuatro llenan por completo dos de los orbitales $2p$, dejando que un electrón $2p$ sea compartido con el átomo de H (los orbitales llenos son especialmente estables y no afectan en forma significativa el enlace molecular en el HF). Cuando los dos átomos se aproximan entre sí, el orbital $2p$ del F se traslapa

Enlaces en moléculas heteronucleares

cuatro enlaces son equivalentes! No hay dos enlaces $s-p$ y dos enlaces $s-s$, como se habría anticipado, sino cuatro enlaces moleculares estructuralmente idénticos. Estos enlaces surgen del traslape del orbital $1s$ en el H con orbitales atómicos en C formados a partir de *una mezcla* de los orbitales $2s$ y $2p$ del carbono. En CH_4, estos orbitales mezclados, o híbridos, están representados por funciones de onda como

$$\psi = \psi_{2s} + [\psi_{2p}]_x + [\psi_{2p}]_y + [\psi_{2p}]_z \qquad (11.22)$$

Se obtienen otras combinaciones al restar, más que al sumar, las funciones de onda individuales, pero siempre que se mezcla un orbital atómico $2s$ con tres orbitales atómicos $2p$ se obtienen cuatro híbridos sp^3. En otros compuestos de carbono, la hibridización puede implicar sólo uno o dos de los orbitales $2p$; éstos se describen como híbridos sp y sp^2, respectivamente. Es esta complejidad la que origina la gran variedad de materiales orgánicos.

RESUMEN

Dos o más átomos pueden combinarse para formar moléculas debido a una fuerza de atracción neta entre ellos. Los enlaces moleculares resultantes se clasifican de acuerdo con los mecanismos de enlace y son de los tipos siguientes:

1. **Enlaces iónicos.** Ciertas moléculas forman enlaces iónicos debido a la fuerza de atracción de Coulomb entre iones con carga opuesta. Un ejemplo de molécula enlazada iónicamente es el cloruro de sodio (NaCl).
2. **Enlaces covalentes.** El enlace covalente en una molécula se forma por la "compartición" de electrones de valencia de sus átomos constituyentes. Por ejemplo, los dos electrones de la molécula de H_2 se comparten igualmente entre los núcleos.
3. **Enlaces de Van der Waals.** Éste es un enlace electrostático débil entre moléculas o átomos que no forman enlaces iónicos o covalentes. Es responsable de la condensación de los átomos de gases inertes y moléculas no polares en la fase líquida.
4. **Enlaces de hidrógeno.** Este tipo de enlace corresponde a la atracción de dos iones negativos por un átomo de hidrógeno intermedio (un protón).

La energía de una molécula en un gas consta de contribuciones de las interacciones electrónicas, la traslación, rotaciones y vibraciones de la molécula. Los valores permitidos de la energía de rotación de una molécula diatómica están dados por

$$E_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{2I_{\text{CM}}}\ell(\ell + 1) \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots \qquad (11.5)$$

donde I_{CM} es el momento de inercia de la molécula con respecto a su centro de masa y ℓ es un entero denominado **número cuántico rotacional.**

Los valores permitidos de la energía vibracional de una molécula diatómica están dados por

$$E_{\text{vib}} = (v + \tfrac{1}{2})\hbar\omega \qquad v = 0, 1, 2, \ldots \qquad (11.8)$$

donde v es el **número cuántico vibracional.** La cantidad ω es la frecuencia clásica de vibración y está relacionada con μ, la masa reducida de la molécula, y K, la constante de restitución del resorte efectiva que enlaza a la molécula, a través de la relación $\omega = \sqrt{K/\mu}$.

El estado de movimiento interno de una molécula es una combinación de rotación y vibración. Cualquier cambio en la condición molecular es descrita como una transición de un nivel de rotación-vibración a otro. Cuando van acompañadas por la emisión o absorción de fotones, se denominan **transiciones**

12. Para el modelo de una molécula diatómica, descrita en el problema 11, obtenga una expresión para la mínima energía requerida para excitar la molécula haciéndola rotar alrededor de la *línea internuclear*, es decir, alrededor del eje que une las dos masas. Suponga que éstas son esferas uniformes de radio r. Aplique su resultado a la molécula de hidrógeno, H_2, tomando m igual a la masa del protón y r igual al tamaño nuclear, alrededor de 10 fm.

13. El movimiento rotacional de las moléculas afecta la separación en equilibrio de los núcleos, fenómeno denominado *estiramiento del enlace*. Para modelar este efecto, considere una molécula diatómica con masa reducida μ, frecuencia del oscilador ω_0 y separación internuclear R_0 cuando el momento angular es cero. Así, la energía potencial efectiva para valores diferentes de cero de ℓ es (vea la sección 8.5)

$$U_{\text{ef}} = \tfrac{1}{2}\mu\omega_0^2(r - R_0)^2 + \ell(\ell + 1)\frac{\hbar^2}{2\mu r^2}$$

a) Minimice el potencial efectivo $U_{\text{ef}}(r)$, a fin de encontrar una ecuación para la separación en equilibrio de los núcleos, R_ℓ, cuando el momento angular es ℓ. Resuelva esta ecuación aproximadamente, suponiendo $\ell \ll \mu\omega_0 R_0^2/\hbar$. b) Cerca del punto de equilibrio corregido, R_ℓ, el potencial efectivo es de nuevo casi armónico y puede escribirse aproximadamente como

$$U_{\text{ef}} \approx \tfrac{1}{2}\mu\omega^2(r - R_\ell)^2 + U_0$$

Encuentre expresiones para la frecuencia corregida ω del oscilador y la compensación de energía U_0, haciendo corresponder U_{ef} y sus dos primeras derivadas en el punto de equilibrio R_ℓ. Demuestre que el cambio fraccionario en la frecuencia está dado por

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx \frac{3\ell(\ell + 1)\hbar^2}{2\mu^2\omega_0^2 R_0^4}$$

14. Como una alternativa a las interacciones armónicas, el *potencial de Morse*,

$$U(r) = U_0\{1 - e^{-\beta(r - R_0)}\}^2$$

puede usarse para describir las vibraciones de una molécula diatómica. Los parámetros R_0, U_0 y β se escogen para ajustar los datos para un par atómico particular. a) Demuestre que R_0 es la separación en equilibrio y que la energía potencial lejos del equilibrio tiende a U_0. b) Demuestre que cerca del equilibrio ($r \approx R_0$) el potencial de Morse es armónico, con una constante de restitución $K = m\omega^2 = 2U_0\beta^2$. c) Puede demostrarse que la energía mínima de vibración para el potencial de Morse es

$$E_{\text{vib}} = \tfrac{1}{2}\hbar\omega - \frac{(\hbar\omega)^2}{16U_0}$$

A partir de lo anterior, obtenga una expresión para la energía de disociación de la molécula. d) Aplique los resultados de los incisos b) y c) para deducir los parámetros de Morse U_0 y β para la molécula de hidrógeno. Use los valores experimentales 573 N/m y 4.52 eV para la constante efectiva del resorte y la energía de disociación, respectivamente. (El valor medido de R_0 para el H_2 es 0.074 nm).

15. Puede demostrarse que las energías de vibración permitidas para el oscilador de Morse son

$$E_{\text{vib}} = (v + \tfrac{1}{2})\hbar\omega - (v + \tfrac{1}{2})^2\frac{(\hbar\omega)^2}{4U_0}$$

donde $v = 0, 1, \ldots$ A partir de lo anterior obtenga una expresión para el intervalo que separa los niveles consecutivos del oscilador de Morse, y demuestre que este intervalo disminuye de manera continua a energías superiores, como se ilustra en la figura 11.9b. A partir de su resultado, obtenga un límite superior para el número cuántico vibracional v. ¿Cuál es la máxima energía vibracional permitida para el oscilador de Morse?

16. *El espectro del oscilador de Morse.* Use el applet Java disponible en nuestro sitio en la Red (http:info.brookscole.com/mp3e, seleccione QMTools Simulations → Problem 11.16) para visualizar los tres primeros estados vibracionales puros ($\ell = 0$, $v = 0, 1, 2$) de la molécula de H_2 en la aproximación del oscilador de Morse al potencial interatómico. El número de los estados vibracionales de Morse es limitado. Vea si puede encontrar el estado vibracional más alto y el número cuántico vibracional v para este caso?

17. Considere los estados rotacionales más altos del oscilador de Morse descrito en el problema 16. Use el applet Java ahí mencionado para encontrar las energías de los dos niveles rotacionales más bajos ($\ell = 1$ y $\ell = 2$) asociados con el estado base vibracional de la molécula de H_2 en este modelo. Compare sus resultados con los predichos por la ecuación 11.10 para este caso. Las rotaciones y vibraciones de la molécula de H_2, ¿son realmente independientes?

18. Una molécula de H_2 se encuentra en sus estados fundamentales rotacional y vibracional. Absorbe un fotón de longitud de onda 2.2112 μm y salta al nivel energético $v = 1$, $\ell = 1$. Luego, cae al nivel energético $v = 0$, $\ell = 2$, a la vez que emite un fotón de longitud de onda 2.4054 μm. Calcule a) el momento de inercia de la molécula de H_2 alrededor de un eje que pasa por su centro de masa, b) la frecuencia de vibración de la molécula de H_2 y c) la distancia de la separación en equilibrio para esta molécula.

11.4 Compartiendo electrones y el enlace covalente

19. Un modelo unidimensional para la energía electrónica de una molécula homonuclear diatómica lo describen el pozo y la barrera de potencial que se muestran en la figura P11.19. En el caso más simple, el ancho de la barrera se reduce a cero ($w \to 0$) mientras la altura de la barrera crece sin límite ($U \to \infty$), de tal forma que el producto Uw tiende a un valor finito S, denominado intensidad de la barrera. Puede demostrarse que esta barrera, conocida como barrera de función delta, produce una

12
El estado sólido

Contenido del capítulo

La materia en estado sólido ha sido un tema de enorme fascinación desde los albores de la civilización. La gente primitiva se sentía atraída por el estado sólido debido a su belleza, como en las gemas radiantes y simétricas, y debido a su utilidad, como en las herramientas metálicas. Estos dos atributos, *utilidad* y *belleza*, siguen siendo importantes en la física. Las aplicaciones industriales han hecho de la física del estado sólido, o física de la materia condensada, el mayor campo de estudio de la física, como evidencia el gran número de páginas de física en las revistas y la cantidad de científicos dedicados a este campo. La hermosa simetría y regularidad de los sólidos cristalinos permitieron y alentaron el rápido avance en la física de sólidos cristalinos en el siglo XX. Resulta interesante observar que, aunque los avances teóricos se han dado con rapidez con la mayor parte de las disposiciones azarosas (gases) y las disposiciones más regulares (sólidos cristalinos), hasta hace poco se ha logrado mucho menos con los líquidos y sólidos amorfos (irregulares). Aplicaciones como las celdas solares,

los dispositivos de memoria, las guías de onda de fibra óptica y la xerografía han activado el reciente interés en materiales amorfos de bajo costo.

En este capítulo se describe primero la forma en que se combinan las moléculas para formar sólidos cristalinos y amorfos. Luego se presenta uno de los modelos clásicos más simples de conductores, el modelo de electrones libres en un gas, para darnos una idea física de los procesos de conducción eléctrica y térmica. Luego se aborda la teoría cuántica de los metales para explicar las deficiencias del modelo clásico. La teoría de bandas de los sólidos se describe para explicar las diferencias entre aislantes, conductores y semiconductores, y se incluye un breve análisis de las uniones *p-n*, los dispositivos semiconductores y la superconductividad. Finalmente, se analizan los principios generales de los láseres y algunas de las características de los láseres gaseosos y semiconductores.

12.1 ENLACE EN SÓLIDOS

Un sólido cristalino consta de un gran número de átomos dispuestos en forma regular, para formar una estructura periódica. Los esquemas de enlace molecular analizados en el capítulo 11 también son idóneos para describir los mecanismos de enlace en los sólidos. Por ejemplo, los iones en el NaCl cristalino están enlazados iónicamente, mientras que los átomos de carbono en la estructura del diamante forman enlaces covalentes. Otro tipo de mecanismo de unión es el enlace metálico, responsable de la cohesión del cobre, la plata, el sodio y otros metales. Por último, el tipo de enlace más débil, el enlace de Van der Waals, es responsable de la cohesión de sólidos orgánicos y cristales de gases raros. En la sección 11.1 puede consultar un estudio de los mecanismos de enlace moleculares.

Sólidos iónicos

Muchos cristales se forman por enlaces iónicos, donde el efecto dominante es la interacción de Coulomb entre los iones. Considere el NaCl cristalino que se muestra en la figura 12.1, en la cual cada ion Na^+ tiene seis iones Cl^- vecinos

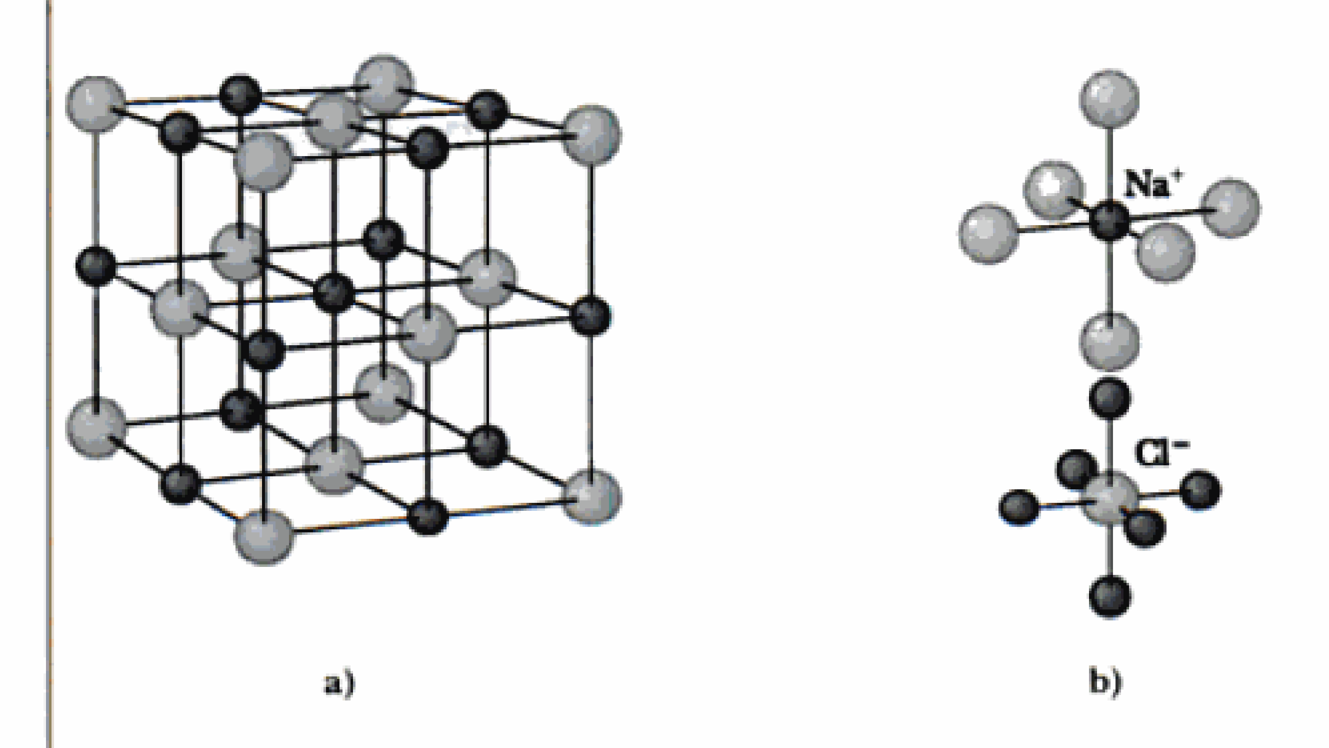


Figura 12.1 a) Estructura cristalina del NaCl. La celda unitaria que se muestra representa cuatro unidades de NaCl y es la unidad repetitiva más pequeña que posee la simetría del cristal. b) En la estructura del NaCl, cada ion positivo de sodio está rodeado por seis iones negativos de cloro, y cada ion de cloro está rodeado por seis iones de sodio.

de equilibrio, donde $r = r_0$. En el problema 1 al final del capítulo usted podrá demostrar que B puede expresarse en términos de r_0 y m y que la energía mínima U_0 es

$$U_0 = -\alpha k \frac{e^2}{r_0}\left(1 - \frac{1}{m}\right) \qquad (12.3)$$

Energía de cohesión atómica

El valor absoluto de U_0, denominado **energía de cohesión iónica** del sólido, es la energía requerida para separar al sólido en un conjunto de iones positivos y negativos separados entre sí por una distancia infinita. La energía de cohesión iónica medida para el NaCl es 7.84 eV por par iónico, o aproximadamente 760 kJ/mol. Al calcular la **energía de cohesión atómica,** que es la energía necesaria para separar al sólido en un conjunto de átomos neutros de Na y Cl separados entre sí por una distancia infinita, es necesario recordar que se ganan 5.14 eV al pasar del Na^+ al Na y que para convertir Cl^- en Cl se requiere suministrar 3.61 eV. Así, la energía de cohesión atómica del NaCl por par atómico puede calcularse como

$$+7.84 \text{ eV} - 5.14 \text{ eV} + 3.61 \text{ eV} = +6.31 \text{ eV}$$

La energía de cohesión atómica es una medida importante de comparación de la dureza de sólidos enlazados de forma distinta. En la tabla 12.1 se enumeran energías de cohesión atómica medidas por par de átomos y puntos de fusión de algunos compuestos iónicos.

Los cristales iónicos poseen las siguientes propiedades generales:

- Forman cristales relativamente estables y duros.
- Son conductores eléctricos deficientes ya que carecen de electrones libres disponibles.
- Tienen puntos de fusión y ebullición bastante altos porque para superar la gran energía de cohesión es necesario agregar una cantidad considerable de energía térmica al cristal.
- Son transparentes a la radiación visible pero absorben intensamente en la región del infrarrojo. Esto se debe a que los electrones forman capas tan fuertemente unidas en sólidos iónicos que la radiación visible no tiene suficiente energía para llevar a los electrones a la siguiente capa permitida por lo que no es absorbida. La intensa absorción en el infrarrojo (en el intervalo de 20 a 150 μm) se debe a que las vibraciones de los iones masivos poseen una baja frecuencia natural y experimentan absorción resonante en la región infrarroja de baja energía.
- Suelen ser bastante solubles en líquidos polares como el agua. La molécula de agua, que tiene un momento dipolar eléctrico permanente, ejerce una fuerza de atracción sobre los iones cargados, que rompe los enlaces iónicos y disuelve el sólido.

Tabla 12.1 Propiedades de algunos cristales iónicos

Cristal	Separación en equilibrio (Å)	Energía de cohesión (atómica (eV por par de átomos)	Punto de fusión (K)
LiF	2.01	8.32	1143
NaCl	2.82	6.31	1074
RbF	2.82	7.10	1068
KCl	3.15	6.48	1043
CsI	3.95	5.36	621

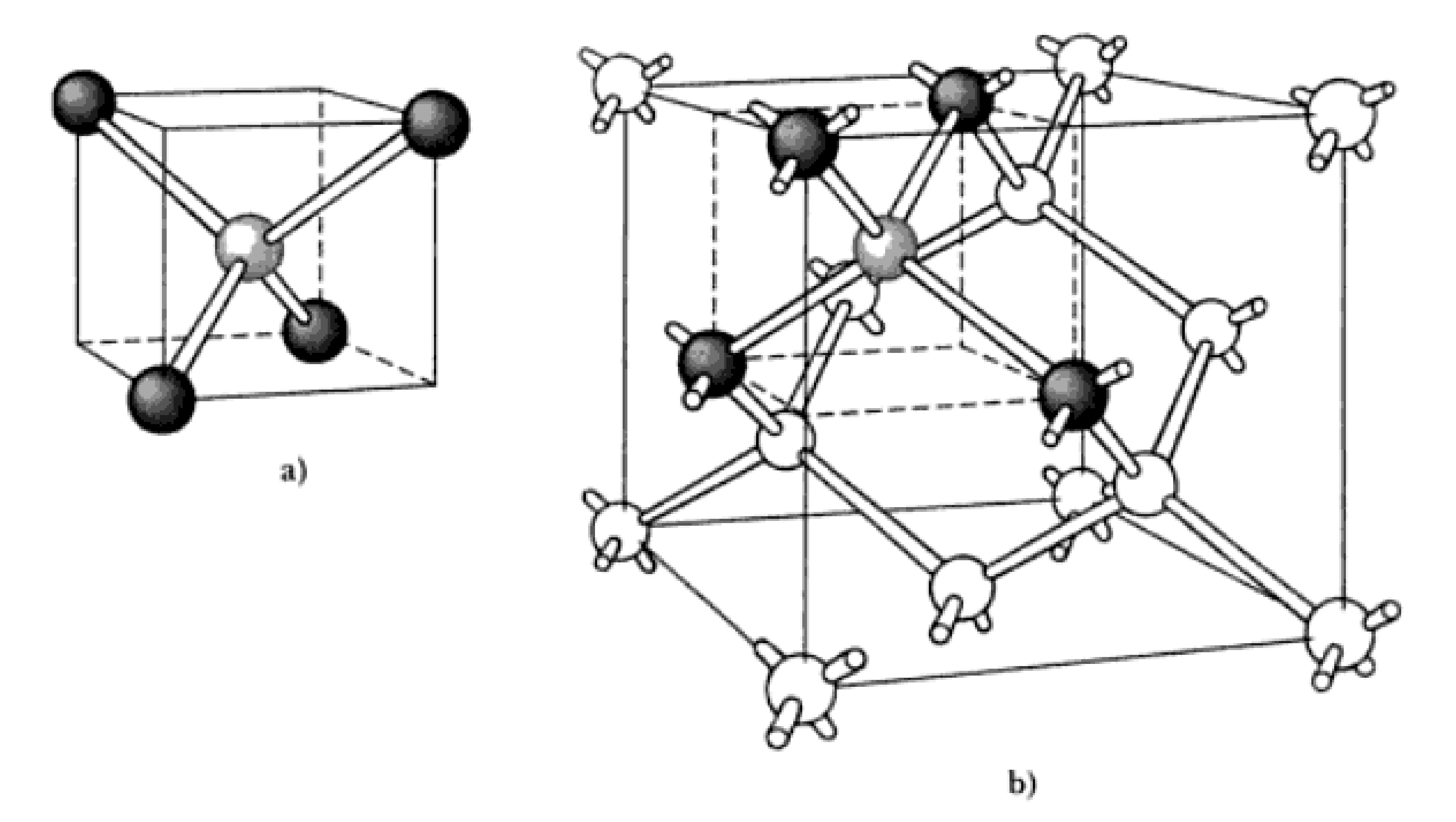


Figura 12.3 a) Cada átomo de carbono en el diamante está enlazado covalentemente con otros cuatro carbonos y los carbonos externos forman un tetraedro. b) Estructura cristalina del diamante que muestra las disposiciones de la unión tetraédrica. (*Según W. Shockley*, Electrons and Holes in Semiconductors, *Nueva York, Van Nostrand, 1950.*)

Sólidos covalentes

Como se encontró en el capítulo 11, el enlace covalente es muy fuerte. El carbono sólido, en la forma de diamante, es un cristal cuyos átomos están enlazados covalentemente. Debido a que la configuración electrónica del carbono atómico es $1s^22s^22p^2$, le faltan cuatro electrones para tener una capa llena ($2p^6$). Por tanto, cada átomo de carbono en el diamante se enlaza covalentemente a otros cuatro átomos de carbono para formar una estructura estable de capa cerrada.

En la estructura del diamante, cada átomo de carbono está enlazado covalentemente con otros cuatro átomos de carbono en los vértices de un cubo, como se ilustra en la figura 12.3a. En la figura 12.3b se muestra la estructura cristalina del diamante. Observe que cada átomo de carbono forma enlaces covalentes con los cuatro átomos vecinos más próximos. La estructura básica del diamante se denomina *tetraédrica* (cada átomo de carbono está en el centro de un tetraedro regular), y el ángulo entre las uniones mide 109.5°. Otros cristales covalentes, como el silicio y el germanio, poseen estructuras semejantes.

En la tabla 12.2 se proporcionan las propiedades de algunos sólidos covalentes. Observe que las energías de cohesión atómicas son mayores que en los sólidos iónicos, lo cual explica la dureza de los sólidos covalentes. El diamante es especialmente duro y su punto de fusión es extremadamente alto (alrede-

Tabla 12.2 Propiedades de algunos cristales covalentes

Cristal	Energía de cohesión atómica (eV/átomo)*	Punto de fusión (K)
C (diamante)	7.37	~4000
SiC	6.15	2870
Si	4.63	1687
Ge	3.85	1211

*Debido a que las energías de cohesión atómica covalentes se proporcionan en electrón-volts por átomo, deben multiplicarse por 2 a fin de poder compararlas correctamente con la tabla 12.1.

dor de 4 000 K). En general, los sólidos enlazados en forma covalente son muy duros, tienen grandes energías de enlace y altos puntos de fusión, y son buenos aislantes, ya que los electrones están estrechamente unidos en enlaces localizados. Debido a que los electrones están tan unidos en el diamante y en otros sólidos covalentes, en la luz visible no hay suficiente energía para llevar los electrones a estados excitados. En consecuencia, muchos sólidos covalentes no absorben la luz visible, por lo que parecen transparentes.

Sólidos metálicos

Los enlaces metálicos suelen ser más débiles que los iónicos o los covalentes. Los electrones de valencia en un metal pueden moverse con relativa libertad a través del material. En un metal hay muchos de estos electrones móviles, por lo general uno o dos electrones por átomo. La estructura metálica puede considerarse como una red (o celosía) de iones positivos rodeados por un "gas" de electrones casi libres (figura 12.4). El mecanismo de enlace en un metal es la fuerza de atracción entre los iones positivos y el gas de electrones.

Los metales poseen una energía de cohesión atómica en el intervalo de 1 a 4 eV, que es menor que las energías de cohesión de sólidos covalentes, aunque suficientemente grande para producir sólidos fuertes (consulte la tabla 12.3). La luz visible interactúa fuertemente con los electrones libres en los metales debido a que estos electrones de conducción pueden desplazarse con gran amplitud en el campo eléctrico oscilante de la onda de luz, absorbiendo la luz y volviéndola a radiar. Por tanto, la luz visible es absorbida y vuelta a emitir bastante cerca de la superficie de un metal, lo que explica tanto la no transparencia a la luz visible como la naturaleza brillante de las superficies metálicas. Además de la alta conductividad eléctrica de los metales debida a los electrones libres, la naturaleza no direccional del enlace metálico permite la disolución en cantidades variables de muchos tipos distintos de átomos metálicos en un metal anfitrión. Las soluciones sólidas resultantes, o **aleaciones,** pueden designarse en términos de sus propiedades particulares, como alta resistencia, baja densidad, ductilidad, resistencia a la corrosión, etcétera.

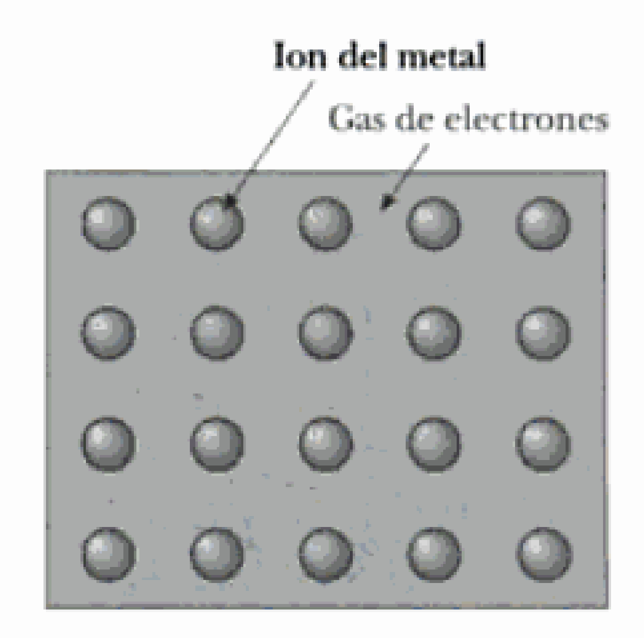


Figura 12.4 Modelo de los electrones libres de un metal. El gas de electrones negativos actúa como una suerte de pegamento que mantiene unidos entre sí a los iones positivos del metal.

Cristales moleculares

Un cuarto tipo de enlace puede ocurrir incluso cuando no hay electrones disponibles que participen en la formación de enlaces, como en el caso de las moléculas orgánicas saturadas (CH_4) y los átomos de gases inertes con capas electrónicas cerradas. Las débiles fuerzas eléctricas que operan en este tipo de enlace incluyen las **fuerzas de Van der Waals** y surgen debido a la fuerza de atracción entre

Tabla 12.3 Propiedades de algunos cristales metálicos

Cristal	Energía de cohesión atómica (eV/átomo)*	Punto de fusión (K)
Fe	4.28	2082
Cu	3.49	1631
Au	3.81	1338
Ag	2.95	1235
Pb	2.04	874
Zn	1.35	693

*Debido a que las energías de cohesión atómica covalentes se proporcionan en electrón-volts por átomo, deben multiplicarse por 2 a fin de poder compararlas correctamente las con la tabla 12.1.

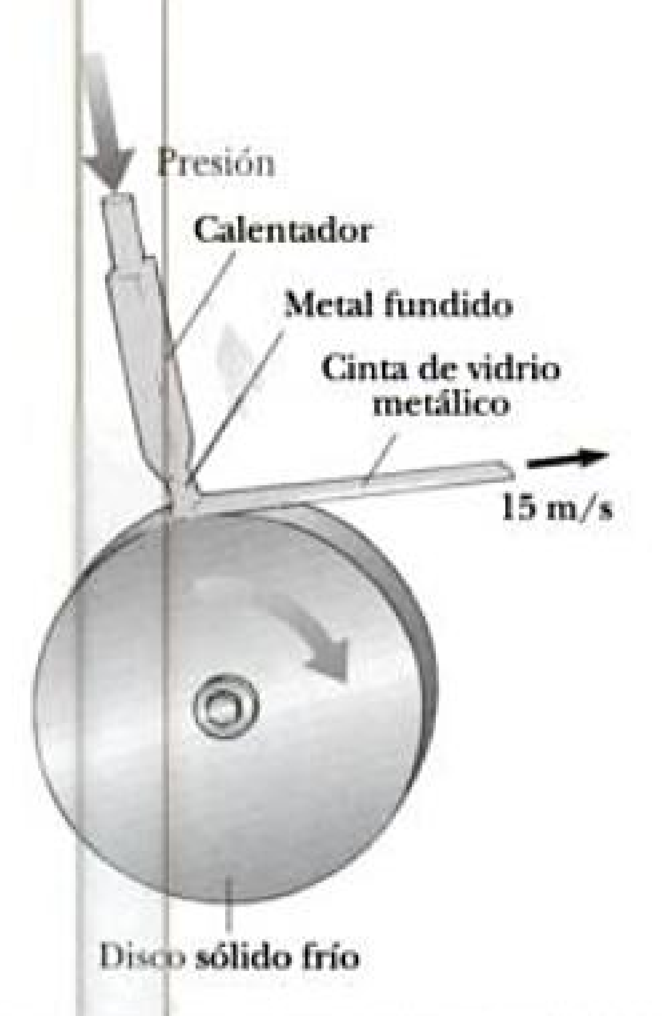


Figura 12.6 Preparación de una cinta de metal amorfo por fundición en un carrete giratorio.

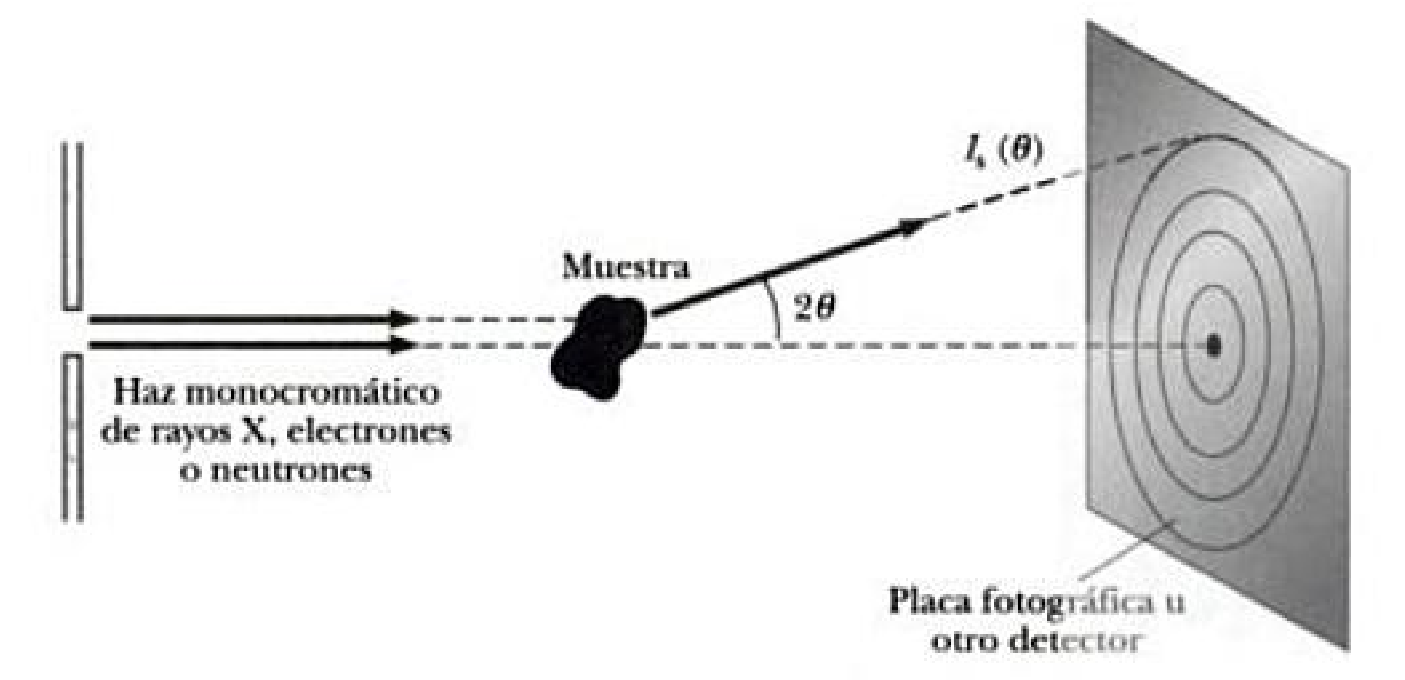
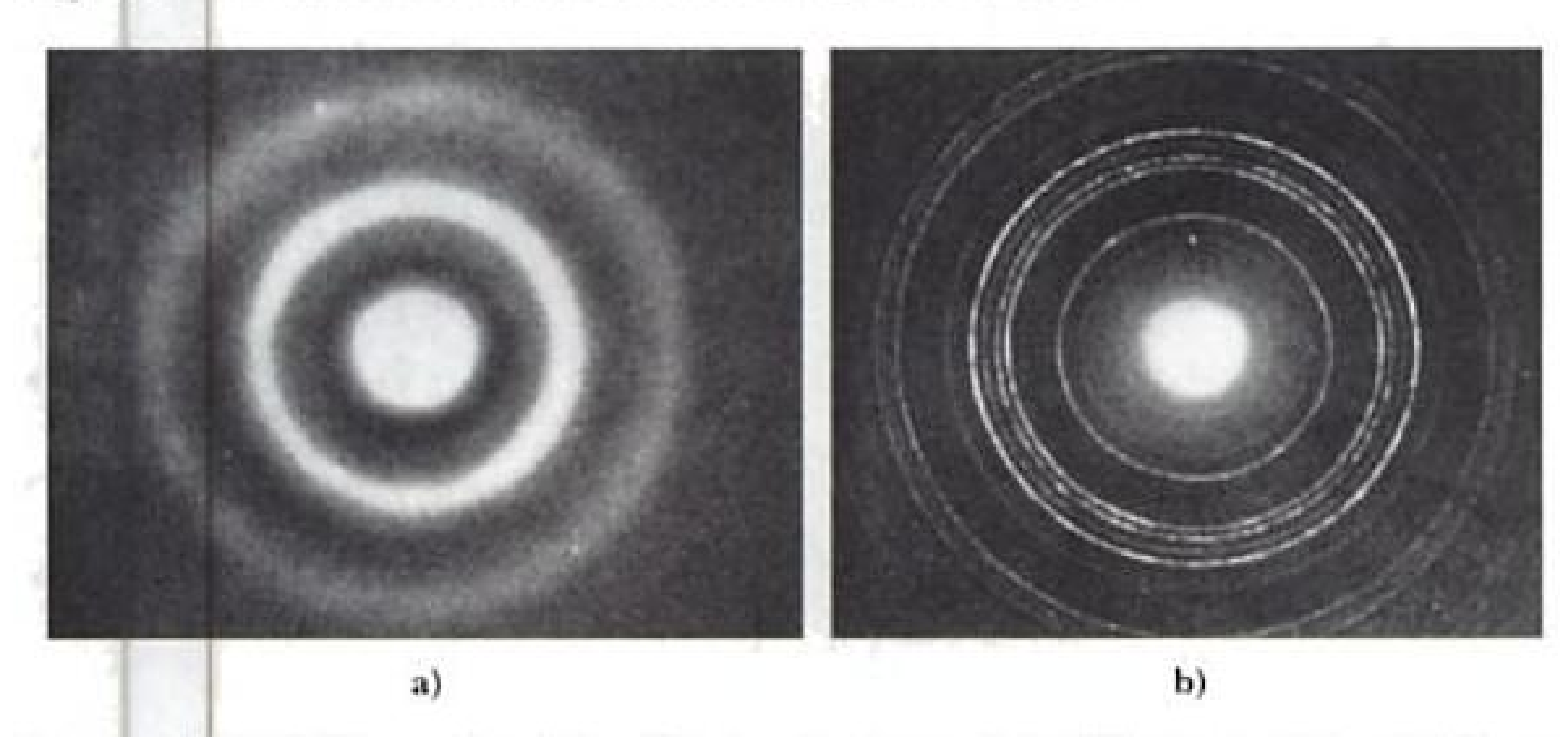


Figura 12.7 Disposición experimental básica para determinar la distribución de los átomos en una muestra de talco. Los anillos de intensidad constante sobre la placa fotográfica se deben a los delgados cristales, orientados aleatoriamente que constituyen el talco. (*Según R. Zallen*, The Physics of Amorphous Solids, *Nueva York, John Wiley and Sons, 1983.*)

de enlace para los vecinos más próximos son prácticamente los mismos en todo el sólido. Incluso es posible hacer que los metales se solidifiquen en una forma amorfa (denominada **vidrio metálico**) si el metal en el estado líquido puede enfriarse 1 000 K en alrededor de un milisegundo. En la figura 12.6 se ilustra una técnica inteligente para lograr velocidades de enfriamiento de 10^6 K/s, denominada **fundición por rotación.**

La difracción de rayos X, la difracción de electrones y la difracción de neutrones son las técnicas experimentales más importantes para determinar la distribución de átomos en sólidos cristalinos y amorfos. Los principales datos experimentales son las mediciones de la intensidad dispersada $I_s(\theta)$, como se muestra en la figura 12.7. En la figura 12.8 se muestran registros fotográficos reales de la intensidad dispersada de electrones debida a muestras de hierro amorfas y cristalinas. Observe que la separación regular de átomos sobre muchas separaciones atómicas en la muestra cristalina conduce a muchas líneas de difracción nítidas. Esto contrasta con una muestra de vidrio metálico, donde la distribución de separaciones atómicas y ángulos de enlace sobre una o dos separaciones atómicas lleva a menos líneas más difusas.



a) b)

Figura 12.8 Patrones de difracción de electrones de a) hierro amorfo y b) hierro cristalino. (*De T. Ichikawa*, Phys. Status, Solidi A, *19:707, 1973.*)

Tabla 12.4 Ejemplos de aplicaciones tecnológicas de sólidos amorfos

Tipo	Material	Uso
Óxido de vidrio	$(SiO_2)_{0.8}(Na_2O)_{0.2}$	Vidrio transparente para ventanas
Óxido de vidrio	$(SiO_2)_{0.9}(GeO_2)_{0.1}$	Fibras ópticas ultra transparentes
Polímeros orgánicos	Poliestireno	Plásticos resistentes de baja densidad
Vidrio chalcogénido	Se, As_2Se_3	Películas fotoconductoras utilizadas para xerografía
Silicio amorfo	$Si_{0.9}H_{0.1}$	Celdas solares
Vidrio metálico	$Fe_{0.8}B_{0.2}$	Cintas ferromagnéticas de baja pérdida utilizadas como núcleos en las transformadores

las funciones de distribución radial para las fases cristalina y de vidrio están superpuestas en un fondo equivalente a la función de distribución radial del gas, $\rho_{\text{gas}}(r) = Ar^2$, donde A es una constante. Las funciones de distribución radial tanto para el cristal como para el vidrio tienden a la función de distribución radial del gas para valores grandes de r porque la distribución de átomos se vuelve efectivamente continua a grandes distancias y se suaviza a un valor medio de $\overline{n}$ átomos por unidad de volumen, como en la fase gaseosa. Debido a que el volumen de una capa esférica es $4\pi r^2\, dr$, el número de átomos entre r y $r + dr$ en la fase gaseosa está dado por $\rho_{\text{gas}}(r)\,dr = \overline{n}(4\pi r^2\, dr)$. Así, $\rho_{\text{gas}}(r) = Ar^2$, donde $A = 4\pi\overline{n}$.

En la figura 12.10 se muestran las funciones de distribución radial reales para germanio cristalino y amorfo obtenidas a partir de la medición de la difracción de rayos X. Observe que la función de distribución radial amorfa se suavisa después de aproximadamente cuatro oscilaciones, lo que indica sólo un orden de corto alcance. No obstante, la función de distribución radial cristalina varía de manera pronunciada al cabo de 14 oscilaciones. Además, observe que los picos de la función de distribución radial cristalina no son tan pronunciados, como sería de esperar, sino que se ensanchan debido a las vibraciones térmicas y de punto cero de los átomos con respecto a sus posiciones en la red.

Los sólidos amorfos poseen muchas propiedades físicas útiles e interesantes, como su extremadamente alta transparencia óptica, resistencia y baja densidad. Quizá sea conveniente que consulte la obra de Zallen (citada en la bibliografía sugerida al final de este capítulo) para conocer más acerca de los sólidos amorfos. Ahora concluiremos esta breve introducción con la tabla 12.4, donde se enumeran algunas de las aplicaciones tecnológicas de los sólidos amorfos.

12.2 MODELO CLÁSICO DE LOS ELECTRONES LIBRES PARA LOS METALES

Poco después del descubrimiento del electrón realizado por Thomson, Drude y Thomson propusieron la teoría de los electrones libres para los metales. Según esta teoría, las propiedades físicas de un metal pueden explicarse modelando al metal como un gas clásico con electrones de conducción que se desplazan a través de una red fija de núcleos de iones positivos. Thomson, Drude y Lorenz usaron con bastante éxito esta representación de un "fluido" de electrones altamente móvil para explicar las altas conductividades térmica y eléctrica de los

Tabla 12.5 Conductividad térmica, *K*, y conductividad eléctrica, σ, de sustancias selectas a temperatura ambiente

Sustancia	K en $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\text{K}^{-1}$	σ en $(\Omega\cdot\text{m})^{-1}$
Plata	427	62×10^6
Cobre	390	59×10^6
Oro	314	41×10^6
Aluminio	210	35×10^6
Hierro	63	10×10^6
Acero	50	1.4×10^6
Nicromio	14	0.9×10^6
Cuarzo	13	
NaCl	7.0	$<10^{-4}$

metales, mostradas en la tabla 12.5. En particular, el modelo predice la forma funcional correcta de la ley de Ohm y la extraordinariamente sencilla relación empírica entre las conductividades eléctrica y térmica de un metal, denominada relación de Wiedemann-Franz.[2] Sin embargo, el modelo no predice con precisión los valores experimentales de las conductividades eléctrica y térmica cuando en los cálculos se utilizan recorridos libres medios clásicos de los electrones. De hecho, se verá que los defectos del modelo clásico pueden remediarse con sólo tomar en cuenta la naturaleza ondulatoria del electrón. Esto implica sustituir la raíz cuadrática media de la velocidad de Maxwell-Boltzmann de los electrones por la velocidad de Fermi (consulte la sección 10.5), así como reemplazar el camino libre medio clásico de los electrones por el mucho más largo camino libre medio cuántico, que puede ser igual a cientos o miles de veces la distancia interatómica. Estos largos caminos libres medios se deben a que el electrón es una onda y, como tal, es capaz de pasar libremente a través de una red casi perfecta, dispersándose sólo cuando encuentra átomos de impurezas u otras desviaciones con respecto a la regularidad cristalina.

Ley de Ohm

Esta ley fue establecida por primera vez como un resultado experimental aplicable a una amplia variedad de metales y semiconductores. Establece que la densidad de corriente en un material es directamente proporcional al campo eléctrico aplicado. Es decir,

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \tag{12.4}$$

donde $\mathbf{J}$ es la densidad de corriente (A/m^2), σ es la conductividad eléctrica del material (Ω^{-1} m^{-1}) y $\mathbf{E}$ es el campo eléctrico (V/m). En vez de considerar la ecuación 12.4 sólo como una relación de proporcionalidad entre el campo aplicado y la corriente resultante, es más instructivo entenderla como una definición de σ. Interpretada de esta forma, la ecuación 12.4 indica que una simple constante, σ, que depende del material y de la temperatura *pero no del campo o*

[2]La relación de Wiedemann-Franz establece que la razón de la conductividad térmica a la conductividad eléctrica para los metales es proporcional a la temperatura y que el valor de la constante de proporcionalidad es independiente del metal considerado.

voltaje aplicado, caracteriza por completo a la conducción eléctrica en un sólido óhmico.

La ley de Ohm puede deducirse si se considera que un conductor consta de un gas de partículas clásicas (electrones de conducción) que se mueven a través de un fondo de iones pesados inmóviles. Los electrones en un metal se mueven al azar siguiendo trayectorias rectilíneas, que son interrumpidas constantemente por colisiones con iones en la red (consulte la figura 12.11a). La raíz cuadrática media de la velocidad a temperatura ambiente es bastante alta ($\sim 10^5$ m/s) y puede calcularse a partir del teorema de equipartición clásico:

$$\frac{1}{2} m_e \overline{v^2} = \frac{3}{2} k_B T$$

o bien,

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \left(\frac{3k_B T}{m_e}\right)^{1/2} \qquad (12.5)$$

Cada paso del movimiento (el recorrido entre colisiones) que se muestra en la figura 12.11a es un "camino libre"; el camino libre promedio, o el **camino libre medio,** L, está relacionado con el **tiempo libre medio,** τ, el tiempo medio entre colisiones, y con v_{rms} por

$$L = v_{rms}\tau \qquad (12.6)$$

En el modelo original de Drude se consideraba que L medía varios angstroms, lo cual era consistente con la idea de que un electrón suele recorrer una separación interatómica antes de chocar contra un gran ion.

Cuando se aplica un campo eléctrico a la muestra, se ejerce una fuerza eléctrica sobre un eletrón durante cada intervalo entre colisiones, lo que resulta en un desplazamiento pequeño en comparación con el camino libre medio. El efecto acumulativo de estos desplazamientos puede considerarse en términos de una pequeña **velocidad de deriva** promedio, v_d, superpuesta sobre la velocidad térmica aleatoria alta, como se muestra en la figura 12.11b.

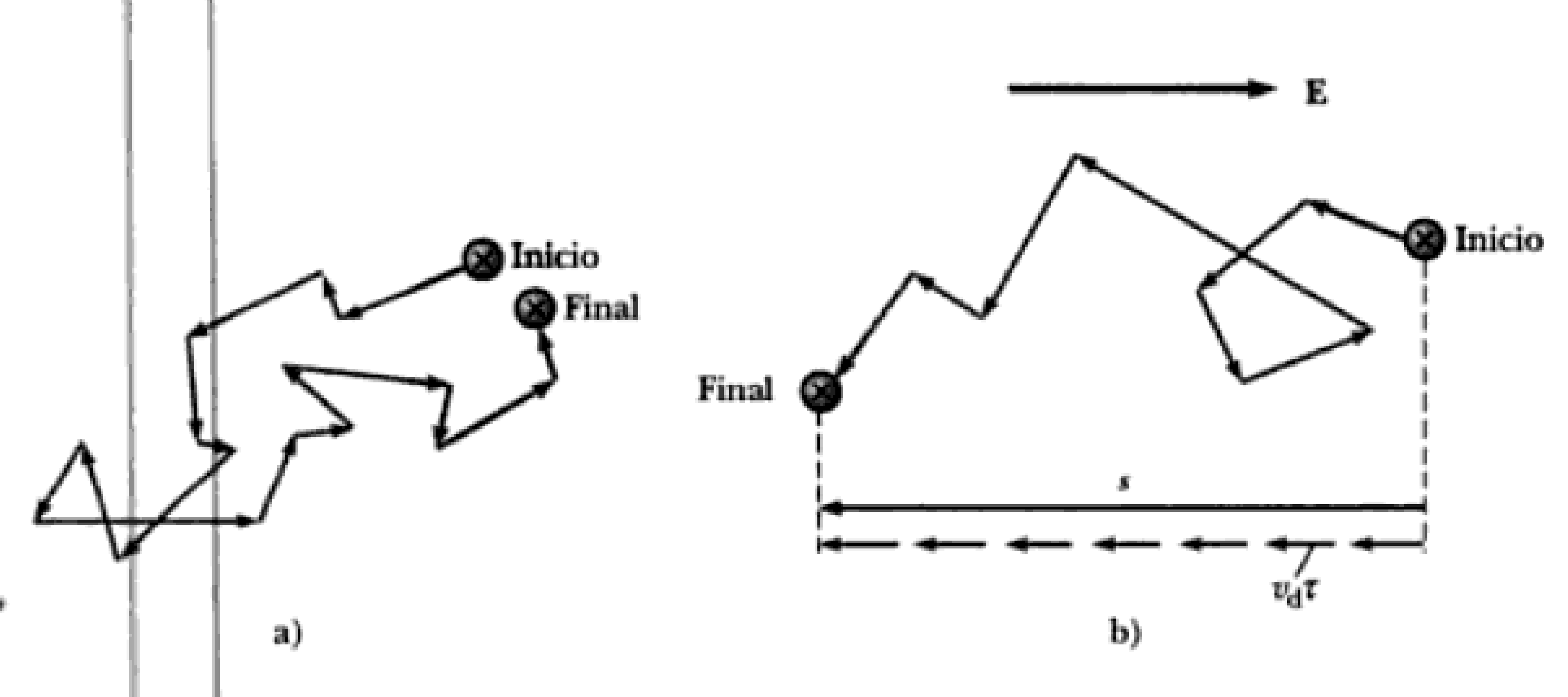


Figura 12.11 a) Desplazamientos aleatorios consecutivos de un electrón en un metal sin un campo eléctrico aplicado. b) Combinación de desplazamientos aleatorios y desplazamientos producidos por un campo eléctrico externo. El efecto neto del campo eléctrico es sumar entre sí múltiples desplazamientos de longitud $v_d\tau$ opuestos a la dirección del campo. Para efectos de ilustración, en la figura se ha exagerado bastante el tamaño de v_d en comparación con v_{rms}.

Para encontrar la magnitud de la densidad de corriente, J, cuando todos los n electrones por unidad de volumen se mueven a la velocidad v_d, se observa que en un tiempo dt éstos recorren una distancia $v_d dt$, de modo que $nAv_d dt$ electrones cruzan un área A perpendicular a la dirección del flujo de electrones (figura 12.12). Como cada electrón tiene una carga e, la carga que cruza el área A en el tiempo dt es $neAv_d dt$, y la densidad de corriente es

$$J = \frac{neAv_d\,dt}{Adt} = nev_d \tag{12.11}$$

Al sustituir $v_d = eE\tau/m_e$ en la ecuación 12.11 se obtiene

$$J = nev_d = \frac{ne^2\tau}{m_e}E \tag{12.12}$$

La proporcionalidad de J con E, dada por la ecuación 12.12, muestra que el modelo clásico de electrones libres predice la dependencia observada de la ley de Ohm de J con respecto a E. Para este caso, la conductividad, *que es independiente de E*, es

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m_e} \tag{12.13}$$

o bien, utilizando $\tau = L/v_{rms}$,

$$\sigma = \frac{ne^2L}{m_e v_{rms}} \tag{12.14}$$

Al sustituir la velocidad térmica rms de Maxwell-Boltzmann en la ecuación 12.14 se obtiene

$$\sigma = \frac{ne^2L}{(3k_BTm_e)^{1/2}} \tag{12.15}$$

Para efectos de comparación con los cálculos en que se utiliza la ecuación 12.15, en la tabla 12.6 se enumeran valores medidos de σ para varios metales. Debido a que la resistividad, ρ, es el inverso de la conductividad, la ecuación 12.15 también puede escribirse como

$$\rho = \frac{(3k_BTm_e)^{1/2}}{ne^2L} \tag{12.16}$$

Expresiones clásicas para calcular la conductividad y la resistividad

Tabla 12.6 Conductividad eléctrica de metales a 300 K

Sustancia	σ medida en $(\Omega\cdot m)^{-1}$
Cobre	59×10^6
Aluminio	35×10^6
Sodio	22×10^6
Hierro	10×10^6
Mercurio	1.0×10^6

EJEMPLO 12.1 Modelo clásico de electrones libres de la conductividad en sólidos

a) Demuestre que la velocidad térmica rms de los electrones a 300 K es varios órdenes de magnitud superior a la velocidad de deriva, v_d. Para encontrar v_d, suponga que un alambre de cobre cuya sección transversal mide 2 mm × 2 mm conduce una corriente de 10 A, y que cada átomo del cobre contribuye con 1 electrón libre. La densidad del cobre a temperatura ambiente es 8.96 g/cm³. b) Calcule τ, el tiempo promedio entre colisiones para cobre a temperatura ambiente, suponiendo que el camino libre medio es la distancia interatómica, 2.6 Å. c) Calcule la conductividad del cobre a temperatura ambiente como prueba de la teoría clásica de los electrones libres para los gases, y compare este resultado con el valor medido proporcionado en la tabla 12.6.

Solución a) Por la ecuación 12.5,

$$\begin{aligned} v_{\rm rms} &= \left(\frac{3k_B T}{m_e}\right)^{1/2} \\ &= \left[\frac{3(1.38 \times 10^{-23}\ \mathrm{J/K})(300\ \mathrm{K})}{9.11 \times 10^{-31}\mathrm{kg}}\right]^{1/2} \\ &= 1.17 \times 10^5\ \mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Para calcular v_d se usa $J = nev_d$, o bien, $v_d = J/ne$. El número de electrones libres (de conducción) por centímetro cúbico, n, en el cobre es

$$\begin{aligned} n &= \left(\frac{1\ \text{electrón libre}}{\text{átomo}}\right)\left(\frac{6.02 \times 10^{23}\ \text{átomos}}{\text{mol}}\right) \\ &\quad \times \left(\frac{8.96\ \mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right)\left(\frac{1\ \mathrm{mol}}{63.5\ \mathrm{g}}\right) \\ &= 8.49 \times 10^{22}\ \text{electrones/cm}^3 \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} v_d &= \frac{J}{ne} = \frac{(10\ \mathrm{A})/(4 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2)}{(8.49 \times 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3})(1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C})} \\ &= 1.8 \times 10^{-4}\ \mathrm{m/s} \end{aligned}$$

La razón de la velocidad de deriva a la velocidad rms es

$$\frac{v_d}{v_{\rm rms}} = 1.5 \times 10^{-9}$$

b) Usando la ecuación 12.6, se encuentra que el tiempo promedio entre colisiones es

$$\tau = \frac{L}{v_{\rm rms}} = \frac{2.6 \times 10^{-10}\ \mathrm{m}}{1.2 \times 10^5\ \mathrm{m/s}} = 2.2 \times 10^{-15}\ \mathrm{m/s}$$

Así, ¡en este modelo los electrones experimentan varios cientos de miles de colisiones por segundo!

c) Al usar la ecuación 12.15 para T = 300 K, se obtiene

$$\sigma = \frac{ne^2 L}{(3k_B T m_e)^{1/2}} = 5.3 \times 10^6\ (\Omega\cdot\mathrm{m})^{-1}$$

Con base en la tabla 12.6, ¡se observa que este valor de la conductividad es alrededor de 10 veces menor que el valor medido!

Aunque el modelo clásico de electrones en un gas predice la ley de Ohm, por el ejemplo 12.1 se observa que los valores de la conductividad resultantes difieren de los valores medidos por un orden de magnitud. Peor aún, se encuentra que la *resistividad medida* de casi todos los metales es proporcional a la temperatura absoluta (consulte la figura 12.13), aunque el modelo clásico de electrones en un gas pronostica una dependencia mucho menor de ρ con respecto a T. De la ecuación 12.16 se observa que el modelo clásico predice incorrectamente que la resistividad debe ser proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta. En la sección 12.3 se proporcionará un modelo distinto de dispersión electrónica, que explica la dependencia lineal observada de ρ con respecto a T a altas temperaturas.

Teoría clásica de los electrones libres de la conducción del calor

La conductividad térmica de una sustancia, K, se define de manera semejante a la conductividad eléctrica, σ. En el caso de la conductividad eléctrica, se encuentra que la densidad de corriente es igual a la conductividad multiplicada por el gradiente de voltaje, o bien,

$$J = -\sigma \frac{\Delta V}{\Delta x} \tag{12.17}$$

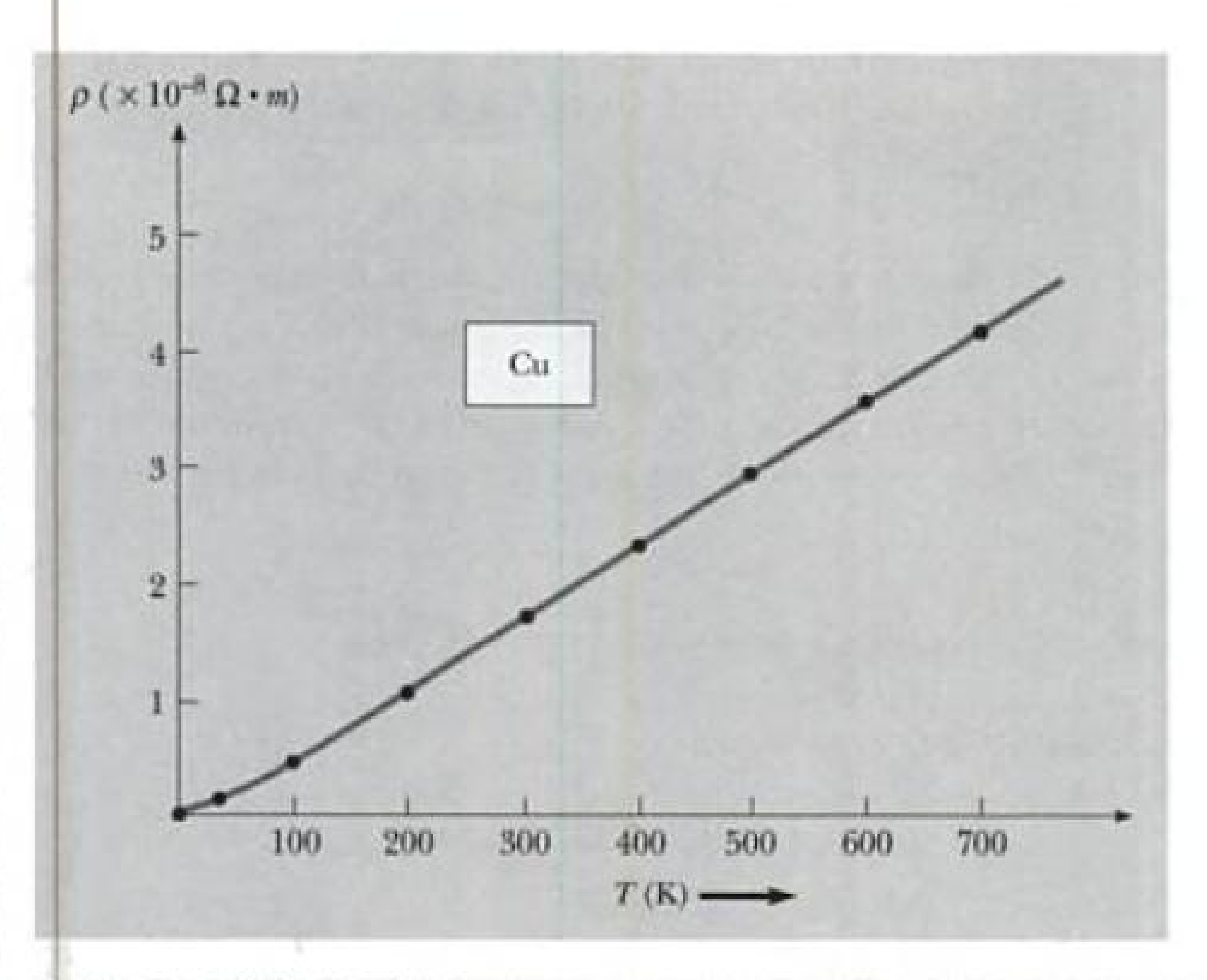


Figura 12.13 Resistividad del cobre puro como una función de la temperatura.

De manera semejante, ahora se tiene que la densidad de corriente térmica (W/m^2) es igual a la conductividad térmica multiplicada por el gradiente de temperatura, o bien,

$$\frac{\Delta Q}{A\ \Delta t} = -K\ \frac{\Delta T}{\Delta x} \tag{12.18}$$

Aquí, ΔQ es la energía térmica conducida a través de una sección transversal de área A en un tiempo Δt entre dos planos con un gradiente de temperatura igual a $\Delta T/\Delta x$. Debido a que los buenos conductores eléctricos también son buenos conductores de energía térmica, resulta natural suponer que el altamente móvil gas de electrones es responsable del transporte de carga, así como de la energía térmica a través del metal vía procesos de colisiones aleatorias. Un triunfo extraordinario del modelo clásico de electrones libres fue demostrar que si los electrones libres fuesen responsables de la conducción tanto eléctrica como térmica en los metales, entonces la razón K/σ debería ser una constante universal, *la misma para todos los metales,* y *dependiente sólo de la temperatura absoluta.* Debido a que esta conexión tan simple entre K y σ ya había sido observada experimentalmente (la ley de Wiedemann-Franz), esta predicción confirmó que el movimiento del gas de electrones era básicamente responsable tanto de la conductividad eléctrica como de la conductividad térmica.

Debido a que la ley de Wiedemann-Franz es un resultado muy sencillo, amerita una consideración más detallada. La teoría cinética de los gases puede aplicarse al gas de electrones libres para calcular el flujo de la energía térmica (W/m^2) transportada por los electrones que se mueven de una región a temperatura $T + \Delta T$ hacia una región que está a una temperatura T más baja.[3] Usando este resultado, de inmediato se encuentra que la conductividad térmica,

[3]Consulte la obra de C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics,* 6a. edición, Nueva York, John Wiley and Sons, 1996, capítulo 5.

Tabla 12.7 Números de Lorentz experimentales $K/\sigma T$ en unidades de 10^{-8} W · Ω/K²*

Metal	273 K	373 K
Ag	2.31	2.37
Au	2.35	2.40
Cd	2.42	2.43
Cu	2.23	2.33
Ir	2.49	2.49
Mo	2.61	2.79
Pb	2.47	2.56
Pt	2.51	2.60
Sn	2.52	2.49
W	3.04	3.20
Zn	2.31	2.33

*De C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 2a. edición, Nueva York, John Wiley and Sons, Inc., 1965.

K, depende simplemente de la capacidad calorífica por unidad de volumen C_v, v_{rms}, y del camino libre medio, L, de los electrones, como sigue:

$$K = \tfrac{1}{3}C_v v_{\text{rms}} L \tag{12.19}$$

Si se supone que los electrones se comportan como un gas ideal clásico y cumplen la estadística de Maxwell-Boltzmann, se encuentra que la capacidad calorífica *por mol* es $3R/2$ o $3N_A k_B/2$, donde N_A es el número de Avogadro. Para convertir esto en capacidad calorífica por unidad de volumen a fin de utilizar la ecuación 12.19, es necesario multiplicar la razón de la densidad electrónica. Así,

$$C_v = (\tfrac{3}{2}N_A k_B)\left(\frac{n}{N_A}\right) = \tfrac{3}{2}k_B n$$

y la ecuación 12.19 se convierte en

$$K = \frac{k_B n v_{\text{rms}} L}{2} \tag{12.20}$$

Si simplemente se utiliza la distancia interatómica para L en la ecuación 12.20, se obtienen valores incorrectos, como en el caso de la conductividad eléctrica. No obstante, si se calcula la razón de K a σ, se evita el problema de tener que asignar valores a n y a L, ya que estas cantidades se cancelan. Así,

$$\frac{K}{\sigma} = \frac{k_B n v_{\text{rms}} L/2}{ne^2 L/m_e v_{\text{rms}}} = \frac{k_B (v_{\text{rms}})^2 m_e}{2e^2}$$

Al sustituir $v_{\text{rms}}^2 = 3k_B T/m_e$ en esta expresión se obtiene el resultado clásico deseado, conocido como **ley de Wiedemann-Franz:**

Ley de Wiedemann-Franz

$$\frac{K}{\sigma} = \frac{3k_B^2}{2e^2}\,T \tag{12.21}$$

La ecuación 12.21 muestra que la razón K/σ para cualquier metal es proporcional a T y que sólo depende de las constantes universales k_B y e. Este resultado coincide con la **ley empírica de Wiedemann y Franz** (1853) que establece que $K/\sigma T$ tiene el mismo valor para todos los metales. La razón $K/\sigma T$ se denomina **número de Lorentz,** y según la teoría clásica, tiene el mismo valor, $3k_B^2/2e^2 = 1.1 \times 10^{-8}$ W · Ω/K², *para cualquier metal a cualquier temperatura.* En la tabla 12.7 se muestra que, en efecto, la razón $K/\sigma T$ es casi constante de un metal a otro y con variación de temperatura, pero que el valor de $3k_B^2/2e^2$ no coincide precisamente con los números de Lorentz medidos. De manera global, no obstante, la coincidencia de la teoría clásica simple con los resultados experimentales es aceptable y se considera una evidencia sólida de que el gas de electrones libres explica tanto la conductividad eléctrica como la conductividad térmica en los metales.

12.3 TEORÍA CUÁNTICA DE LOS METALES

Aunque el modelo clásico del gas de electrones describe ampliamente las propiedades eléctricas y térmicas de los metales, en las predicciones de este modelo hay deficiencias importantes: en los valores numéricos de K y σ, en la dependencia de σ con respecto a la temperatura, y en el predecir una capacidad calorífica en exceso para los metales (vea la sección 10.5). Estas deficiencias pueden rectificarse sustituyendo la distribución de Maxwell-Boltzmann por la

Camino libre medio cuántico de los electrones

Las propiedades ondulatorias del electrón generan cambios en el valor clásico del camino libre medio de los electrones. Considere, nuevamente, la muestra de cobre que constituye nuestro ejemplo. Si en $\sigma = ne^2L/m_ev_{rms}$ sólo se utilizan la distancia interatómica entre los átomos de cobre como el camino libre medio L de los electrones y v_F por v_{rms}, se encuentra un valor aproximadamente 200 veces *menor* para σ que el valor medido de la conductividad. Esta discrepancia implica que se está utilizando el valor equivocado para L y que los sitios de dispersión de los electrones no son núcleos de iones adyacentes sino centros de dispersión más separados. Estos centros de dispersión constan de desviaciones respecto a la perfecta regularidad de la red, como desplazamientos térmicos de iones con respecto a los puntos de equilibrio en la red, dislocaciones y átomos de impurezas. Debido a que los cálculos cuánticos de L que incluyen estos efectos son complicados, se hará una estimación aproximada de L para el cobre a temperatura ambiente utilizando el valor medido de σ. Al despejar L de $\sigma = ne^2L/m_ev_F$ obtenemos

$$L = \frac{m_e v_F \sigma}{ne^2} \tag{12.27}$$

Si se utiliza una energía de Fermi de 7.05 eV para el cobre (consulte la tabla 10.1) se obtiene

$$v_F = \left(\frac{2E_F}{m_e}\right)^{1/2} = \left(\frac{(2)(7.05 \times 1.6 \times 10^{-19}\,\text{J})}{9.11 \times 10^{-31}\,\text{kg}}\right)^{1/2} = 1.57 \times 10^6\,\text{m/s}$$

Al sustituir este valor en la ecuación 12.27 resulta

$$L = \frac{(9.11 \times 10^{-31}\,\text{kg})(1.57 \times 10^6\,\text{m/s})(5.9 \times 10^7\,\Omega^{-1}\,\text{m}^{-1})}{(8.49 \times 10^{28}\,\text{electrones/m}^3)(1.60 \times 10^{-19}\,\text{C})^2}$$
$$= 3.9 \times 10^{-8}\,\text{m} = 390\,\text{Å}$$

Esto es alrededor de 150 veces la distancia entre átomos de cobre. Si se usa $\tau = L/v_F$, también es posible calcular el tiempo libre medio entre colisiones electrónicas en el cobre a temperatura ambiente:

$$\tau = \frac{3.90 \times 10^{-8}\,\text{m}}{1.57 \times 10^6\,\text{m/s}} = 2.50 \times 10^{-14}\,\text{s}$$

El inesperadamente largo camino libre medio de los electrones puede explicarse si se toma en cuenta la naturaleza ondulatoria del electrón. Los cálculos mecánico cuánticos muestran que las ondas electrónicas con un amplio intervalo de energías pueden pasar a través de una red *perfecta* de núcleos de iones sin dispersarse, sin resistencia y con un camino libre medio infinito. La resistencia real de un metal se debe a los desplazamientos térmicos aleatorios (vibraciones térmicas) de los iones alrededor de los puntos de la red y otras desviaciones con respecto a una red perfecta, como átomos de impurezas y defectos que dispersan las ondas electrónicas. La falta de dispersión electrónica por una red perfecta puede entenderse si se observa que la onda de electrones suele desplazarse a través del metal sin atenuar, justo como lo hace la luz a través de un cristal transparente. Las reflexiones intensas de electrones sólo se presentan para energías electrónicas específicas, y cuando esto ocurre, la onda que describe al electrón no es capaz de desplazarse libremente a través del cristal. Como se verá en la siguiente sección, estas reflexiones intensas ocurren cuando la separación en la red es igual a un número entero de longitudes de ondas electrónicas, lo cual da por resultado un conjunto discreto de bandas de energía prohibidas para los electrones.

Causas de la resistencia en un metal

Desde un punto de vista clásico, la proporcionalidad observada entre la resistividad y la temperatura absoluta a alta temperatura es resultado de la dispersión de los electrones por iones de la red, donde la amplitud es más grande mientras más alta es la temperatura. En el enfoque cuántico, como se vio en el capítulo 10, las vibraciones de la red poseen una energía cuantizada $\hbar\omega$, donde ω es la frecuencia angular de vibración del ion de la red. Estas vibraciones cuantizadas se denominan **fonones,** y para efectos de cálculo, los iones oscilando en la red se sustituyen por fonones. El número de fonones con energía $\hbar\omega$ disponibles a una temperatura dada T se denota por n_p y es proporcional a la función de distribución de Bose-Einstein:

$$n_\text{p} \propto \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_\text{B}T} - 1} \tag{10.33}$$

A temperaturas altas, $k_\text{B}T$ es mucho mayor que $\hbar\omega$, y lo anterior se convierte en

$$n_\text{p} \propto \frac{k_\text{B}T}{\hbar\omega}$$

Así, el número de fonones disponibles para dispersar electrones es directamente proporcional a T. Por último, ya que el número de dispersadores de electrones es proporcional a la temperatura, también lo es la resistividad, ρ.

Además de la parte de la resistividad que depende de la temperatura la temperatura, también hay una contribución a la resistividad del metal independiente de la temperatura, que se manifiesta con claridad para temperaturas menores a aproximadamente 10 K. Esta resistividad residual ρ_i, que queda cuando $T \rightarrow 0$, es producida por ondas electrónicas que son dispersadas por impurezas e imperfecciones estructurales en una muestra dada (consulte la figura 12.15). La naturaleza paralela de las curvas que se muestran en la figura 12.15 implica que la resistividad debida al movimiento térmico de la red, ρ_L, es independiente de la concentración de impurezas y que ρ_i es independiente de la temperatura. Este resultado se formaliza en un resultado denominado **regla de Matthiessen,** que establece que la resistividad de un metal puede escribirse en la forma

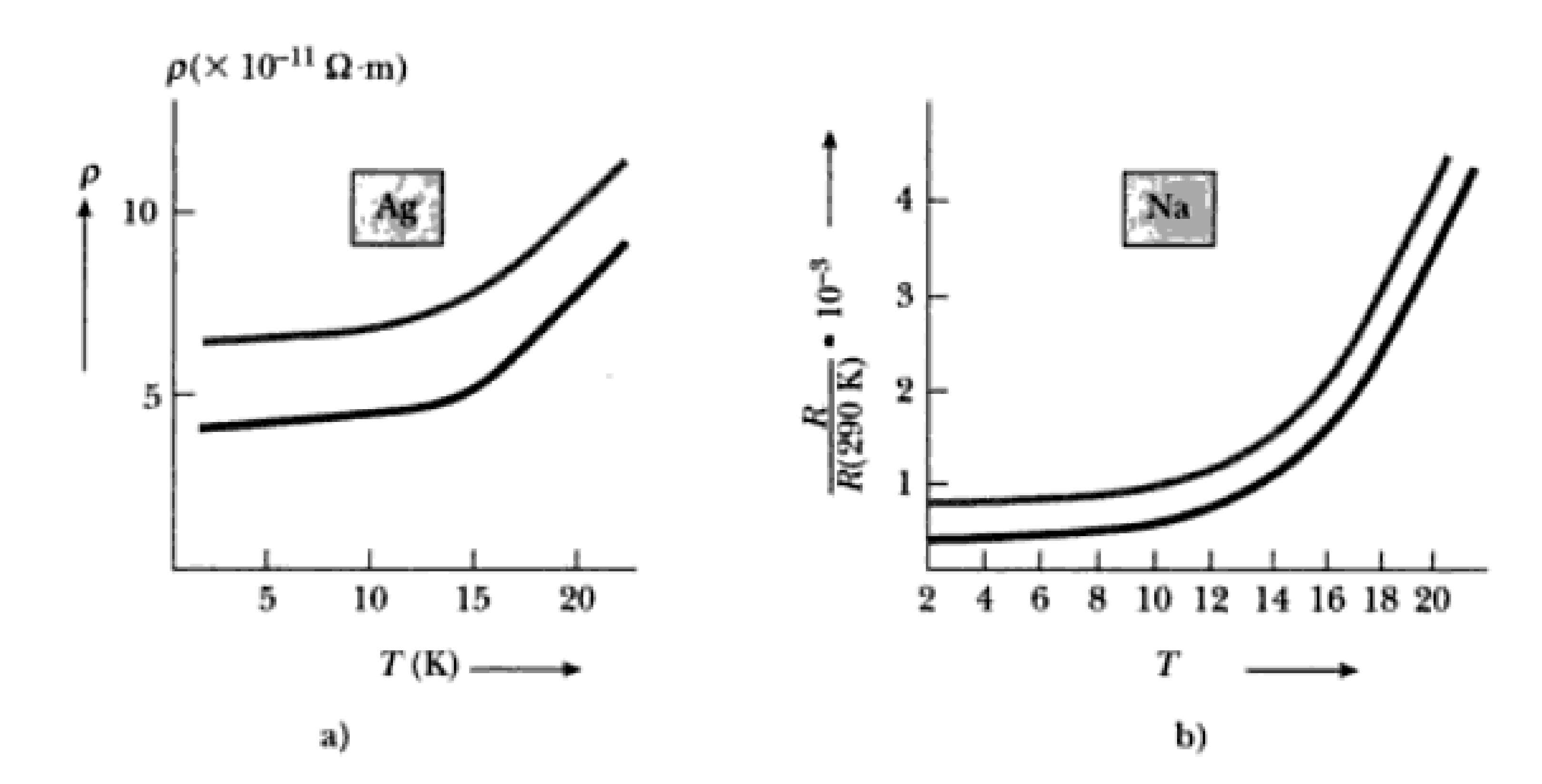


Figura 12.15 a) Resistividad de la plata a baja temperatura. La curva en color gris representa una muestra de plata con una concentración superior de átomos de impurezas. (*De W. J. de Haas, G. J. van den Berg, J. de Boer,* Physica, *2:453, 1935.*) b) Resistencia del sodio como una función de la temperatura. La curva en color gris representa una muestra de sodio con una concentración superior de imperfecciones. (*De D. K. C. MacDonald y K. Mendelsshon,* Proc. Roy. Soc. (Londres), *A202:103, 1950.*)

$$\rho = \rho_i + \rho_L \qquad (12.28)$$

donde ρ_i sólo depende de la concentración de imperfecciones del cristal y ρ_L sólo depende de T.

12.4 TEORÍA DE BANDAS DE LOS SÓLIDOS

En las secciones 12.2 y 12.3 se analizaron los modelos clásico y cuántico de los metales, estableciendo la hipótesis simplificadora de que el metal consta de un gas de electrones libres. Debido a que los buenos aislantes poseen una resistividad enorme en comparación con los metales (un factor mayor de 10^{24}), sus configuraciones electrónicas deben ser bastante distintas. De hecho, la mayor parte de los electrones de la capa externa no son libres, sino que están implicados en enlaces iónicos o covalentes, como ya se analizó. Además, para comprender mejor aún las propiedades electrónicas de los sólidos, es necesario considerar el efecto de los iones de la red.

En el caso general, hay dos métodos para la determinación de las energías electrónicas en un sólido. Uno consiste en seguir el comportamiento de los niveles energéticos de átomos aislados a medida que éstos se aproximan cada vez más para formar un sólido, y el otro consiste en demostrar que cuando la ecuación de Schrödinger se resuelve para electrones sujetos a un potencial periódico que representa a los iones de la red surgen bandas de energía. Aquí se seguirá primero el método del átomo aislado, ya que es más simple y conduce de inmediato a una explicación de las diferencias entre conductores, aislantes y semiconductores. Más tarde en esta sección se considerará de manera explícita el efecto de un potencial periódico sobre las ondas electrónicas, a fin de demostrar desde otro punto de vista cómo surgen las bandas de energía.

Aproximación del átomo aislado aplicado a la teoría de bandas

Si dos átomos idénticos están bastante alejados entre sí, no interactúan, y sus niveles energéticos electrónicos pueden considerarse como si fuesen de átomos aislados. Suponga que los dos átomos son de sodio, y que cada uno posee un electrón externo 3*s* con una energía específica. A medida que los dos átomos de sodio se aproximan mutuamente, sus funciones de onda se traslapan, y los dos niveles energéticos degenerados 3*s* aislados se separan en dos niveles distintos, como se muestra en la figura 12.16a. Esta separación puede entenderse si se consideran las funciones de onda electrónicas idóneas para el caso de átomos bastante separados entre sí y el caso de átomos vecinos. (Para un tratamiento más completo y cuidadoso de esta separación, consulte el análisis del enlace covalente en la sección 11.4.) En la figura 12.17 se muestran las funciones de onda idealizadas de átomo aislado ψ_1 y ψ_2, así como las combinaciones lineales $\psi_1 + \psi_2$ y $\psi_1 - \psi_2$ que representan funciones de onda electrónicas aproximadas para los dos átomos próximos entre sí. Observe que un electrón en el estado $\psi_1 + \psi_2$ tiene una alta probabilidad de encontrarse a la mitad del camino entre los núcleos de iones, mientras que en el estado $\psi_1 - \psi_2$ la densidad de probabilidad se desaparece en el punto medio. Debido a que el electrón pasa parte de su tiempo a la mitad de la distancia entre los dos núcleos de iones atractivos en el estado $\psi_1 + \psi_2$, el electrón está enlazado con más fuerza (tiene menos energía) en el estado $\psi_1 + \psi_2$ que en el estado $\psi_1 - \psi_2$. Esto lleva a los dos niveles energéticos 3*s* distintos que se muestran en la figura 12.16a.[5]

[5]El ancho ΔE de la banda de energía depende de la cantidad de traslape de la distribución de carga entre átomos adyacentes y, por tanto, de la separación interatómica, r_0.

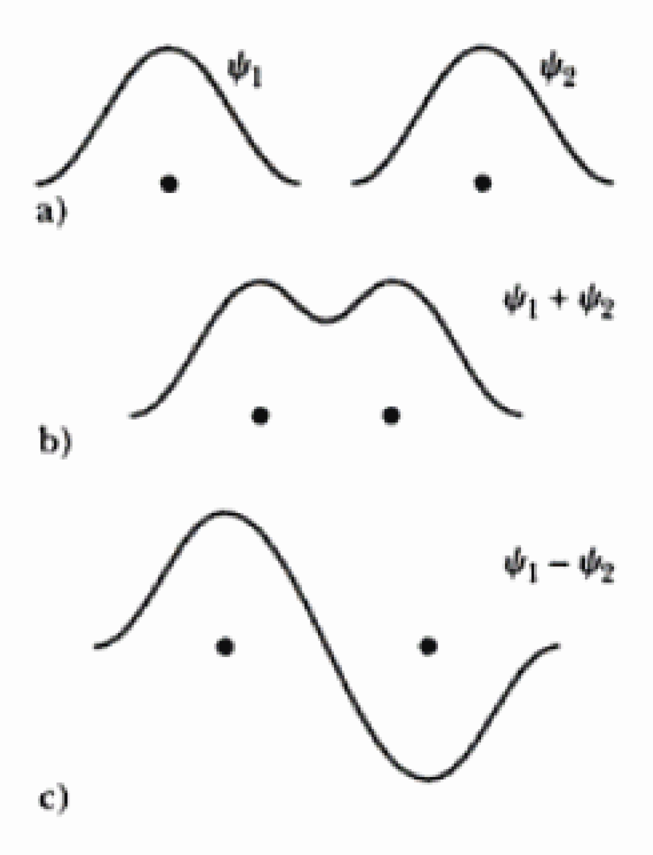


Figura 12.17 Funciones de onda idealizadas del sodio en varias etapas de combinación. a) Funciones de onda de electrones unidos a dos núcleos de iones a gran distancia. b) Una combinación lineal idónea de funciones de onda para electrones unidos a núcleos de iones a una distancia pequeña es $\psi_1 + \psi_2$. c) La otra combinación lineal es $\psi_1 - \psi_2$.

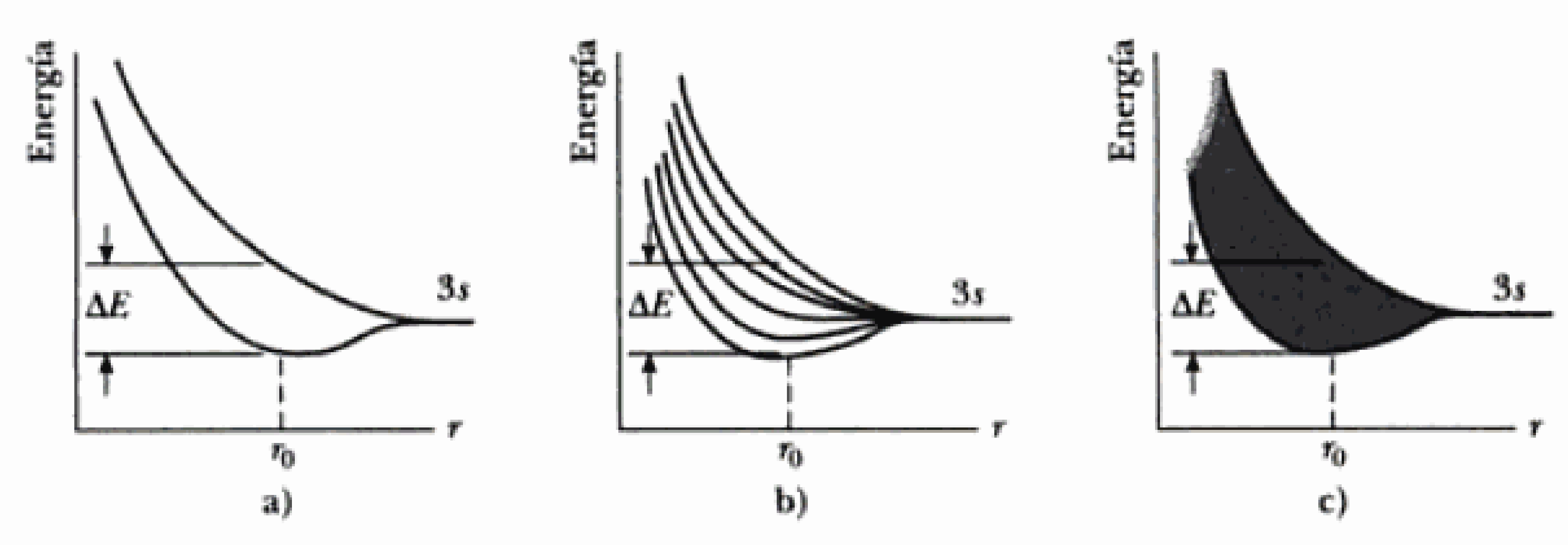


Figura 12.16 a) Separación de los niveles 3*s* cuando dos átomos de sodio se aproximan entre sí. b) Separación cuando seis átomos de sodio se aproximan entre sí. c) Formación de una banda 3*s* cuando un gran número de átomos de sodio se ensamblan para formar un sólido. Observe que r_0 es la constante de la red.

Cuando un gran número de átomos se aproximan entre sí para formar un sólido, ocurre un fenómeno semejante. Cuando esto ocurre, los diferentes niveles energéticos del átomo aislado comienzan a separarse. Dicha separación se muestra en la figura 12.16b para seis átomos muy próximos entre sí. En este caso hay seis niveles energéticos correspondientes a seis combinaciones lineales distintas de funciones de onda del átomo aislado. El ancho de una banda de energía (designado por ΔE en la figura 12.16) sólo depende del número de átomos suficientemente próximos para interactuar con fuerza, que siempre es un número pequeño. Si se considera el número total de átomos en un sólido ($N \approx 10^{23}$ átomos/cm^3), se encuentra un número muy grande de niveles (determinados por N) separados por el ancho ΔE, de modo que éstos pueden considerarse como una **banda continua** de niveles energéticos (consulte la figura 12.16c). En el caso del sodio, es común referirse a la distribución continua de niveles energéticos permitidos como la **banda 3*s*,** porque se origina a partir de los niveles 3*s* de átomos de sodio individuales. En general, un sólido cristalino posee numerosas bandas de energía permitidas, donde cada una surge de cada nivel energético atómico. En la figura 12.18 se muestran las bandas de energía permitidas del sodio. Observe que las separaciones de energía, o bandas de energía prohibidas, separan las bandas de energía permitidas. Las regiones de energía prohibidas surgen de la separación entre distintos niveles atómicos y siempre están presentes, a menos que los niveles atómicos individuales se ensanchen tanto que se traslapen, como ocurre con las bandas 3*s* y 3*p* del sodio.

Si el sólido contiene N átomos, cada banda de energía tiene N niveles energéticos. Las bandas 1*s*, 2*s* y 2*p* del sodio están llenas, todas, de electrones, como indican las áreas sombreadas de gris oscuro en la figura 12.18. Un nivel cuyo momento angular orbital es ℓ puede contener $2(2\ell + 1)$ electrones. El factor de 2 se debe a las dos orientaciones posibles del espín del electrón, mientras el factor $2\ell + 1$ corresponde al número de orientaciones posibles del momento angular orbital. La capacidad de cada banda para un sistema de N átomos es $2(2\ell + 1)N$ electrones. Por tanto, las bandas 1*s* y 2*s* contienen, cada una, $2N$ electrones ($\ell = 0$), mientras la banda 2*p* contiene $6N$ electrones ($\ell = 1$). Debido a que el sodio sólo tiene un electrón 3*s* y en el sólido hay un total de N átomos, la banda 3*s* sólo contiene N electrones y está semillena. La banda 3*p*, que está por arriba de la banda 3*s*, está completamente vacía.

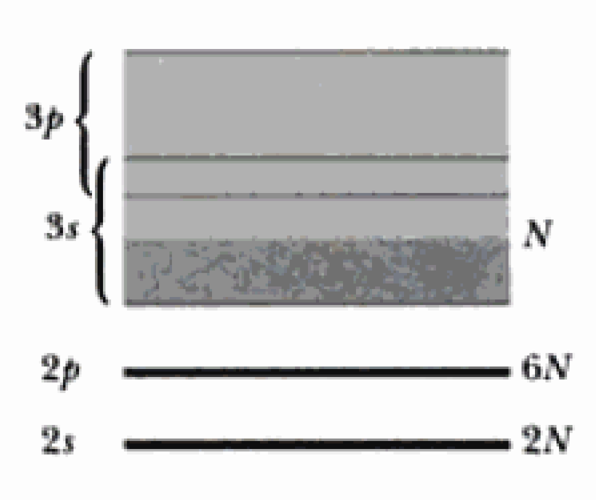




Figura 12.18 En esta figura, las bandas de energía del sodio se muestran sombreadas de gris. El sólido contiene N átomos. Observe las separaciones de energía entre bandas permitidas y que las bandas 3*s* y 3*p* se traslapan en el sodio. El número de electrones en cada banda de energía se indica a la derecha de la banda.

Conducción en metales, aislantes y semiconductores

La enorme variación en la conductividad eléctrica de los metales, aislantes y semiconductores puede explicarse cualitativamente en términos de bandas de energía. Se verá que la posición y la ocupación electrónica de la banda más alta

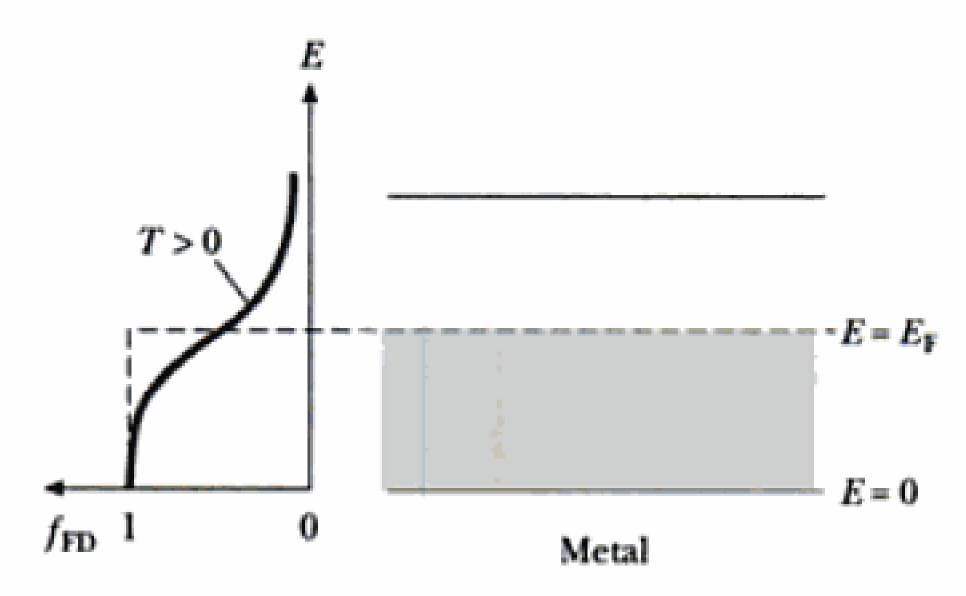


Figura 12.19 Banda semillena de un conductor como la banda 3*s* del sodio. A $T = 0$ K, la energía de Fermi se encuentra a mitad de la banda. La probabilidad de Fermi-Dirac de que un estado energético E esté ocupado a $T > 0$ K se muestra a la izquierda.

o, cuando mucho, de las dos bandas superiores determinan la conductividad de un sólido.

Metales. La conducción eléctrica en los metales puede comprenderse al considerar la banda semillena 3*s* del sodio. En la figura 12.19 se muestra esta típica banda metálica semillena a $T = 0$ K, donde la región sombreada representa los niveles que están llenos con electrones. Debido a que los electrones satisfacen la estadística de Fermi-Dirac, todos los niveles por debajo de la energía de Fermi, E_F, están llenos con electrones, mientras que todos los niveles por arriba de E_F están vacíos. En el caso del sodio, la energía de Fermi está en el centro de la banda. A temperaturas superiores a 0 K, algunos electrones se excitan térmicamente y pasan a niveles por arriba de E_F (como se muestra por la distribución de Fermi-Dirac a la izquierda de la figura 12.19), pero globalmente hay poco cambio con respecto al caso 0 K. **Si se aplica un campo eléctrico al metal, los electrones con energías próximas a la energía de Fermi pueden ganar gracias al campo, una pequeña cantidad de energía adicional y alcanzar estados energéticos vacíos próximos.** Así, los electrones son libres para moverse con sólo un pequeño campo aplicado en un metal porque hay muchos estados energéticos sin ocupar muy próximos a estados energéticos ocupados.

Aislantes. Considere ahora las dos bandas de energía superiores de un material que tiene la banda inferior completamente llena de electrones y la superior completamente vacía a 0 K (consulte la figura 12.20). Suele ser común referirse a la separación entre las bandas externas llena y vacía como **separación de energía,** E_g, del material. La banda inferior llena de electrones se denomina **banda de valencia,** y la banda superior vacía es la **banda de conducción.** La energía de Fermi está en el punto medio de la separación de energía, como se muestra en la figura 12.20. Debido a que la separación de energía para un aislante es grande (~10 eV), en comparación con k_BT a temperatura ambiente ($k_BT = 0.025$ eV a 300 K), la distribución de Fermi-Dirac predice que muy pocos electrones se excitarán térmicamente hacia la banda superior a temperaturas normales, como puede verse por el pequeño valor de f_{FD} en la parte inferior de la banda de conducción en la figura 12.20. **Aunque un aislante posee muchos estados vacantes en la banda de conducción que pueden aceptar electrones, hay tan pocos electrones que realmente ocupan estados de la banda de conducción a temperatura ambiente que la contribución global a la conductividad eléctrica es muy pequeña, lo que resulta en una elevada resistividad para los aislantes.**

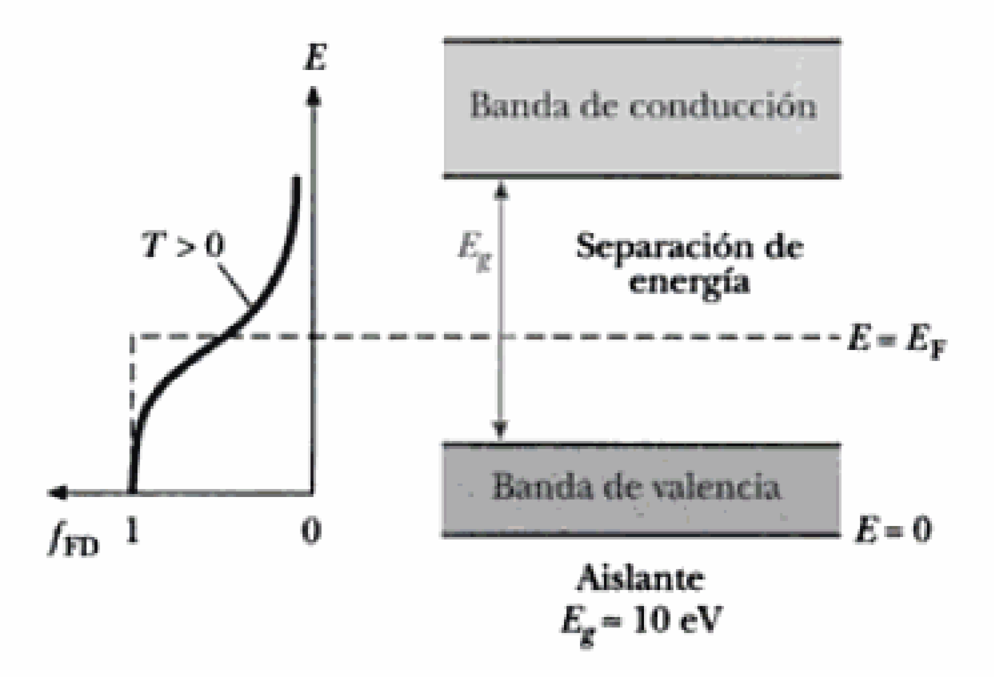


Figura 12.20 Un aislante a $T = 0$ K tiene una banda de valencia llena y una banda de conducción vacía. El nivel de Fermi se encuentra a la mitad entre estas bandas. La probabilidad de Fermi-Dirac de que un estado energético E esté ocupado a $T > 0$ K se muestra a la izquierda.

Tabla 12.8 Valores de la separación de energía para algunos semiconductores*

	E_g(eV)	
Cristal	**0 K**	**300 K**
Si	1.17	1.14
Ge	0.744	0.67
InP	1.42	1.35
GaP	2.32	2.26
GaAs	1.52	1.43
CdS	2.582	2.42
CdTe	1.607	1.45
ZnO	3.436	3.2
ZnS	3.91	3.6

*De C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 6a. edición, Nueva York, John Wiley and Sons, Inc., 1986.

Semiconductores. Ahora considere un material cuya separación de energía es mucho más pequeña, del orden de 1 eV. Tales materiales se denominan **semiconductores;** en la tabla 12.8 se muestran las separaciones de energía de algunos semiconductores representativos. A $T = 0$ K, todos los electrones están en la banda de valencia, y en la banda de conducción no hay electrones. Así, los semiconductores son *malos* conductores a bajas temperaturas. A temperaturas normales, no obstante, la situación es bastante distinta. Como se muestra en la figura 12.21, las poblaciones de las bandas de valencia y de conducción se modifican. Debido a que el nivel de Fermi, E_F, está ubicado aproximadamente a la mitad de la separación de un semiconductor y E_g es pequeña, muchos electrones se excitan térmicamente de la banda de valencia a la banda de conducción. Debido a que en la banda de conducción hay muchos estados vecinos vacíos, la aplicación de una pequeña diferencia de potencial puede aumentar con facilidad la temperatura de los electrones en la banda de conducción, lo que resulta en una corriente moderada. Ya que la excitación térmica a través de la estrecha separación es más probable a altas temperaturas, la conductividad de los semiconductores depende bastante de la temperatura y *se incrementa* rápidamente con ésta. Lo anterior contrasta bastante con la conductividad de un metal, que *disminuye lentamente* con la temperatura (consulte la sección 12.3).

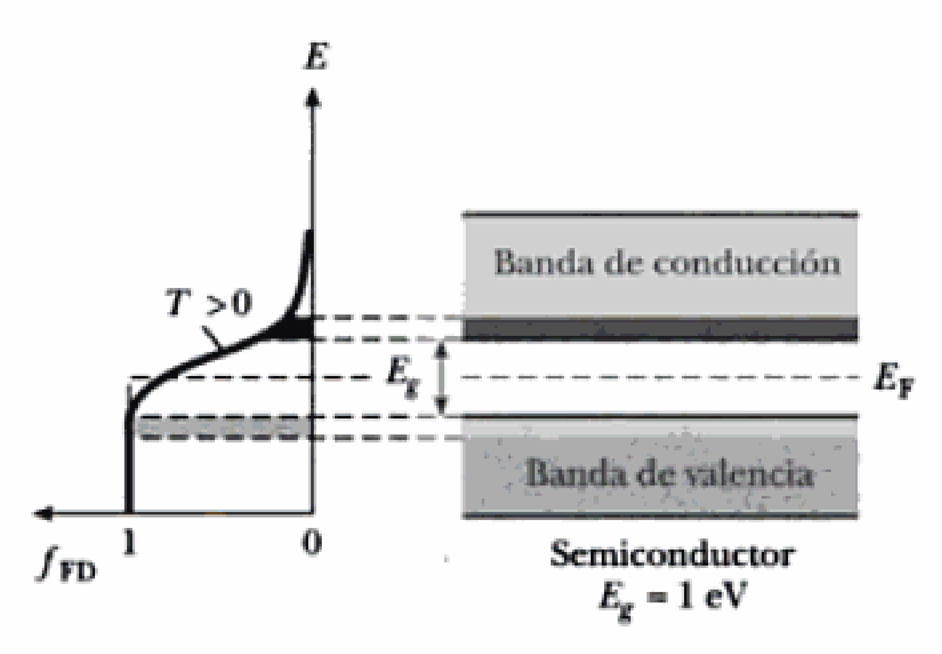


Figura 12.21 Estructura de las bandas de un semiconductor a temperaturas normales ($T \approx 300$ K). Observe que la separación de energía es mucho menor que en un aislante y que muchos electrones ocupan estados en la banda de conducción.

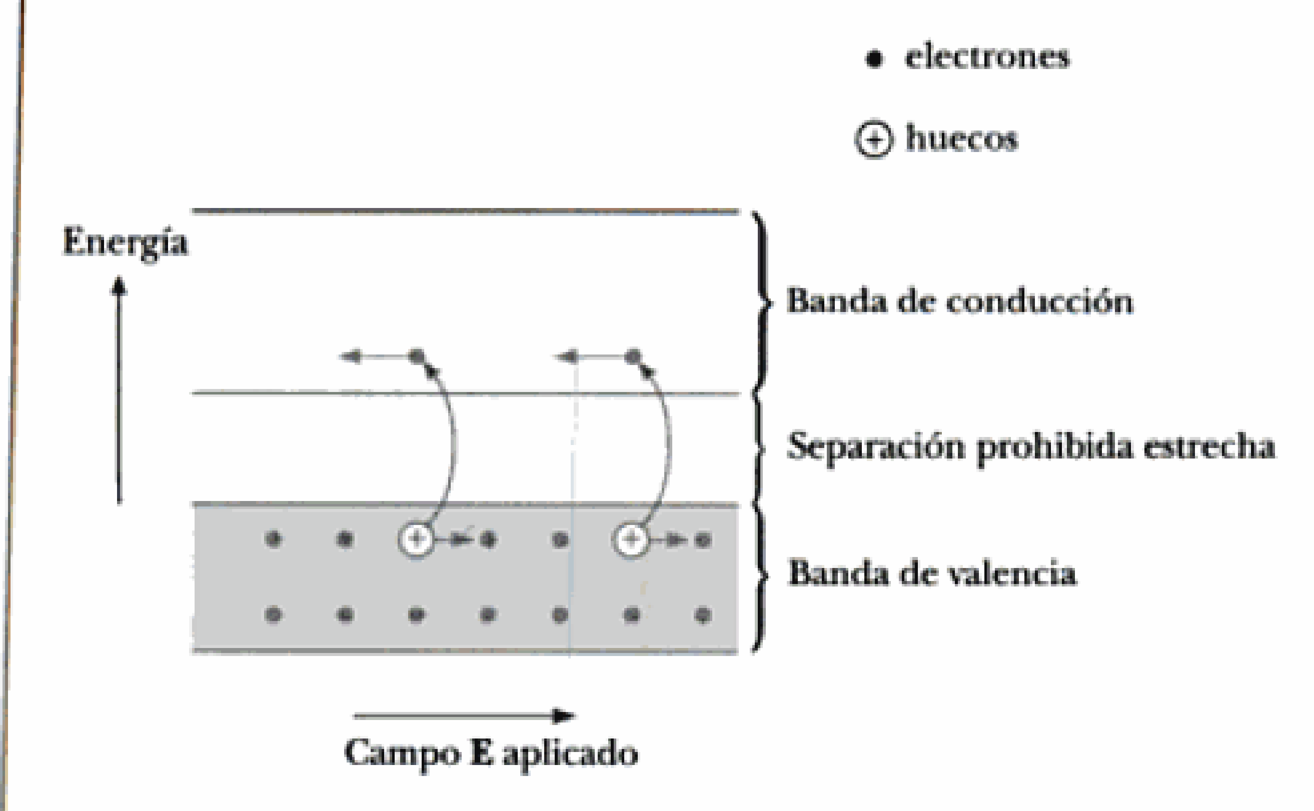


Figura 12.22 Semiconductor intrínseco. Los electrones se mueven hacia la izquierda y los huecos lo hacen hacia la derecha cuando el campo aplicado es a la derecha, como se muestra.

Es importante señalar que en un semiconductor hay portadores tanto de carga negativa como positiva. Cuando un electrón se desplaza de la banda de valencia a la banda de conducción, deja atrás vacante el sitio de un electrón de valencia, denominado **hueco,** en la banda de valencia que de otra forma estaría llena. Este hueco (sitio en el que falta un electrón) aparece como una carga positiva, $+e$. El hueco actúa como un portador de carga, ya que un electrón de valencia de un sitio próximo puede ocupar el hueco, llenándolo y dejando entonces un hueco atrás en el sitio original del electrón. Así, el hueco migra a través de la banda de valencia. En un cristal puro que sólo contiene un elemento o compuesto, hay números iguales de electrones de conducción y huecos. Estas combinaciones de cargas se denominan pares electrón-hueco, y un semiconductor puro que contiene tales pares se denomina **semiconductor intrínseco** (consulte la figura 12.22). En presencia de un campo eléctrico, los huecos se mueven en la dirección del campo y los electrones de conducción lo hacen en sentido opuesto.

EJEMPLO 12.2

Calcule la intensidad de campo eléctrico necesaria para producir conducción en un diamante, un aislante excelente a temperatura ambiente. Suponga un camino libre medio de 5×10^{-8} m y una separación de energía de 7 eV.

Solución Si un electrón en el diamante ha de servir como conductor, es necesario suministrarle 7 eV de energía proveniente del campo eléctrico. Debido a que en general el electrón pierde la mayor parte de su exceso de energía en cada colisión, el campo debe proporcionar 7 eV de energía *en un solo* camino libre medio. Así, para que un electrón gane 7 eV en una distancia L, se requiere un campo eléctrico de

$$E = \frac{V}{L} = \frac{7\ \text{V}}{5 \times 10^{-8}\ \text{m}} = 1.4 \times 10^{8}\ \text{V/m}$$

Este es un campo enorme en comparación con el campo necesario para producir conducción en los metales.

Bandas de energía de las reflexiones de ondas electrónicas

Ahora abordaremos un método completamente distinto para comprender el origen de las bandas de energía en los sólidos. Este método implica la modificación de las funciones de onda de los electrones libres para tomar en cuenta la dispersión de las ondas electrónicas por la red cristalina periódica.

Recuerde que un electrón completamente libre que se desplaza en la dirección $+x$ se representa mediante una onda viajera con número de onda $k = 2\pi/\lambda$, descrita por

$$\Psi_{\text{libre}} = Ae^{i(kx-\omega t)}$$

Según De Broglie, la onda transporta una cantidad de movimiento $p = \hbar k$, y energía $E = \hbar\omega$. Además, la energía del electrón libre como una función de k es

$$E = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e}$$

y al graficar E contra k se obtiene una parábola (consulte la figura 12.23). Con base en la figura 12.23, se observa que los valores de la energía permitidos están distribuidos de manera continua desde cero hasta infinito, y que no hay discontinuidades o huecos en valores particulares de k.

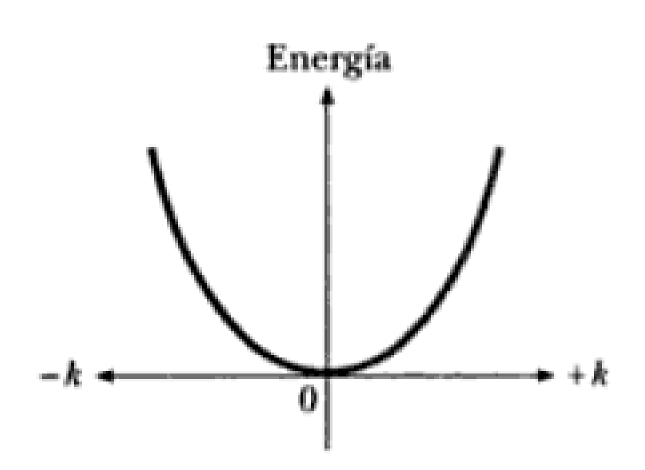


Figura 12.23 Energía contra el número de onda k para un electrón libre, donde $k = 2\pi/\lambda$.

Ahora considere lo que ocurre con una onda electrónica que viaja a través de una red cristalina unidimensional con separación atómica a. Se empieza con ondas electrónicas incidentes de longitud de onda muy larga, o k pequeña, y baja energía, que se mueven hacia la derecha, como se muestra en la figura 12.24a. En este caso, todas las ondas reflejadas por átomos consecutivos y que se mueven hacia la izquierda están ligeramente *fuera de fase* y se cancelan en promedio. Así, la onda electrónica no se refleja y el electrón se desplaza a través de la red como si fuese una partícula libre. Si, no obstante, la longitud de onda del electrón se hace cada vez más corta, entonces cuando se alcanza

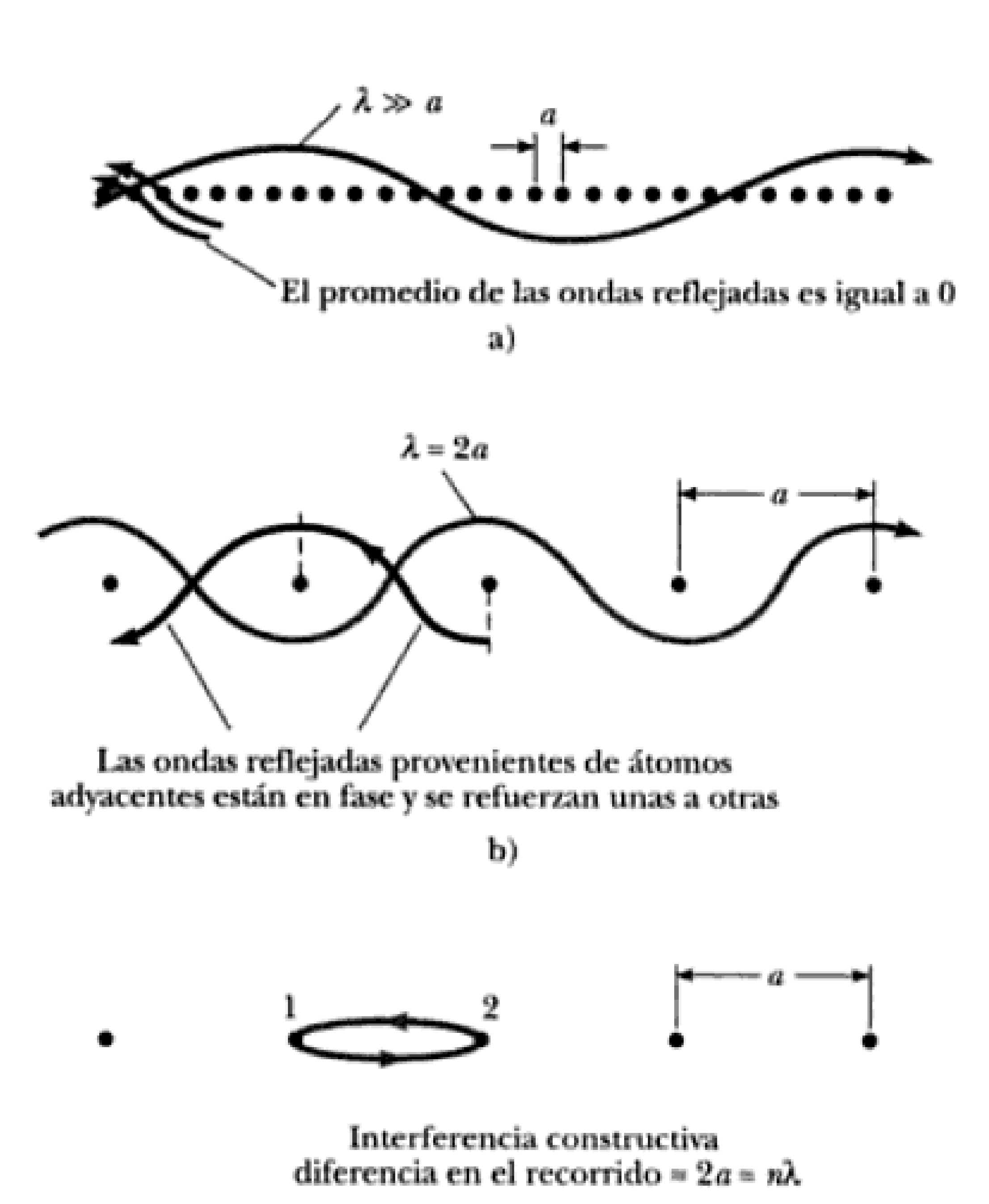


Figura 12.24 a) Reflexión de ondas electrónicas cuando $\lambda \gg a$. b) Reflexión de ondas electrónicas cuando $\lambda = 2a$. c) Interferencia constructiva de ondas reflejadas desde los átomos 1 y 2.

la condición $\lambda = 2a$, las ondas reflejadas por átomos adyacentes están *en fase*, como se muestra en la figura 12.24b, y entonces tenemos una onda reflejada intensamente. Esto ocurre porque la diferencia en la longitud del recorrido es $2a$ para una onda reflejada hacia la izquierda directamente desde el átomo 1, en comparación con una onda que se desplaza de 1 a 2 y luego se refleja de vuelta a 1, como se muestra en la figura 12.24c. Así, la longitud de onda más larga a la que se produce interferencia constructiva de ondas reflejadas es

$$2a = \lambda$$

En general, también se produce interferencia constructiva a otras longitudes de onda más cortas,

$$2a = \pm n\lambda \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{12.29}$$

donde el signo negativo se debe a la reflexión por el átomo que está a la izquierda del átomo 1. En términos del número de onda k, la ecuación 12.29 predice ondas electrónicas reflejadas intensamente cuando

$$k = \pm\frac{n\pi}{a} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{12.30}$$

Así, para $k = \pm n\pi/a$ las funciones de onda electrónicas no son justamente ondas que se desplazan hacia la derecha, sino que están compuestas por partes iguales de ondas que se desplazan hacia la derecha (incidentes) y hacia la izquierda (reflejadas). Debido a que tanto las ondas que se dirigen a la izquierda como las que lo hacen a la derecha pueden sumarse o restarse, se tienen dos tipos distintos posibles de onda estacionaria, denotados por Ψ_- y Ψ_+:

$$\Psi_- = Be^{i(kx-\omega t)} - Be^{i(-kx-\omega t)} \tag{12.31}$$

$$\Psi_+ = Be^{i(kx-\omega t)} + Be^{i(-kx-\omega t)} \tag{12.32}$$

donde $Be^{i(kx-\omega t)}$ describe una onda que se dirige a la derecha y $Be^{i(-kx-\omega t)}$ describe una onda que se dirige a la izquierda. Al usar la identidad de Euler, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$, es posible demostrar que para $k = \pm\pi/a$, Ψ_- y Ψ_+ asumen las formas más útiles

$$\Psi_- = \pm 2Bie^{-i\omega t}\,\text{sen}\,\frac{\pi x}{a} \tag{12.33}$$

$$\Psi_+ = 2Be^{-i\omega t}\cos\frac{\pi x}{a} \tag{12.34}$$

El punto clave es que en $k = \pi/a$, Ψ_- tiene una energía ligeramente *superior* a Ψ_{libre} y Ψ_+ tiene una energía ligeramente *inferior* a Ψ_{libre}. Esto lleva a una discontinuidad en energía o una banda de separación en $k = \pi/a$, como se muestra en la figura 12.25. Para demostrar que el estado Ψ^- tiene mayor energía que el estado Ψ^+, es necesario considerar las dos energías, cinética y potencial, del electrón en estos estados. La energía cinética del electrón es la misma en ambos estados, ya que ambos poseen la misma magnitud de cantidad de movimiento, $p = \hbar k = \hbar\pi/a$. Así, la energía cinética promedio tanto de Ψ_+ como de Ψ_- es

$$\langle K\rangle = \left\langle \frac{p^2}{2m_e}\right\rangle = \frac{\hbar^2k^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m_ea^2}$$

No obstante, las energías potenciales de los dos estados son diferentes, ya que Ψ_+ y Ψ_- distribuyen los electrones de manera distinta con respecto a las posiciones de los núcleos de iones positivos. En la figura 12.26 se muestran las distribuciones de la carga eléctrica para el caso de una onda viajera y los dos casos

tavalente dona en efecto un electrón al semiconductor y se denomina **átomo donante.** Debido a que la separación energética entre los niveles del donante y la parte inferior de la banda de conducción es muy pequeña (típicamente alrededor de 0.05 eV), una pequeña cantidad de energía térmica provoca que un electrón en estos niveles se mueva hacia la banda de conducción. (Recuerde que la energía térmica promedio de un electrón a temperatura ambiente es $k_BT \approx 0.025$ eV.) Los semiconductores contaminados con átomos donantes se denominan **semiconductores tipo *n*** porque los portadores de carga son electrones con carga negativa.

Si el semiconductor se contamina con átomos que tienen tres electrones de valencia, como el indio y el aluminio, los tres electrones forman enlaces covalentes con átomos vecinos, dejando un defecto, o hueco, de un electrón en el cuarto enlace (consulte la figura 12.28a). Los niveles energéticos de tales impurezas también están dentro de la separación de energía, justo arriba de la banda de valencia, como se indica en la figura 12.28b. Los electrones de la banda de valencia poseen suficiente energía térmica a temperatura ambiente para llenar estos niveles de impureza, dejando atrás un hueco en la banda de valencia. Debido a que un átomo trivalente acepta en efecto un electrón de la banda de valencia, tales impurezas se denominan **aceptantes.** Un semiconductor contaminado con impurezas trivalentes (aceptantes) se denomina **semiconductor tipo *p*** porque los portadores son huecos con carga positiva. Cuando la conducción esta dominada por impurezas donantes o aceptantes, el material se denomina **semiconductor extrínseco** o **semiconductor de impurezas.** El intervalo típico de densidades de contaminación para semiconductores tipo *n* o *p* varía desde 10^{13} hasta 10^{19} cm^{-3}.

Ahora veremos qué ocurre cuando un semiconductor tipo *p* se une a un semiconductor tipo *n* para formar una **unión p-n.** Se observa que la unión consta de tres regiones semiconductoras distintas, como se muestra en la figura 12.29a: una región tipo *p*, una **región de agotamiento** y una región tipo *n*. Puede considerarse que la región de agotamiento se origina cuando las dos mitades de la unión se aproximan entre sí y los electrones donantes móviles se difunden hacia el lado *p* de la unión, dejando atrás núcleos de iones positivos inmóviles. (Al revés, los huecos se difunden hacia el lado *n* y dejan una región de núcleos de iones negativos fijos.) **La región que se extiende varias mi-**

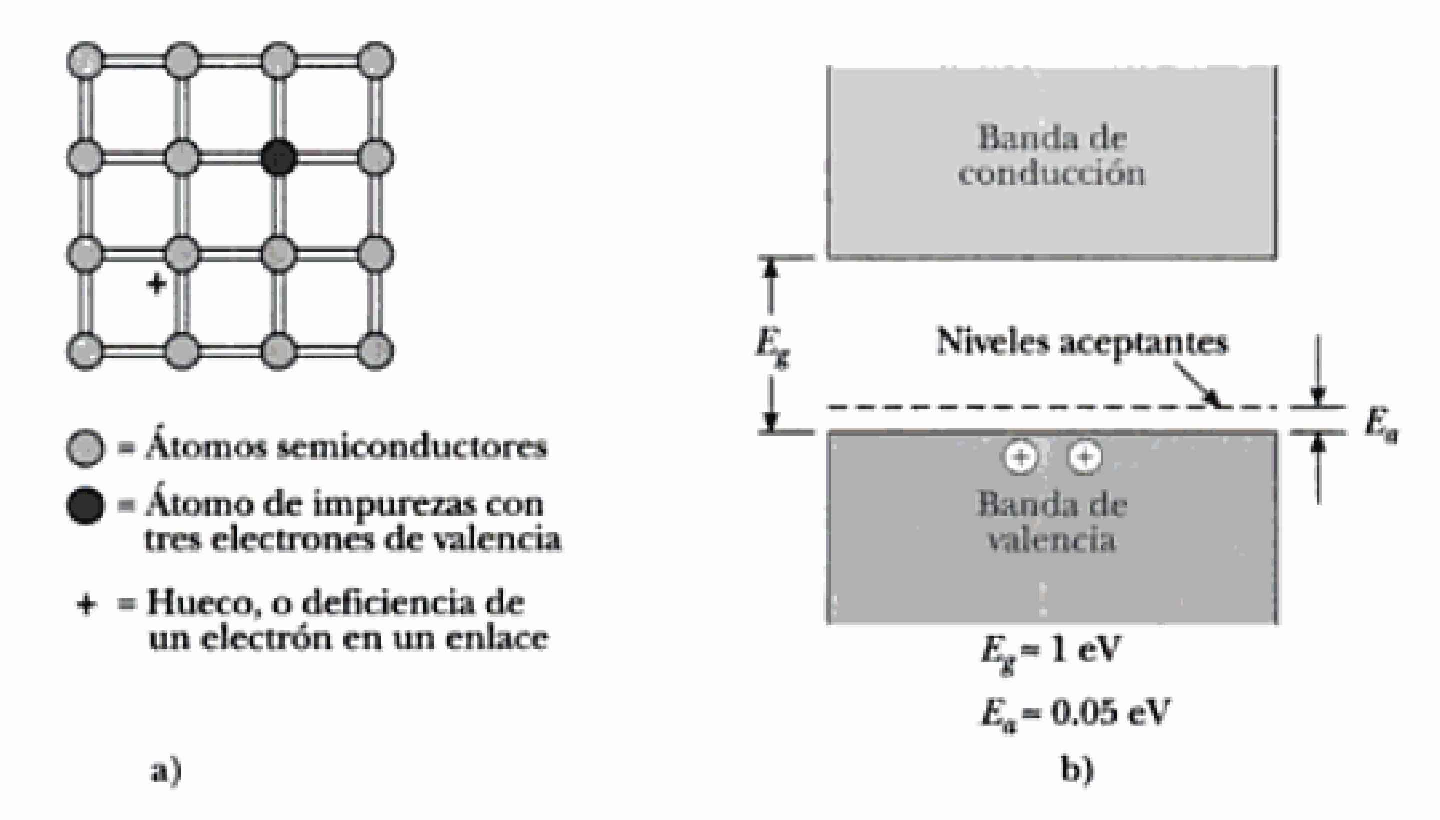


Figura 12.28 a) Representación bidimensional de un semiconductor que contiene un átomo aceptantes (punto a color gris oscuro). b) Diagrama de bandas de energía de un semiconductor donde los niveles aceptantes están dentro de la separación prohibida, justo arriba de la parte superior de la banda de valencia.

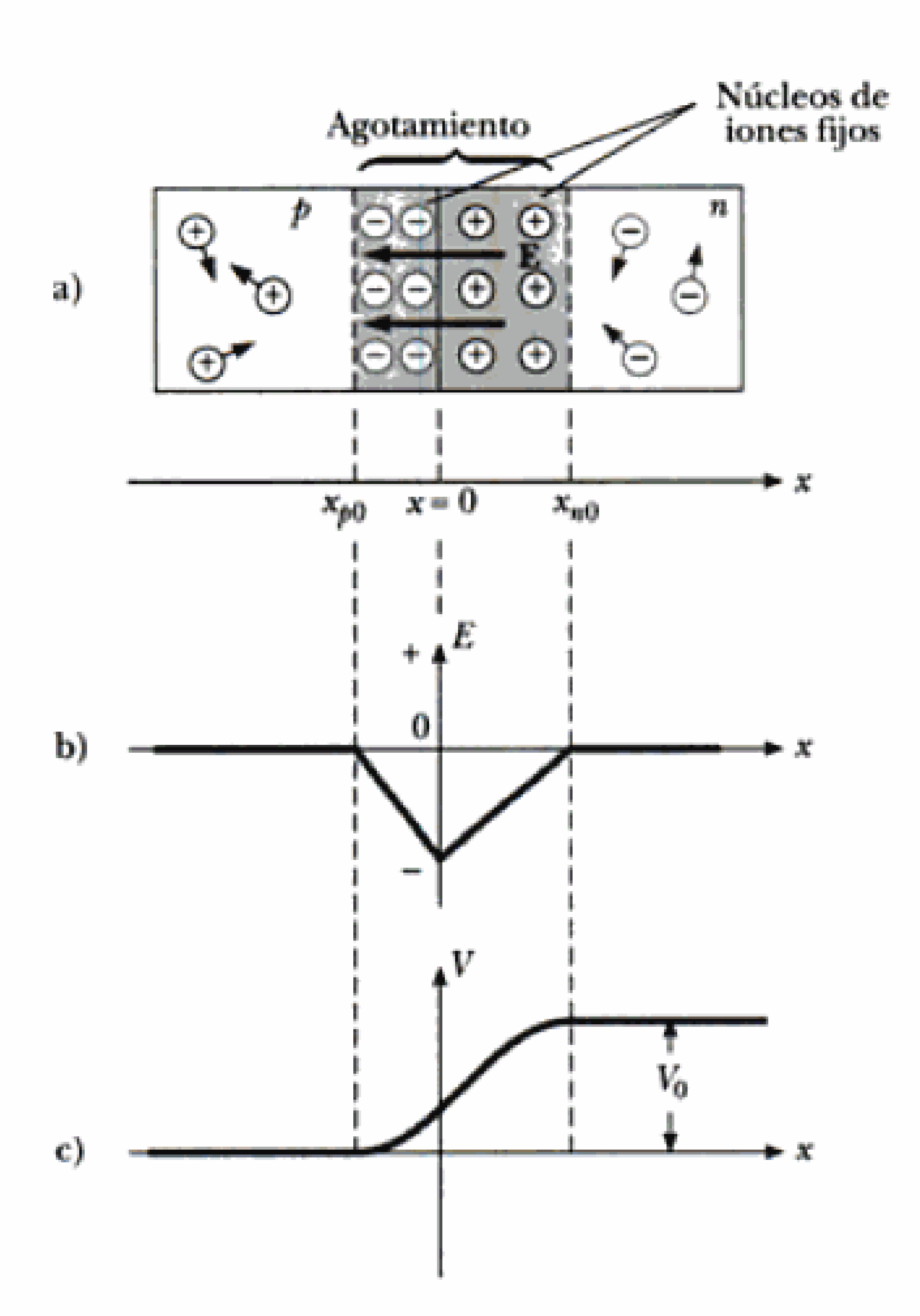


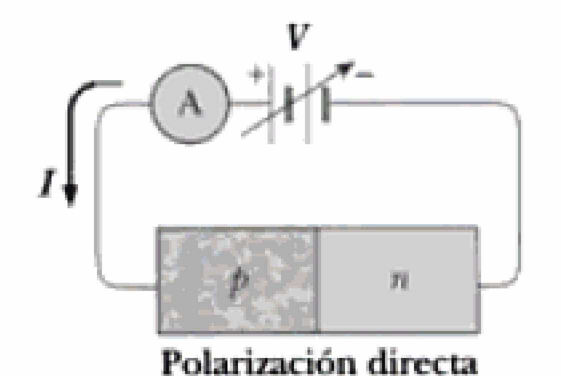
Figura 12.29 a) Disposición física de una unión *p-n*. b) Campo eléctrico contra *x* para la unión *p-n*. c) Potencial contra *x* para la unión *p-n*.

cras desde la unión se denomina región de agotamiento porque está vacía de portadores de carga móviles. También contiene un campo eléctrico integrado, del orden de 10^3 a 10^5 V/cm, que sirve para barrer la carga móvil fuera de esta región y mantenerla verdaderamente agotada. Este campo eléctrico crea una barrera de potencial V_0 que impide la difusión adicional de huecos y electrones a través de la unión y asegura la existencia de corriente cero a través de la unión cuando no se aplica ningún voltaje externo.

Quizá el rasgo más notable de la unión *p-n* es su capacidad de pasar corriente en una sola dirección. Este comportamiento de *diodo* es más fácil de entender si observamos el diagrama de potencial en la figura 12.29c. Si se aplica un voltaje externo al lado *p* de la unión, la barrera global disminuye, lo que genera una corriente que crece en forma exponencial con voltaje directo o polarización directa creciente. Para polarización inversa (un voltaje externo positivo aplicado al lado *n* de la unión), la barrera de potencial se incrementa, lo que resulta en una corriente inversa muy pequeña que alcanza con rapidez su valor de saturación, I_0, con polarización inversa creciente. La relación corriente-voltaje para un diodo ideal es

$$I = I_0(e^{qV/k_BT} - 1) \tag{12.35}$$

donde q es la carga electrónica, k_B es la constante de Boltzmann y T es la temperatura en kelvins. En la figura 12.30 se muestra la gráfica de una curva característica *I-V* para un diodo real, junto con un esquema de un diodo bajo polarización directa. En la región 1 se muestra la operación bajo polarización inversa; en la región 2, la polarización directa normal; y en la región 3, la polarización directa extrema necesaria para un láser de unión *p-n*. Este tipo de láser se analiza en la sección 12.7.



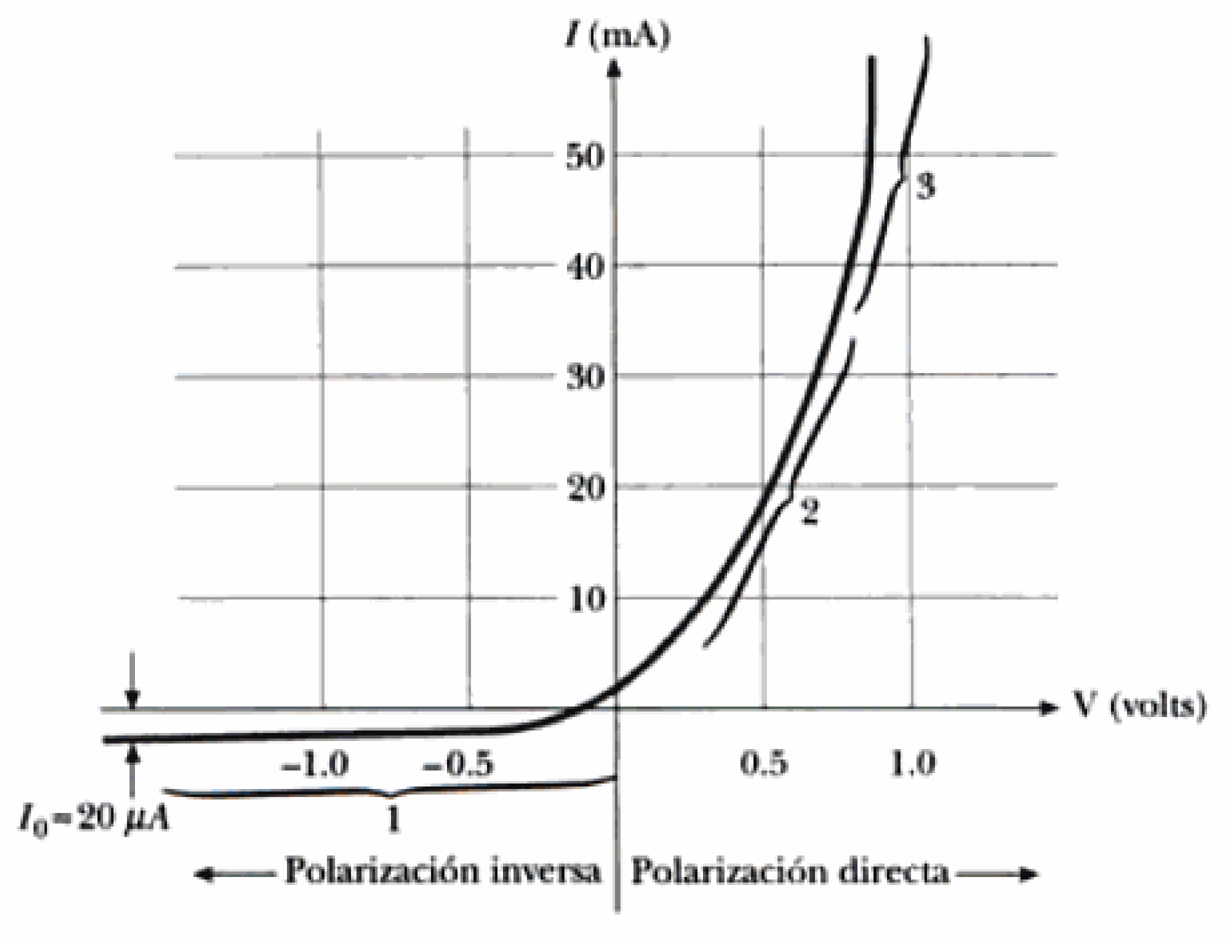


Figura 12.30 Curva característica para un diodo real.

EJEMPLO 12.3 Corrientes directa e inversa en un diodo

Calcule la razón de la corriente directa a la corriente inversa para un diodo descrito por la ecuación 12.35 para un voltaje aplicado a través de un diodo de +1 V (polarización directa) y −1 V (polarización inversa).

Solución

$$\frac{I_{\text{directa}}}{I_{\text{inversa}}} = \frac{I_0(e^{+qV/k_BT} - 1)}{I_0(e^{-qV/k_BT} - 1)}$$

Al tomar $k_BT = 0.025$ eV a temperatura ambiente se obtiene

$$\frac{I_f}{I_r} = \frac{I_0(e^{(1.0 \text{ eV})/(0.025 \text{ eV})} - 1)}{I_0(e^{-(1.0 \text{ eV})/(0.025 \text{ eV})} - 1)} = \frac{(e^{40} - 1)}{(e^{-40} - 1)}$$
$$= -2.4 \times 10^{17}$$

Diodos emisores y absorbedores de luz— LEDs y celdas solares

La emisión y la absorción de luz en semiconductores son semejantes a la emisión y la absorción de luz que llevan a efecto los átomos gaseosos, excepto que los niveles energéticos atómicos discretos deben sustituirse por bandas en los semiconductores. Como se muestra en la figura 12.31a, un electrón excitado eléctricamente hacia la banda de conducción puede recombinarse con facilidad con un hueco (en especial si el electrón se inyecta en una región tipo *p*), emitiendo un fotón de energía desde la banda de separación. Los diodos emisores de luz (LEDs, por sus inicales en ingles) y los rayos láser de inyección son ejemplos de uniones *p-n* que convierten una entrada eléctrica en una salida luminosa. Al contrario, un electrón en la banda de valencia puede absorber un

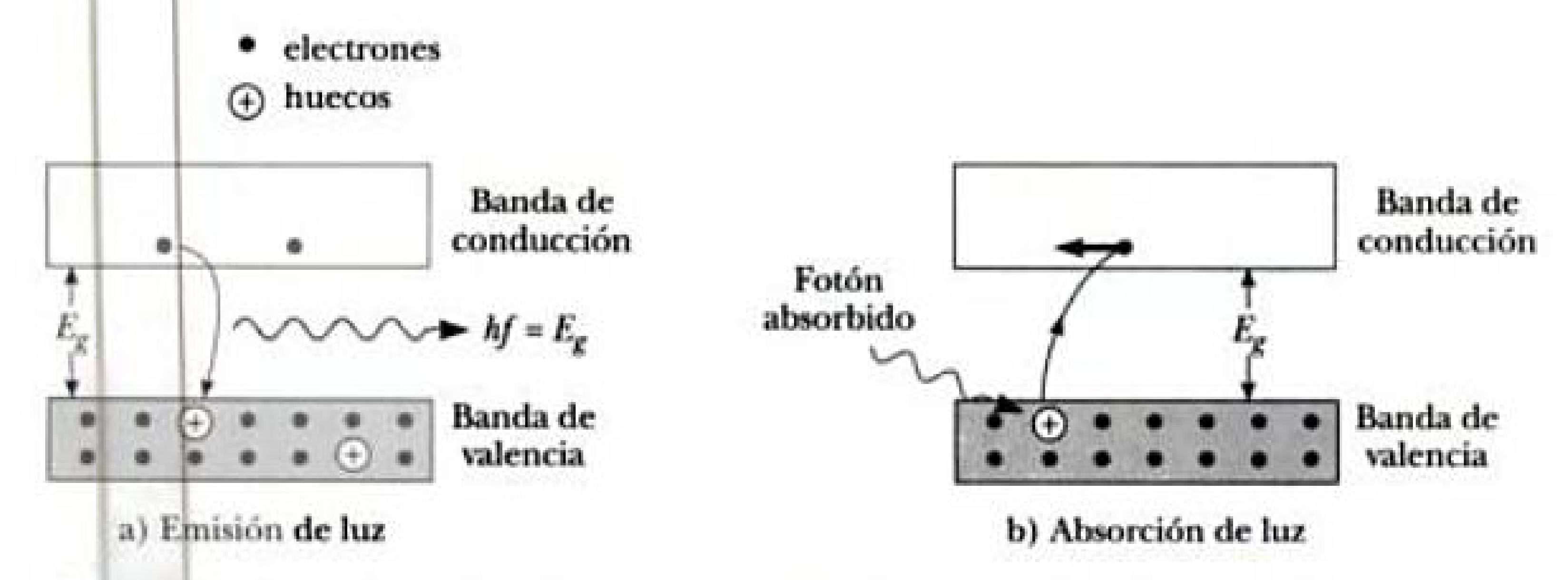


Figura 12.31 a) Emisión de luz por un semiconductor. b) Absorción de luz por un semiconductor.

fotón y ascender a la banda de conducción, dejando atrás un hueco (consulte la figura 12.31b). Los dispositivos en donde los electrones y los huecos generados por luz están separados por el campo de una unión y son recolectados como corriente se denominan **celdas solares** o **dispositivos fotovoltaicos.** Estos dispositivos se describen con mayor detalle en el ensayo de John Meakin, disponible en nuestro sitio en la red http://info.brookscole.com.mp3e.

Transistor de unión

La invención del transistor por los físicos estadounidenses John Bardeen (1908-1991), Walter Brattain (1902-1987) y William Schockley (1910-1989) en 1948 revolucionó totalmente el mundo de la electrónica y los condujo al premio Nobel en 1956. Ya en 1960 el transistor había sustituido al tubo al vacío en muchas aplicaciones electrónicas, lo que llevó a la industria multimillonaria que hoy en día produce dispositivos tan conocidos como radios portátiles,



El premio Nobel de 1956 fue otorgado a los estadounidenses (de izquierda a derecha) John Bardeen, William Shockley y William Brattain. (*Lucent Technologies' Bell Laboratory, cortesía de AIP Emilio Segrè Visual Archives.*)

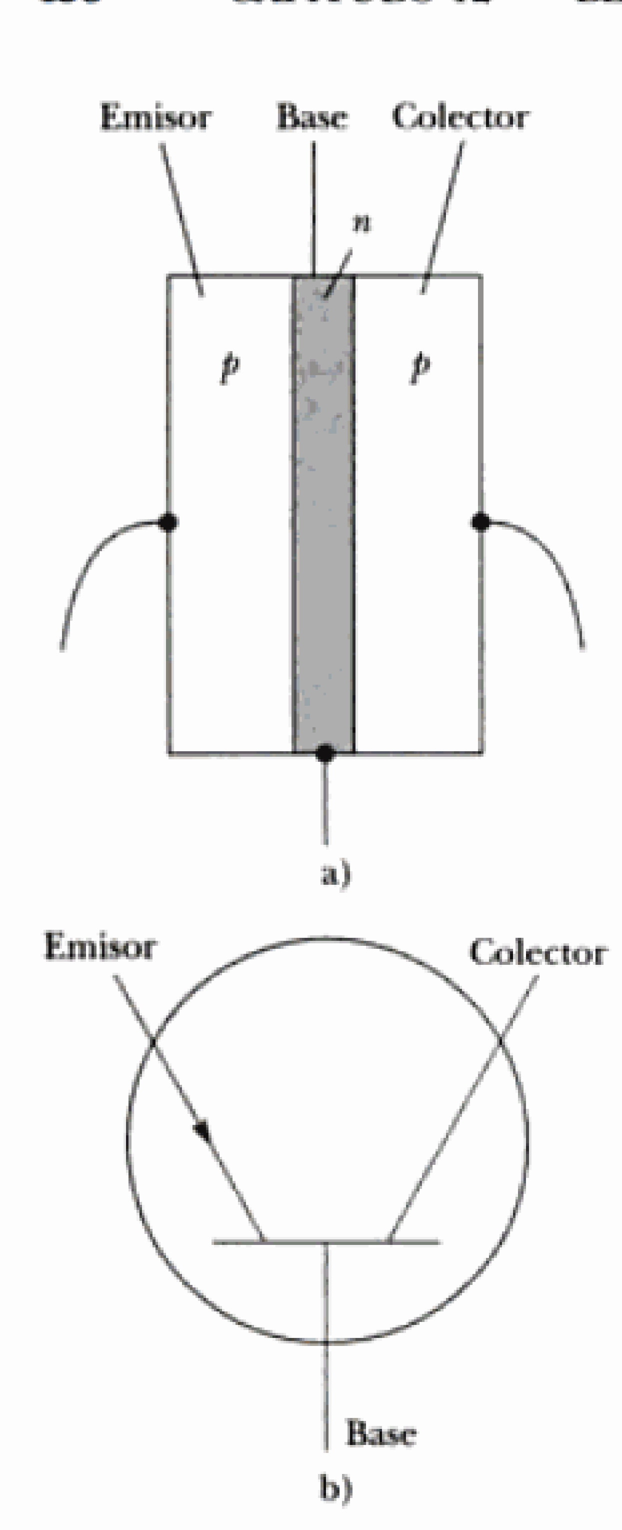


Figura 12.32 a) El transistor *pnp* consta de una región *n* (base) emparedada entre dos regiones *p* (el emisor y el colector). b) Símbolo de circuito para el transistor *pnp*.

organizadores manuales, computadoras, reproductores de CD y DVD, teléfonos celulares y juegos electrónicos.

El transistor de unión consta de un material semiconductor con una región *n* muy estrecha emparedada entre dos regiones *p*, denominado **transistor *pnp*,** o una región *p* emparedada entre dos regiones *n*, denominado **transistor *npn*.** Debido a que la operación de ambos transistores es esencialmente la misma, aquí sólo se describirá el transistor *pnp*.

En la figura 12.32 se muestra la estructura del transistor *pnp* junto con su simbología de circuito. Las regiones externas del transistor se denominan *emisor* y *colector*, y la estrecha región central se denomina *base*. Observe que la configuración contiene dos uniones. Una unión es la interfaz entre el emisor y la base, y la otra es la que está entre la base y el colector.

Suponga que se aplica un voltaje al transistor, de modo que el emisor está a un potencial más alto que el colector. (Esto se logra con la batería V_{ec} en la figura 12.33.) Si se considera al transistor como dos diodos uno junto al otro, se observa que la unión emisor-base está polarizada directamente y que la unión base-colector está polarizada en forma inversa. Debido a que el emisor tipo *p* está bastante contaminado en comparación con la base, casi toda la corriente consta de huecos que se mueven a través de la unión emisor-base. La mayor parte de estos huecos no se recombinan en la base porque ésta es demasiado estrecha. Los huecos son acelerados finalmente a través de la unión base-colector polarizada en forma inversa, produciendo la corriente I_c en la figura 12.33.

Aunque sólo un pequeño porcentaje de los huecos se recombinan en la base, aquellos que lo hacen limitan la corriente del emisor a un valor pequeño, debido a que los portadores de carga positiva se acumulan en la base e impiden que los huecos fluyan hacia esta región. Para prevenir esta limitación de corriente, es necesario eliminar algo de la carga positiva en la base; esto se logra conectando la base a una segunda batería, V_{eb} en la figura 12.33. Las cargas positivas que no son barridas a través de la unión colector-base salen de la base a través de esta trayectoria agregada. Esta corriente, I_b, es muy pequeña, pero una ligera variación en ella puede modificar de manera significativa la corriente mayor del colector, I_c. Si el transistor está polarizado en forma correcta, la corriente del colector (de salida) es directamente proporcional a la corriente de la base (de entrada), y el transistor actúa como un amplificador de corriente. Esta condición puede escribirse como

$$I_c = \beta I_b \tag{12.36}$$

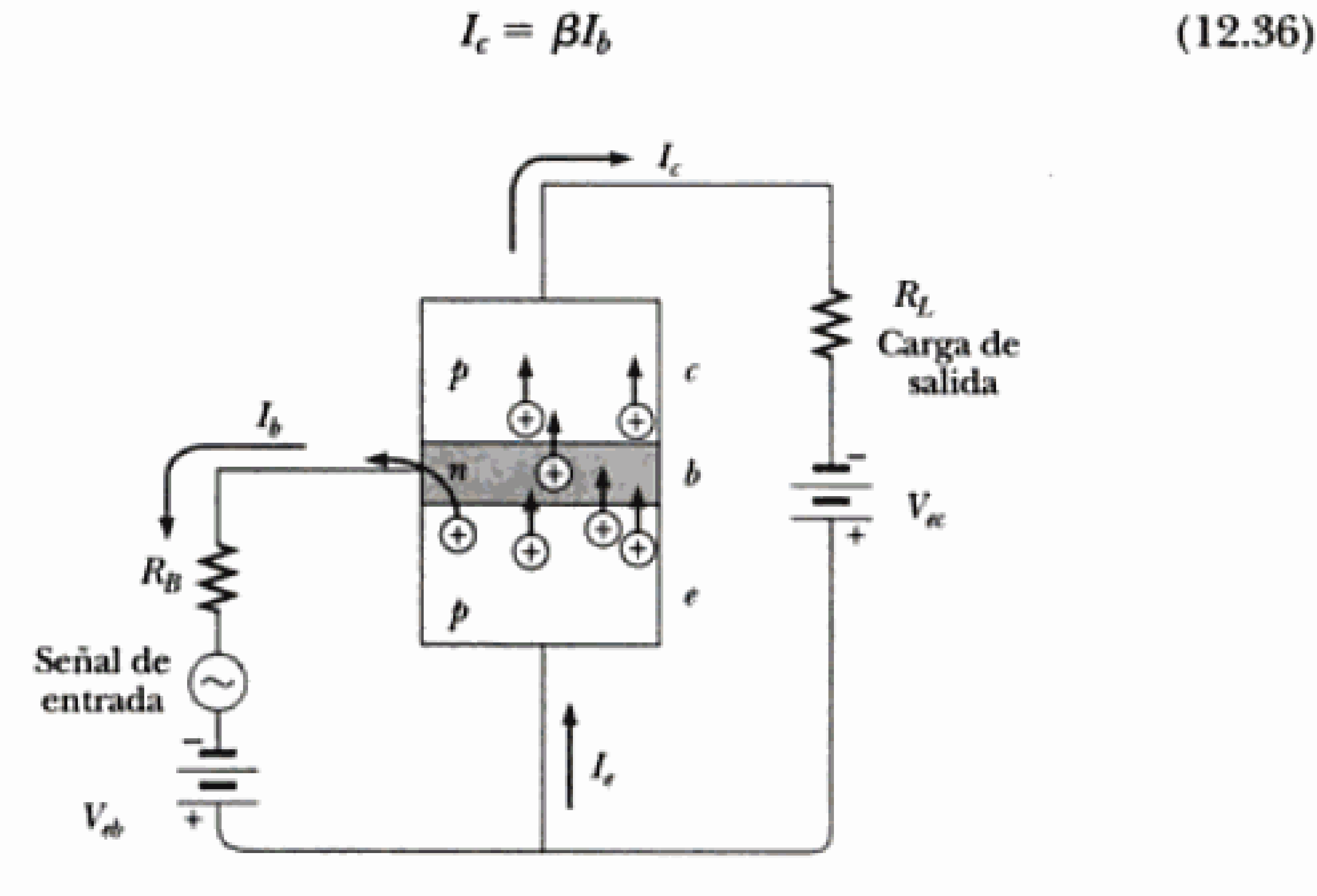
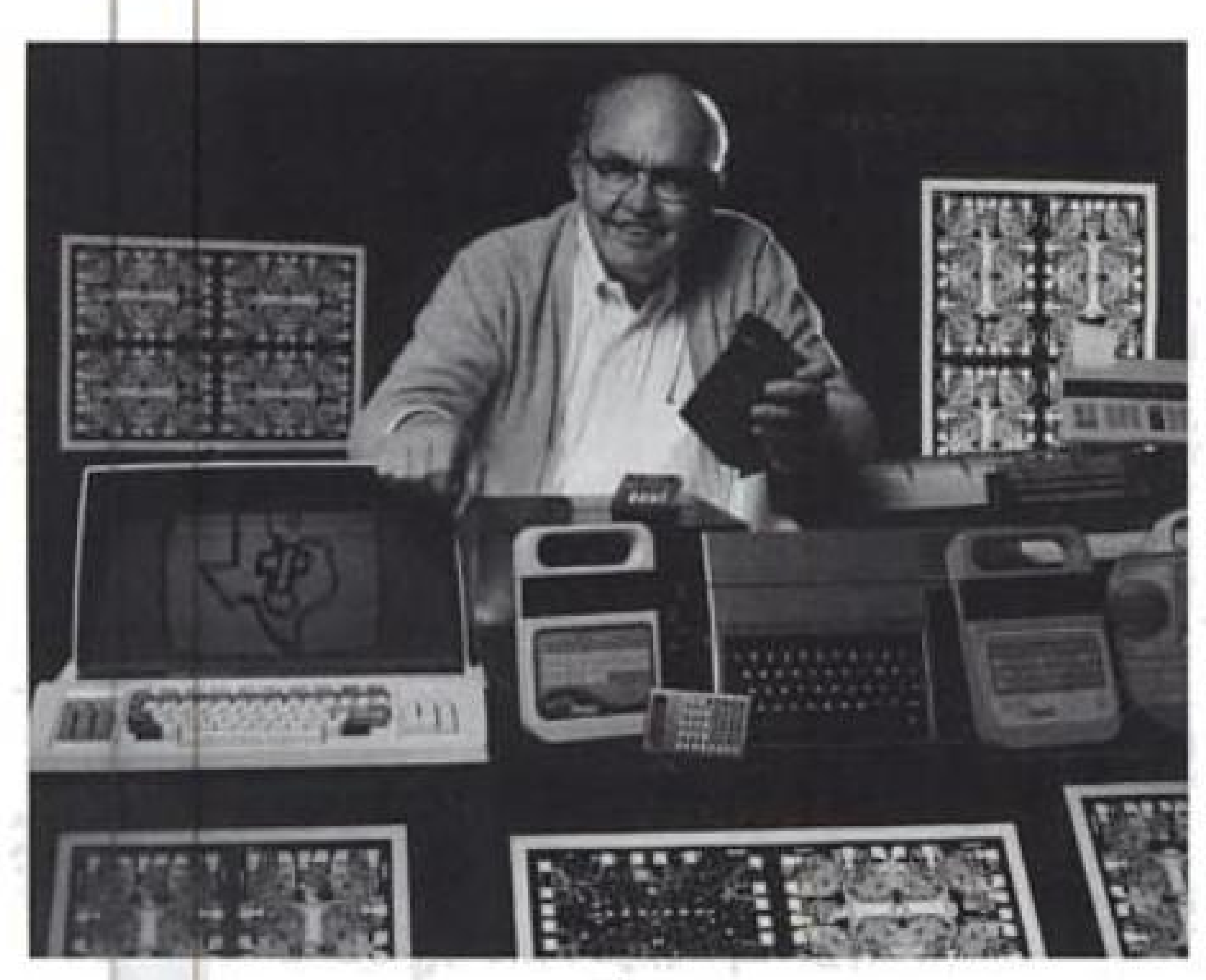
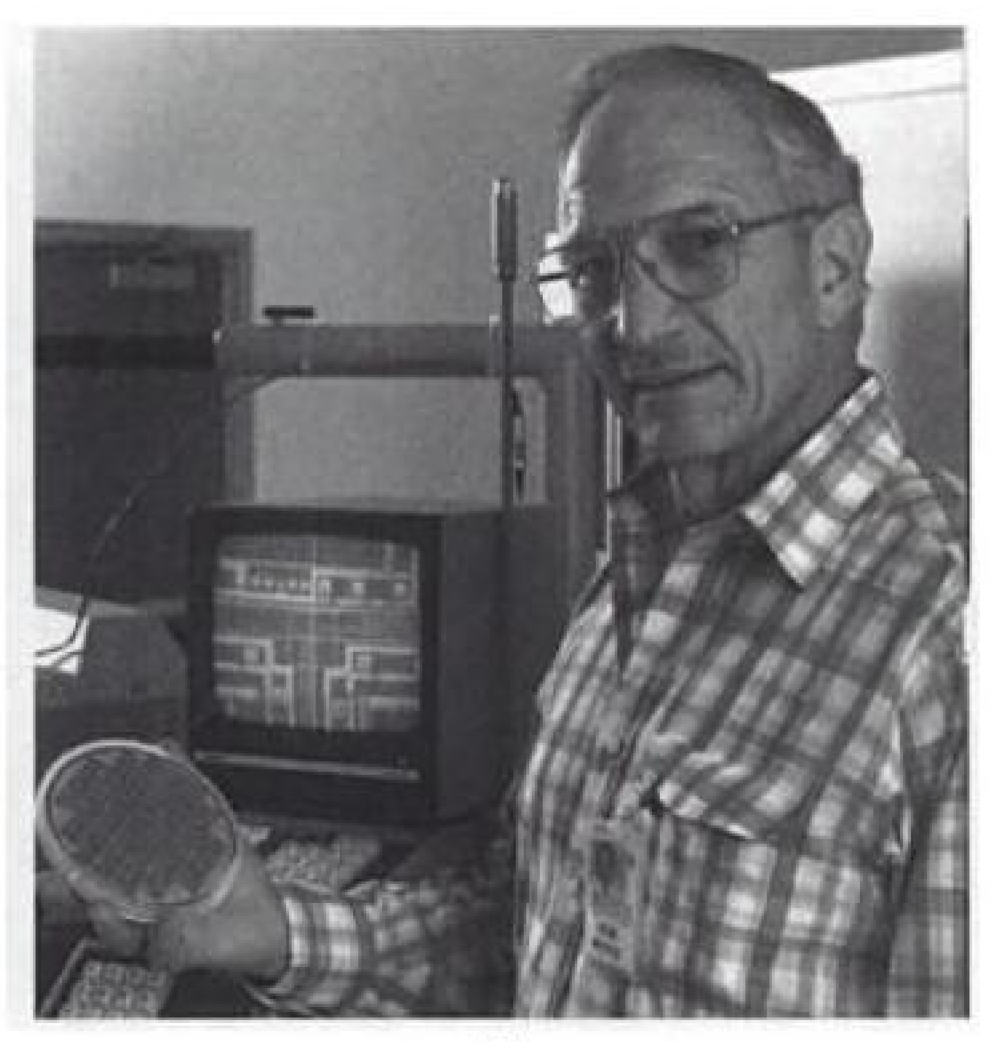


Figura 12.33 Una pequeña corriente en la base, I_b, controla una gran corriente en el colector, I_c. Observe que $I_e = I_b + I_c$, $I_b \ll I_c$, e $I_c = \beta I_b$, donde $\beta \approx 10$ a 100.



a)



b)

Jack Kilby, coinventor del circuito integrado, en las oficinas generales de Texas Instruments rodeado de dispositivos que contienen circuitos integrados. (*Roger Ressmeyer/CORBIS.*) b) Robert Noyce, antiguo director ejecutivo de Sematech, sosteniendo una pastilla semiconductora en la misma empresa en Austin, Texas, en 1989 (*Foto AP/David Breslauer.*)

donde β, la ganancia en corriente, está típicamente en el intervalo que va de 10 a 100. Así, el transistor puede utilizarse para amplificar una pequeña señal que varía con el tiempo. El pequeño voltaje a amplificar se coloca en serie con la batería V_{eb}, como se muestra en la figura 12.33. La señal de entrada, dependiente del tiempo, produce una pequeña variación en la corriente de la base. Esta variación resulta en un gran cambio en la corriente del colector y, por tanto, en un gran cambio en el voltaje a través del resistor de salida.

Transistor con efecto de campo (FET)

Durante la década de 1960, la industria electrónica cambió muchas de las aplicaciones del transistor de unión al **transistor con efecto de campo (FET,** por sus iniciales en inglés), que es más fácil de fabricar y utiliza mucho menos energía que el transistor de unión. En la figura 12.34 se muestra la estructura de un dispositivo muy común: el **MOSFET,** o **transistor de efecto de campo de metal-óxido-semiconductor.** Quizá usted esté utilizando millones de dispositivos MOSFET como interruptores cuando trabaja en su nueva computadora laptop.

Hay tres conexiones metálicas con el transistor: la *fuente*, el *dren* y la *compuerta*. La fuente y el dren están conectados a regiones semiconductoras tipo n en cualquier extremo de la estructura. Estas regiones están conectadas por un canal estrecho de material adicional tipo n, el canal n. Las regiones de la fuente y el dren y el canal n están incrustados en un material sustrato tipo p. Esto forma una región de agotamiento, como en el diodo de unión, a lo largo de la parte inferior del canal n. (También existen regiones de agotamiento en las uniones en la parte inferior de las regiones de la fuente y el dren, aunque aquí se ignorarán debido a que la operación de este dispositivo depende primordialmente del comportamiento en el canal.) La compuerta está separada del canal n por una capa aislante de dióxido de silicio. De esta forma no entra en contacto eléctrico con el resto del material semiconductor.

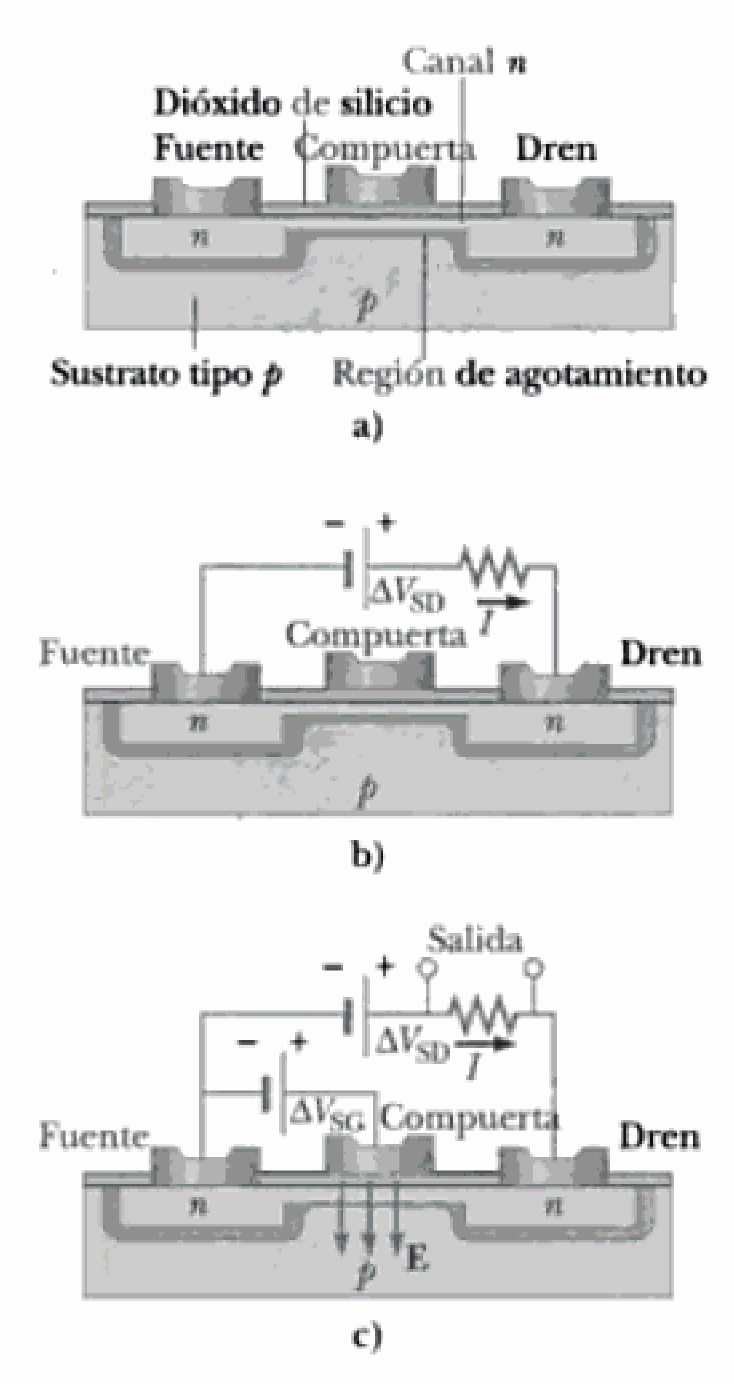


Figura 12.34 a) Estructura de un transistor de efecto de campo de metal-óxido-semiconductor (MOSFET). b) Se aplica un voltaje fuente-dren, con el resultado de que en el circuito existe corriente. c) Se aplica un voltaje de compuerta. Este voltaje puede utilizarse para controlar la corriente fuente-dren, de modo que el MOSFET actúa como un amplificador.

Imagine que una fuente de voltaje ΔV_{SD} se aplica a través de la fuente y el dren, como se muestra en la figura 12.34b. Con esta situación, los electrones fluyen a través de la región superior del canal *n*. Los electrones no pueden fluir a través de la región de agotamiento en la parte inferior del canal *n* porque esta región carece de portadores de carga. Luego, un segundo voltaje ΔV_{SG} se aplica entre la fuente y la compuerta, como se muestra en la figura 12.34c. El potencial positivo en el electrodo de la compuerta genera en un campo eléctrico por debajo de ésta, que se dirige hacia abajo en el canal *n*. (Éste es el campo en el "efecto de campo".) Este campo eléctrico ejerce fuerzas hacia arriba sobre electrones que están en la región por debajo de la compuerta, haciendo que se muevan hacia el canal *n*. Esto hace que la región de agotamiento se haga más pequeña, ensanchando el área a través de la que hay corriente entre la parte superior del canal *n* y la región de agotamiento. Cuando se ensancha el área, la corriente aumenta.

Si a la compuerta se le aplica un voltaje variable, el área a través de la que pasa la corriente fuente-dren cambia de tamaño según el voltaje variable en la compuerta. Una pequeña variación en éste da por resultado una gran variación en la corriente y un gran voltaje a través del resistor en la figura 12.34c. En consecuencia, el MOSFET actúa como un amplificador de voltaje. Un circuito que consta de una cadena de transistores así puede lograr que una señal inicial muy pequeña de un micrófono se amplifique lo suficiente como para activar potentes altavoces en un concierto al aire libre.

El MOSFET puede usarse como un interruptor invirtiendo la diferencia de potencial ΔV_{SG} en la figura 12.34c. En este caso, el incremento de voltaje provoca la disminución de tamaño del canal *n*. Si este voltaje es suficientemente grande como para bloquear por completo el área a través de la que pasa el

electrón, la corriente desciende a cero. Así, el MOSFET puede considerarse como un interruptor de baja potencia: una corriente de entrada muy baja en el circuito fuente-compuerta esencialmente abre y cierra el circuito fuente-dren al cambiar la resistencia de la fuente-dren por varios órdenes de magnitud. Esta conmutación de muy baja potencia es especialmente útil en circuitos integrados que cuentan con millones de transistores, donde la disipación de potencia es un problema de suma importancia.

Circuito integrado

El circuito integrado (CI), inventado de manera independiente por los estadounidenses Jack Kilby (nacido en 1923; premio Nobel en 2000) en Texas Instruments a fines de 1958 y Robert Noyce (1927-1992) en Fairchild Camera and Instruments a principios de 1959, ha sido calificado con justa razón como la tecnología más extraordinaria que ha impactado a la humanidad. Los circuitos integrados iniciaron una segunda revolución industrial y hoy en día se encuentran en los corazones de computadoras, relojes, cámaras, automóviles, robots, vehículos espaciales y en todos los tipos de redes de comunicación y conmutación. En los términos más sencillos, un circuito integrado es una colección de transistores, diodos, resistores y capacitores interconectados, fabricados en una sola pieza de silicio denominada cariñosamente chip. Los chips actuales contienen fácilmente varios millones de componentes en un área de 1 cm^2 (figura 12.35).

De manera interesante, los circuitos integrados fueron inventados en parte en un esfuerzo por alcanzar una miniaturización de los circuitos y en parte para resolver el problema de interconexión generado por el transistor. En la época de los tubos al vacío, la potencia y el tamaño relativamente grandes de los componentes individuales limitaban en gran medida la cantidad de componentes que podían interconectarse en un circuito dado. Con la llegada del transistor pequeño, de baja potencia y altamente confiable, los límites de diseño sobre el número de componentes desaparecieron y fueron sustituidos por el desafío de conectar entre sí cientos de miles de componentes. La magnitud de este problema puede apreciarse si se considera que las computadoras de segunda generación (que constan de transistores discretos) contenían varios cientos de miles de componentes que requerían la elaboración y prueba de más de un millón de uniones soldadas a mano.

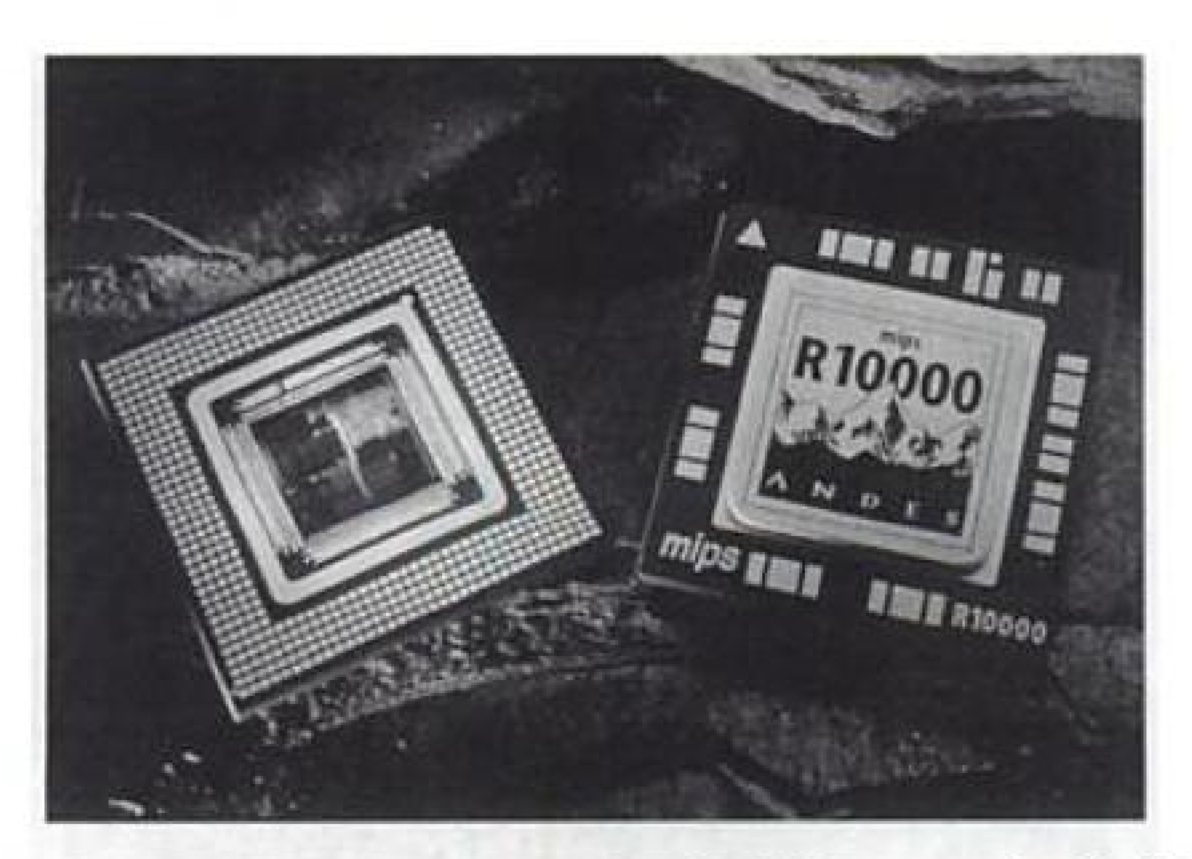


Figura 12.35 Este poderoso microprocesador de 64 bits en un simple chip (el RISC R10000) está diseñado para una amplia gama de aplicaciones de cómputo, desde computadoras personales hasta supercomputadoras. El procesador tiene un área de 298 mm^2 y contiene aproximadamente 6 millones de transistores. (*Cortesía de MIPS Technologies, Inc.*)

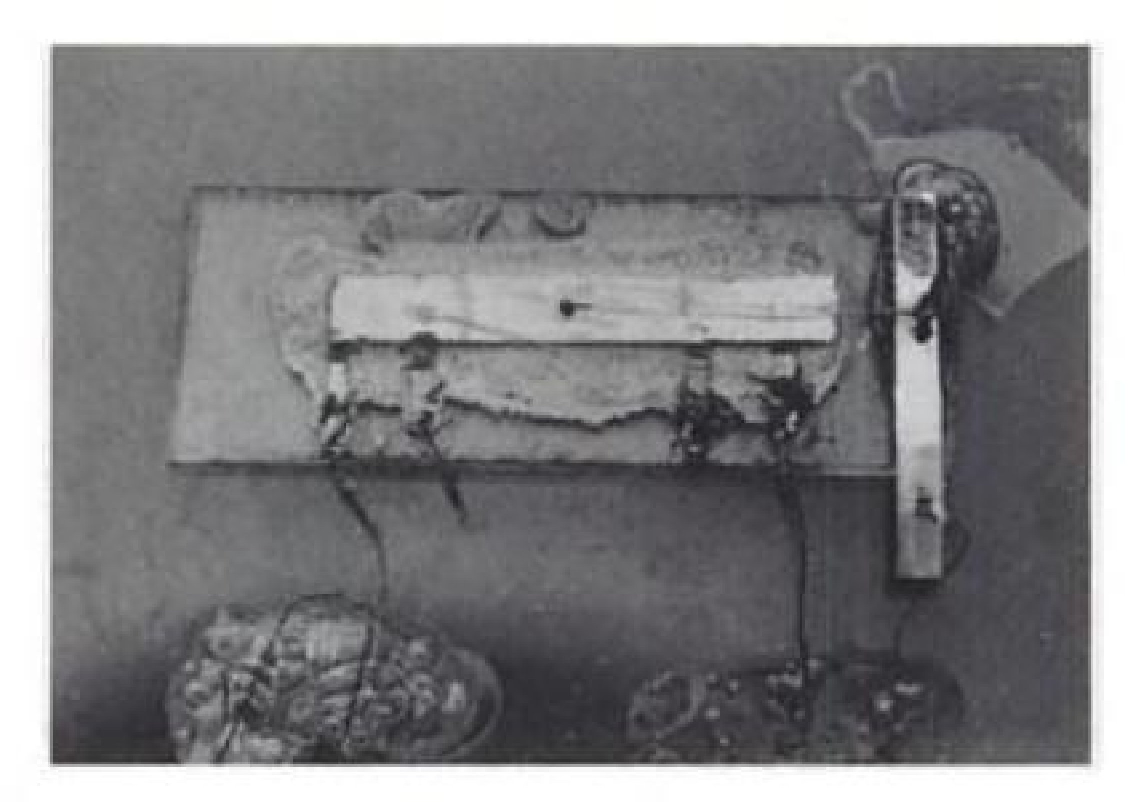


Figura 12.36 Primer circuito integrado de Jack Kilby, probado el 12 de septiembre de 1958. (*Cortesía de Texas Instruments, Inc.*)

En las figuras 12.36 y 12.37 se muestran fotografías de los primeros circuitos integrados que contenían múltiples dispositivos electrónicos en una sola pieza de silicio. El circuito integrado de Noyce también muestra interconexiones entre dispositivos *fabricados como parte del proceso de manufactura del chip.* Además de resolver el problema de interconexión, los circuitos integrados poseen la ventaja de miniaturización y respuesta rápida, dos atributos fundamentales para las computadoras de alta velocidad. La respuesta rápida también es en realidad un producto de la miniaturización y el estrecho empacamiento de los componentes, ya que el tiempo de respuesta de un circuito depende del tiempo necesario para que las señales eléctricas que se desplazan a alrededor de 1 pie/ns pasen de un componente a otro. Este tiempo se reduce debido a esta estrechez en el empacamiento. Para saber más sobre la teoría de operación y la fabricación de chips, consulte la bibliografía adicional que se presenta al final de este capítulo.

La figura 12.38a ilustra el impresionante avance logrado en tecnología de chips desde que Intel introdujo el primer microprocesador en 1971. La figura 12.38b es una gráfica del logaritmo del número de transistores en un chip como una función del año en que se introdujo éste. Debido a que dicho

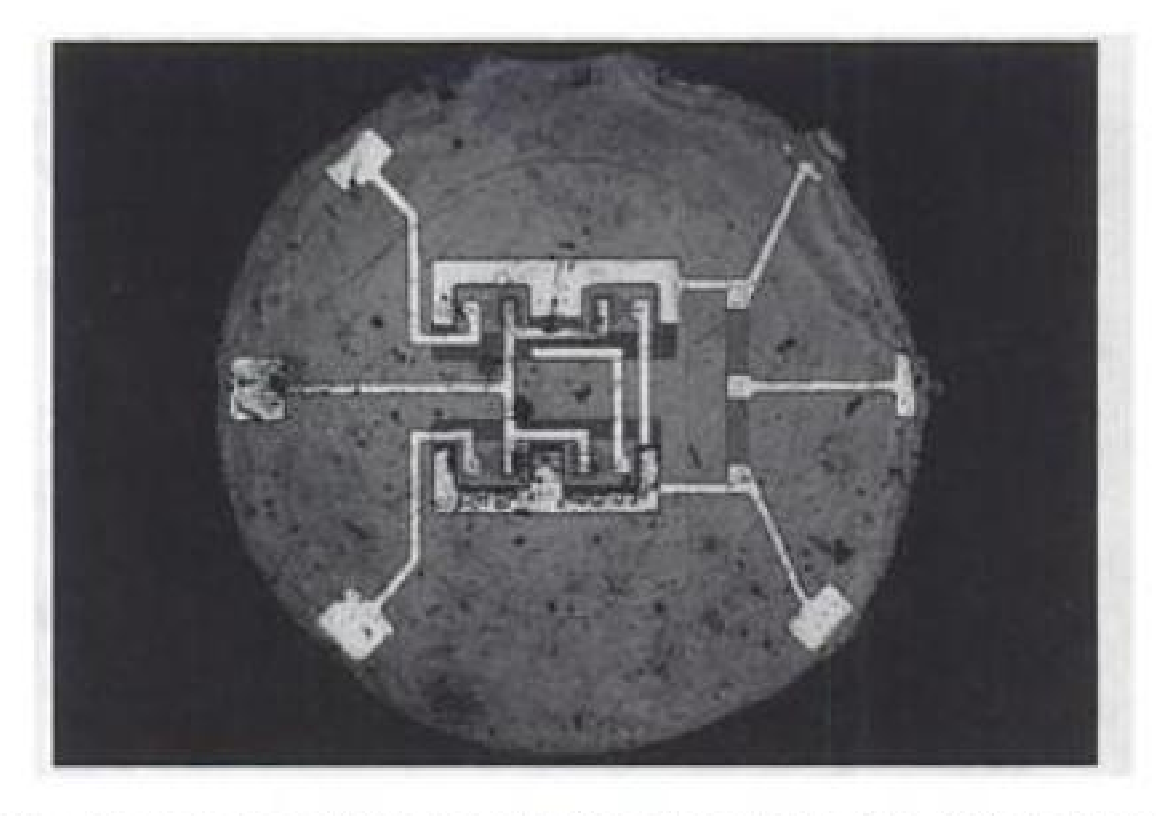
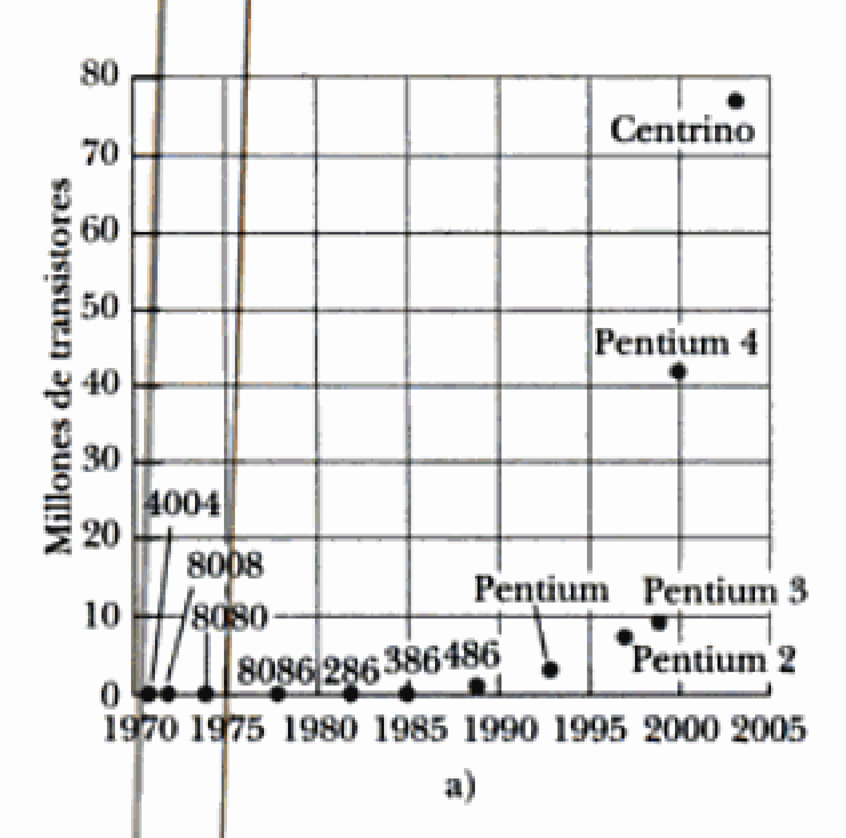


Figura 12.37 Uno de los primeros circuitos integrados de Robert Noyce. Observe que las puntas que conectan diferentes componentes están integradas como parte del chip. (*Cortesía de Fairchild Semiconductor Corporation.*)



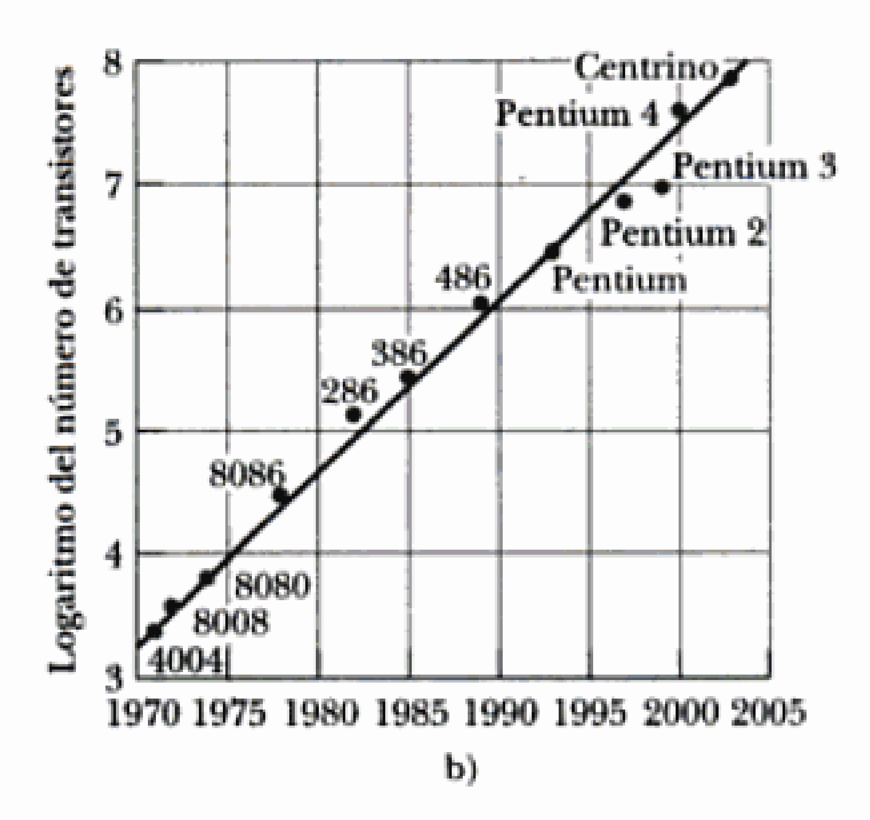


Figura 12.38 Avances espectaculares en la tecnología de los chips relacionados con microchips de computadora manufacturados por Intel. a) Gráfica del número de transistores en un simple chip de computadora contra el año de fabricación. b) Gráfica del logaritmo del número de transistores en el inciso a). El hecho de que esta gráfica es aproximadamente una línea recta muestra que el crecimiento es exponencial.

crecimiento sigue una línea aproximadamente recta, se concluye que el crecimiento es exponencial. La "ley de Moore", propuesta en 1965 por Gordon Moore, cofundador de Intel junto con Noyce, establece que el número de transistores por pulgada cuadrada en circuitos integrados debe duplicarse cada 18 meses. El tiempo de duplicación en la figura 12.38b es más largo que 18 meses porque esta gráfica sólo muestra el número total de transistores y no toma en cuenta la reducción del tamaño del circuito integrado con el paso del tiempo. Cuando se grafica la densidad de transistores por centímetro cuadrado, los resultados son semejantes a los predichos por la ley de Moore.

12.6 SUPERCONDUCTIVIDAD

Existe una clase de metales y compuestos denominados **superconductores** cuya resistencia eléctrica R decrece virtualmente hasta cero por debajo de una cierta temperatura T_c, denominada *temperatura crítica* (tabla 12.9). A continuación se abordarán con mayor detalle los extraordinarios materiales que poseen conductividad infinita, utilizando lo que aprendimos acerca de las propiedades de los sólidos a fin de comprender el comportamiento de los superconductores.

Se empezará con el análisis del **efecto Meissner,** un fenómeno en el que los campos magnéticos son expulsados del interior de los superconductores. Para demostrar que el campo magnético en el interior de un superconductor no puede cambiar con el tiempo pueden usarse razonamientos sencillos basados en las leyes de la electricidad y del magnetismo. Según la ley de Ohm, la resistencia de un conductor está dada por $R = \Delta V/I$, donde ΔV es la diferencia de potencial a través del conductor e I es la corriente en éste. Debido a que la diferencia de potencial ΔV es proporcional al campo eléctrico en el interior del conductor, el campo eléctrico es proporcional a la resistencia de éste. En consecuencia, ya que $R = 0$ para un superconductor a o por debajo de su temperatura crítica, **el campo eléctrico en su interior debe ser cero.** Luego, recuerde que la ley de inducción de Faraday puede escribirse como

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Tabla 12.9 Temperaturas críticas para varios superconductores

Material	T_c(K)
Zn	0.88
Al	1.19
Sn	3.72
Hg	4.15
Pb	7.18
Nb	9.46
Nb_3Sn	18.05
Nb_3Ge	23.2
$YBa_2Cu_3O_7$	92
Bi–Sr–Ca–Cu–O	105
Tl–Ba–Ca–Cu–O	125
$HgBa_2Ca_2Cu_3O_8$	134

atracción neta.[7] Como resultado, los dos electrones están unidos en una entidad denominada **par de Cooper.** Este par se comporta como una partícula con espín entero. Recuerde que las partículas con espín entero son *bosones.* (Las partículas con espín semientero son *fermiones.*) Un rasgo importante de los bosones es que *no obedecen* el principio de exclusión de Pauli. En consecuencia, a temperaturas muy bajas, es posible que todos los bosones en un conjunto de tales partículas se encuentren en el estado cuántico más bajo. Como resultado, **todo el conjunto de pares de Cooper en el metal es descrito por medio de una simple función de onda.** Por arriba del nivel energético asociado con esta función de onda hay una separación de energía igual a la energía de enlace de un par de Cooper. Bajo la acción de un campo eléctrico aplicado, los pares de Cooper experimentan una fuerza eléctrica que les hace moverse a través del metal. Un evento aleatorio de dispersión de un par de Cooper por un ion de la red representa resistencia a la corriente eléctrica. Tal colisión modifica la energía del par de Cooper porque parte de la energía se transfiere al ion de la red. Pero por abajo del nivel de energía del par de Cooper no hay niveles energéticos disponibles (el par ya se encuentra en el nivel energético más bajo), y tampoco hay ninguno que esté disponible por arriba de este nivel de energía, debido a la separación de energía. Como resultado, las colisiones están prohibidas y no hay resistencia al movimiento de los pares de Cooper.

Un avance importante en física que provocó mucho revuelo en la comunidad científica fue el descubrimiento de superconductores de alta temperatura basados en óxido de cobre. La animación empezó con una publicación de 1986 de J. Georg Bednorz (nacido en 1950) y K. Alex Müller (nacido en 1927), científicos del IBM Zurich Research Laboratory en Suiza. En su artículo trascendental,[8] Bednorz y Müller reportaron fuerte evidencia de superconductividad a 30 K en un óxido de bario, lantano y cobre. Fueron galardonados con el premio Nobel de Física en 1987 debido a su extraordinario descubrimiento. Poco después, una nueva familia de compuestos fue abierta para la investigación, y la actividad de investigación en el campo de la superconductividad avanzó rápidamente. A principios de 1987, investigadores en la Universidad de Alabama en Huntsville y en la Universidad de Houston anunciaron superconductividad a alrededor de 92 K en un óxido de itrio, bario y cobre ($YBa_2Cu_3O_7$). Luego, ese mismo año, equipos de científicos en Japón y Estados Unidos reportaron superconductividad a 105 K en un óxido de bismuto, estroncio, calcio y cobre. En fechas más recientes, científicos han reportado superconductividad a temperaturas tan elevadas como 150 K en un óxido que contiene mercurio. Hoy día, no se puede descartar la posibilidad de superconductividad a temperatura ambiente, y los mecanismos responsables del comportamiento de superconductores a alta temperatura aún siguen en investigación. La búsqueda de nuevos materiales superconductores continúa por razones científicas, debido a que las aplicaciones prácticas se vuelven más probables y generalizadas a medida que se incrementa la temperatura crítica.

Aunque la teoría BCS tuvo bastante éxito al explicar la superconductividad en metales, hoy por hoy no existe ninguna teoría ampliamente aceptada que explique la superconductividad a altas temperaturas. Esta área sigue en el terreno de la investigación. Si usted está interesado en el tema puede consultar

[7]A continuación se presenta una explicación bastante simplificada de esta atracción. Alrededor de un electrón, la fuerza de atracción de Coulomb provoca que los iones de la red con carga positiva circundantes se muevan ligeramente hacia adentro. Como resultado, hay una mayor concentración de carga positiva en esta región que en cualquier otra parte de la red. Un segundo electrón es atraído hacia las mayores concentraciones de carga positiva.

[8]J. G. Bednorz y K. A. Müller, *Z. Phys. B*, 64:189, 1986.

nuestro sitio en la red http://info.brookscole.com/mp3 para conocer un tratamiento más detallado de la superconductividad, incluyendo análisis de magnetismo en la materia, superconductores tipo I y tipo II, teoría BCS, tunelaje de Josephson, superconductividad a alta temperatura y dispositivos superconductores.

12.7 LÁSERES

Estos rayos constituyen un ejemplo interesante de los principios básicos de la interacción de la radiación con los átomos. Debido a esto y al gran número de aplicaciones en ingeniería de los rayos láser, como CD-ROMs, topografía de precisión y mediciones de longitud, cortadura y conformación de precisión de materiales, así como comunicación por fibras ópticas, vale la pena analizar con mayor detalle los principios de operación de los rayos láser.

Absorción, emisión espontánea y emisión estimulada

Para comprender la operación de un láser es necesario familiarizarse con los procesos que describen la emisión y absorción de radiación por átomos. Aunque sería exagerado decir que Einstein anticipó el rayo láser, sí estableció las bases para el dispositivo con su explicación de 1917 sobre los procesos atómicos de absorción, emisión espontánea y emisión estimulada.[9] Einstein demostró que un átomo puede absorber un fotón de energía, hf, proveniente de un campo de radiación y hacer una transición desde un estado energético inferior, E_1, hasta un estado energético superior, E_2, donde $E_2 - E_1 = hf$. La probabilidad de absorción por unidad de tiempo por átomo se hará igual a $B_{12}u(f, T)$, donde B_{12} es el coeficiente de absorción de Einstein y $u(f, T)$ es la densidad de energía por unidad de frecuencia en el campo de radiación. Así, se supone que la probabilidad de absorber radiación es proporcional a la densidad de la radiación. Cuando un átomo en el estado 2 ya está excitado, se observa que posee una probabilidad definida por segundo de efectuar una **transición espontánea** (es decir, una transición no inducida por radiación) de vuelta al nivel 1. La velocidad de transición espontánea puede caracterizarse por el coeficiente A_{21} (transiciones por unidad de tiempo) o por la duración de la emisión espontánea, $t_s = 1/A_{21}$ (tiempo por transición).

Transición espontánea

Además de la emisión espontánea, que es independiente de la densidad de emisión, puede ocurrir otro tipo de emisión que depende de la densidad de radiación. Si un fotón de energía hf interactúa con un átomo cuando éste se encuentra en el nivel 2, el campo eléctrico asociado con este fotón puede estimular o inducir emisión atómica, de modo que la onda electromagnética emitida (fotón) vibra en fase con la onda de estimulación (fotón) y se desplaza en la misma dirección. Se dice que dos fotones de este tipo son **coherentes.** La velocidad de transición estimulada por átomo puede hacerse igual a $B_{21}u(f, T)$, donde B_{21} es el coeficiente de emisión estimulada de Einstein. En la figura 12.41 se resumen los tres procesos de absorción, emisión espontánea y emisión estimulada.[10]

[9] A. Einstein, "Zur Quanten Theorie der Strahlung (On the Quantum Theory of Radiation)", *Phys. Zeit.*, 18:121–128, 1917.

[10] Aunque la emisión espontánea no tiene un análogo clásico y es realmente un efecto cuántico (que surge de la cuantización del campo de radiación), la absorción y la emisión estimulada sí cuentan con análogos clásicos. Si la interacción átomo-fotón se modela como un oscilador armónico cargado, activado por una onda electromagnética, el oscilador clásico puede absorber energía de la onda o ceder energía, dependiendo de las fases relativas del oscilador y la onda.

La ecuación 12.39 es una expresión para calcular la densidad de radiación por unidad de frecuencia de un sistema de átomos y radiación en equilibrio a la temperatura *T*, expresada en términos de los coeficientes de Einstein A_{21}, B_{12} y B_{21}. Pero la ley de radiación de cuerpo negro de Planck (capítulo 3) constituye una expresión para un sistema de radiación y osciladores en equilibrio térmico:

$$u(f, T) = \frac{8\pi hf^3}{c^3}\frac{1}{(e^{hf/k_BT} - 1)} \tag{3.9}$$

Al comparar las ecuaciones 12.39 y 3.9 se encuentran los interesantes resultados siguientes:

Relación de los coeficientes de Einstein de emisión estimulada, absorción y emisión estimulada

$$B_{21} = B_{12} = B \tag{12.40}$$

y

$$\frac{A_{21}}{B} = \frac{8\pi hf^3}{c^3} \tag{12.41}$$

La ecuación 12.40 establece que cualquier átomo que tenga una probabilidad finita por unidad de tiempo de absorción tiene una probabilidad *igual* de emisión estimulada. La ecuación 12.41 muestra que el proceso de emisión espontánea domina al proceso de emisión estimulada a frecuencia superior.

Inversión de la población y acción láser

Debido a que $B_{12} = B_{21}$, hay una probabilidad igual de que un fotón provoque una transición atómica hacia arriba (absorción) o hacia abajo (emisión estimulada). Cuando incide luz sobre un sistema de átomos en equilibrio térmico, suele haber una absorción neta de energía ya que, según la distribución de Boltzmann, hay más átomos en el estado fundamental que en los estados excitados. No obstante, si es posible invertir la situación de modo que haya más átomos en un estado excitado que en un estado inferior, condición denominada **inversión de la población,** puede obtenerse la amplificación de fotones. En condiciones idóneas, un simple fotón de entrada puede dar lugar a una cascada de fotones estimulados, todos los cuales están en fase, se desplazan en la misma dirección y tienen la misma frecuencia que el fotón de entrada. Como el dispositivo que hace esto es un amplificador de luz, se denomina **láser,** acrónimo de **l**ight **a**mplification by **s**timulated **e**mission of **r**adiation (amplificación de la luz por emisión estimulada de luz).

Inversión de la población

Aunque hay muchos tipos distintos de rayos láser, casi todos poseen las mismas características:

- Una fuente de energía capaz de producir inversiones de población por pulsos o continuas. En el caso del láser gaseoso de helio-neón, la fuente de energía es una descarga eléctrica que imparte energía por colisiones electrón-átomo. En el caso del láser de rubí cristalino, la inversión de la población se produce por los destellos intensos de iluminación de banda ancha de lámparas de destellos. El proceso de excitación con iluminación intensa se denomina **bombeo óptico.**
- Un medio láser que tenga por lo menos *tres* niveles energéticos. Un estado fundamental; un estado intermedio (metastable) con un tiempo de vida relativamente largo, t_s; y un estado de bombeo de alta energía (figura 12.42). Para invertir la población, t_s debe ser mayor que t_2, el tiempo de vida del estado de bombeo E_2. Observe, también, que no es

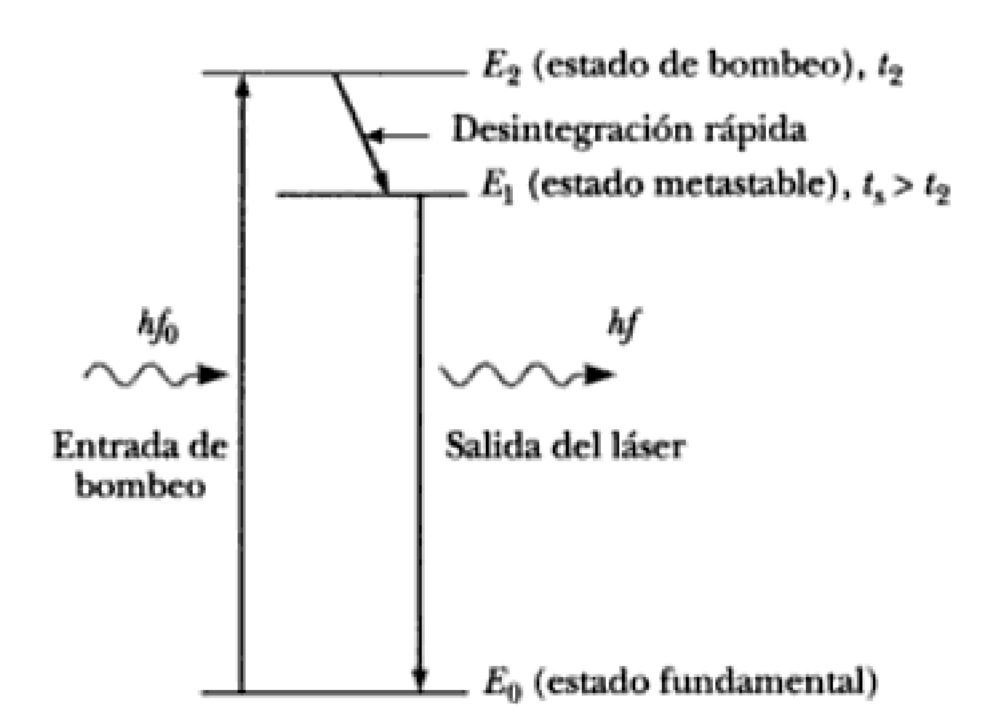


Figura 12.42 Sistema láser con tres niveles. El tiempo de vida del estado E_2 es t_2 y es t_s el tiempo de vida del estado E_1.

posible obtener amplificación con sólo dos niveles, debido a que tal sistema no es capaz de resistir una inversión de la población. Cuando mucho, es posible incrementar la población del estado superior en un sistema de dos niveles hasta igualarla a la población del estado inferior mediante un bombeo óptico extremadamente intenso. Un bombeo adicional sólo sirve para excitar tantas transiciones hacia abajo como hacia arriba, ya que la probabilidad de absorción es igual a la probabilidad de emisión estimulada para una transición *dada*. Para invertir la población, debe presentarse la absorción de energía para una transición *diferente* de la transición que experimenta emisión estimulada; de ahí la necesidad de un sistema con por lo menos tres niveles.

- Un método para contener dentro del láser los fotones emitidos inicialmente para que puedan estimular emisión adicional de otros átomos excitados. En la práctica, esto suele lograrse colocando espejos en los extremos del medio láser, de modo que los fotones pasen varias veces a través de éste. Así, el láser puede entenderse como un resonador u oscilador óptico con dos reflectores opuestos a ángulos rectos con respecto al haz de láser. La oscilación consta de una onda plana que rebota de un lado a otro entre los reflectores. Las ondas planas que se desplazan en direcciones opuestas, a su vez, generan un onda estacionaria altamente monocromática, que es más fuerte en resonancia cuando entre los reflectores cabe exactamente un número entero de semilongitudes de onda (figura 12.43). Para obtener un haz altamente colimado del láser, se hace que uno de los espejos paralelos sea ligeramente transmisor, de modo que una pequeña cantidad de energía escape de la cavidad.

Estos tres rasgos de los rayos láser conducen a varias características únicas de este tipo de luz, que la hacen una herramienta tecnológica más poderosa que la luz proveniente de fuentes normales. Estas características únicas son alta monocromaticidad, fuerte intensidad, coherencia espacial y baja divergencia del haz. En la tabla 12.10 se muestran valores típicos de estas cantidades para un láser gaseoso de baja potencia. En comparación con una simple línea de emisión en una intensa fuente de luz convencional, el láser de He-Ne es aproximadamente 100 veces más monocromático, genera casi 100 veces más potencia del haz, y tiene aproximadamente 1 000 veces más irradiación de salida (potencia por unidad de área). La divergencia, o dispersión, del haz se mide en miliradianes (mrad). Un láser de 1 mrad debe tener un diámetro de haz igual a 1 cm a una distancia de 10 m.

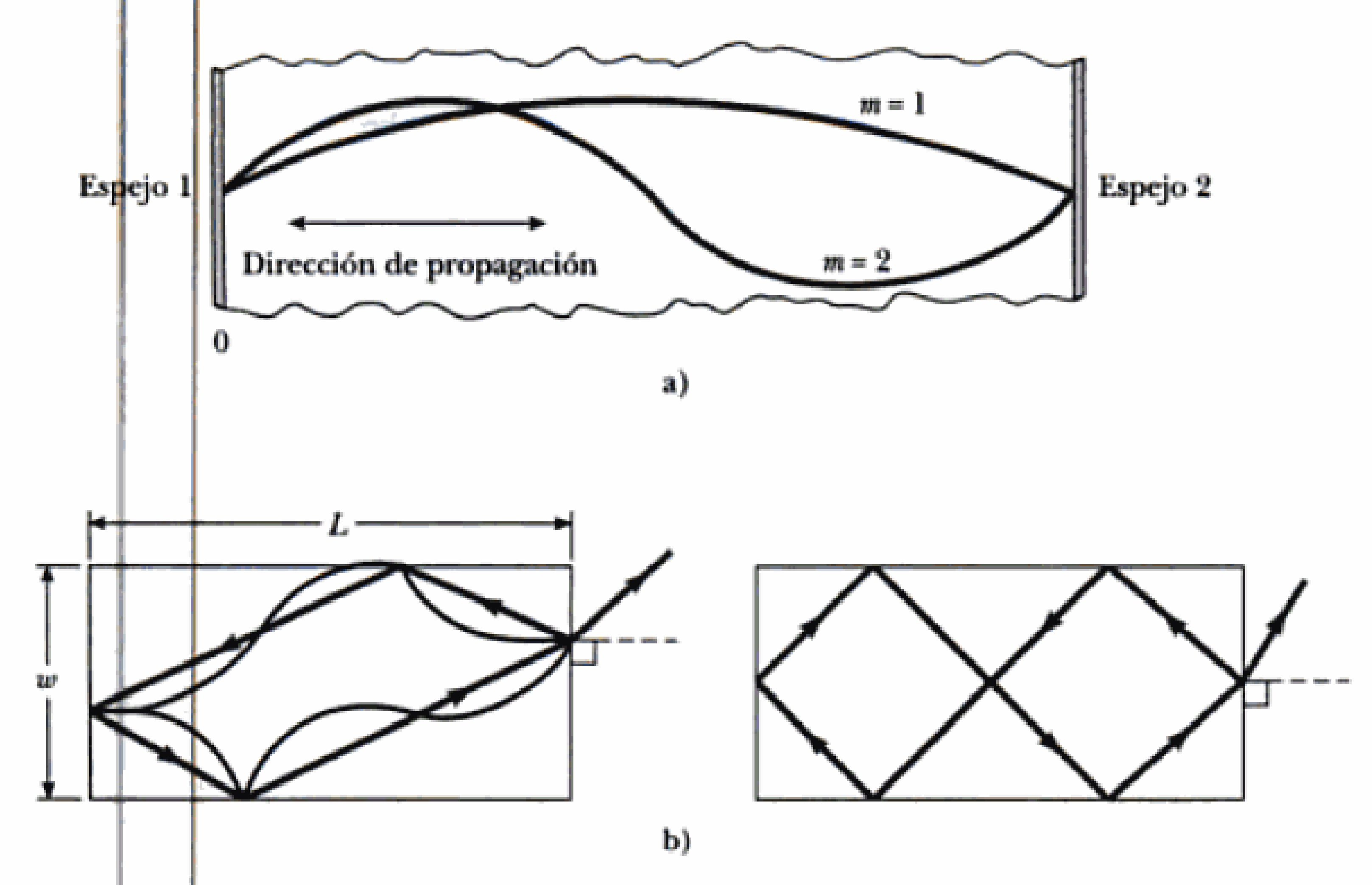


Figura 12.43 Modos de cavidad en un láser. a) Los modos longitudinales tienen $L = m\lambda/2$, donde m es un entero, λ es la longitud de onda del láser en el material de éste y L es la distancia entre los dos espejos. b) Pueden existir modos con componentes transversales si los extremos y los lados del láser se hacen reflectores. Las flechas muestran la dirección de propagación de los rayos de luz.

Láseres semiconductores

Una de las fuentes de luz más importantes para la comunicación con fibras ópticas es el láser semiconductor. Este láser se ajusta bastante bien a la comunicación con fibras ópticas debido a su tamaño pequeño (dimensión máxima igual a varios décimos de milímetro), elevada eficiencia (de 25% a 30%), sencillez, larga duración (las uniones *p-n* poseen tiempos de trabajo estimados de alrededor de 100 años), facilidad de modulación (a través del control de la corriente de unión), y respuesta rápida (que se extiende fácilmente al intervalo de los GHz). En la figura 12.44 se muestra una unión láser *p-n* típica de arseniuro de galio (GaAs) con sus valores nominales de operación. El primer láser semiconductor fue elaborado con GaAs y operado a 0.842 μm en el infrarrojo.[11,12] Poco después, Holonyak y Bevacqua reportaron la operación de un láser de

Tabla 12.10 Características típicas de un láser gaseoso de He-Ne

Monocromaticidad	Potencia del haz	Diámetro del haz a la salida del láser	Divergencia del haz
632.81 ± 0.002 nm	10 mW	0.50 mm	1 mrad

Irradiancia a la salida del láser	Irradiancia para un haz enfocado en un diámetro de 10-μm
5 100 mW/cm^2	1.27×10^7 mW/cm^2

[11] R. N. Hall, G. E. Fenner, J. D. Kingsley, T. J. Soltys y R. O. Carlson, "Coherent Light Emission from GaAs Junctions", *Phys. Rev. Lett.*, 9:336, 1962.

[12] M. I. Nathan, W. P. Dumke, G. Burns, F. H. Dill y G. Lasher, "Stimulated Emission of Radiation from GaAs *p-n* Junctions", *Appl. Phys. Lett.*, 1:62, 1962.

y variado. El láser de GaAs es un láser de unión única (fabricada a partir de un simple compuesto), pero muchos rayos actuales son de heterounión doble (DH, por sus iniciales en inglés), como los rayos láser de PbTe-PbSnTe y de GaAs-AlGaAs.[14] Cuando en el láser se forman dos uniones, los portadores inyectados están confinados en una región más estrecha, de modo que para el efecto láser se requiere una corriente crítica más baja, que permita una operación continua a temperatura ambiente. Además, al variar la cantidad de Sn o Al en la aleación terciaria, es posible modificar la energía de la banda de separación y, en consecuencia, la longitud de onda del haz. También, resulta relativamente fácil fabricar uniones multicapas de GaAs-AlGaAs, ya que las capas de AlGaAs pueden crecer epitelialmente sobre capas de GaAs. Pueden formarse rayos láser DH con muchos otros compuestos, incluyendo aleaciones cuaternarias, y es posible fabricar rayos láser sintonizables cuyas longitudes de onda de emisión pueden variarse mediante cambios en la presión o en el campo magnético aplicados. Estas técnicas han resultado en rayos láser semiconductores que abarcan el amplio intervalo desde 0.3 hasta 40 μm. Este y otros desarrollos en el campo de los rayos láser semiconductores, que es una verdadera combinación fascinante de óptica, ciencia de materiales y física de dispositivos, se abordan con más detalle en algunas de las obras mencionadas en la bibliografía adicional que se presenta al final de este capítulo.

RESUMEN

Los mecanismos de enlace en sólidos pueden clasificarse de manera semejante a como se utilizan para describir las uniones de los átomos para formar moléculas. Los **sólidos iónicos,** como el NaCl, se forman debido a la fuerza de atracción neta de Coulomb entre iones positivos y negativos vecinos. Los cristales iónicos son bastante fuertes, tienen altos puntos de fusión y poseen altas energías de cohesión de varios electrón-volts. Los **sólidos covalentes,** como el diamante, se forman cuando los electrones de valencia son compartidos por átomos adyacentes, lo que produce uniones de gran estabilidad. Los sólidos covalentes suelen ser muy duros, con altos puntos de fusión y energías de cohesión más altas, que varían hasta 8 eV por átomo. Los **sólidos metálicos** se mantienen juntos debido al enlace metálico, que se debe a la fuerza de atracción entre los núcleos de iones positivos y el "gas" de electrones. Este gas de electrones actúa como un tipo de "cemento" que mantiene juntos a los núcleos de iones. En general, los sólidos metálicos son más suaves y tienen energías de cohesión menores que los sólidos covalentes. Los sólidos con uniones más débiles son los **cristales moleculares,** que se mantienen unidos debido a las fuerzas de Van der Waals o dipolo-dipolo. Los cristales moleculares, como el argón sólido, tienen bajos puntos de fusión y baja fuerza de cohesión, del orden de 0.1 eV por molécula.

El modelo clásico de los electrones libres para los metales suele tener éxito al explicar las propiedades eléctricas y térmicas de los metales. Según esta teoría, un metal es modelado por un gas de electrones de conducción que se mueven a través de una red fija de núcleos de iones. Tomando en cuenta las colisiones de los electrones contra la red, el modelo clásico de los electrones libres predice que los metales cumplen la ley de Ohm, $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, donde la conductividad eléctrica σ está dada por

$$\sigma = \frac{ne^2L}{(3k_BTm_e)^{1/2}} \tag{12.15}$$

[14]El PbSnTe y el AlGaAs se denominan *aleaciones terciarias* (con tres elementos). Son soluciones sólidas cristalinas donde el Sn y el Al sustituyen aleatoriamente a algunos átomos de Pb y Ga, respectivamente.

La amplificación de la luz a partir de una transición atómica particular y la generación de un haz intenso, monocromático, coherente y altamente colimado (acción láser) puede lograrse si se cumplen ciertas condiciones:

- El medio láser debe contener por lo menos tres niveles energéticos: un estado fundamental, un estado intermedio con alto tiempo de vida y un estado de bombeo de alta energía.
- Debe haber una fuente de energía eléctrica u óptica capaz de "bombear" átomos hacia estados excitados más rápido de lo que salen, para producir una inversión de la población.
- Debe haber un método para confinar la primera onda de fotones emitidos dentro del láser, de modo que puedan estimular emisión adicional.

Los rayos láser actuales incluyen los cristalinos de estado sólido como el de rubí, los gaseosos como el de He-Ne, y los semiconductores como el de GaAs. La fuente de luz más importante para el procesamiento de señales ópticas es el láser semiconductor, el cual es esencialmente una unión *p-n* sujeta a una intensa polarización directa. Algunas ventajas típicas de estos rayos son su pequeño tamaño, alta eficiencia, sencillez, facilidad de modulación y respuesta rápida.

BIBLIOGRAFÍA ADICIONAL SUGERIDA

1. R. Zallen, *The Physics of Amorphous Solids*, Nueva York, John Wiley and Sons, 1983. Un tratamiento detallado de los sólidos amorfos a nivel del último curso universitario. En este texto se ha puesto bastante cuidado al introducir verbalmente nuevos conceptos antes de penetrar en razonamientos matemáticos.
2. T. R. Reid, *The Chip: How Two Americans Invented the Microchip and Launched a Revolution*, Nueva York, Simon and Schuster, 1984. Una historia informal, no matemática y sumamente interesante de los microcircuitos.
3. B. G. Streetman, *Solid State Electronic Devices*, 2a. edición, Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall, 1980. Un tratamiento detallado de los dispositivos a nivel de los dos últimos cursos universitarios.
4. W. Shockley, *Electrons and Holes in Semiconductors*, Melbourne, FL, Krieger Publishing Co., 1950. La clásica "biblia" sobre semiconductores. Aunque algo antiguo, el libro es un compendio maravilloso de las ideas de Shockley en el campo de la física de semiconductores. Empieza a un nivel introductorio muy claro y casi a la mitad llega a niveles universitarios avanzados y de posgrado.
5. C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 7a. edición, Nueva York, John Wiley and Sons, 1996. Tratamiento detallado, completo y actualizado sobre la física de estado sólido a nivel universitario avanzado.

Bibliografía sobre rayos láser

6. C. K. N. Patel, "High-Power Carbon Dioxide Lasers", *Sci. Amer.*, agosto de 1968, pp. 22-23.
7. A. L. Schawlow, "Laser Light", *Sci. Amer.*, septiembre de 1968, pp. 120-126.

En las siguientes publicaciones pueden consultarse tratamientos más avanzados sobre los rayos láser.

8. J. I. Pankove, *Optical Processes in Semiconductors*, Nueva York, Dover Publications, 1971.
9. S. M. Sze, *Physics of Semiconductor Devices*, 2a. edición, Nueva York, John Wiley and Sons, 1981.

PREGUNTAS

1. Explique cómo las bandas de energía de los metales, semiconductores y aislantes explican las siguientes propiedades ópticas generales: a) Los metales son opacos a la luz visible. b) Los semiconductores son opacos a la luz visible pero transparentes a la infrarroja (muchas lentes IR se hacen con germanio). c) Muchos aislantes, como el diamante, son transparentes a la luz visible.
2. La tabla 12.8 muestra que las separaciones de energía de los semiconductores disminuyen conforme aumenta la temperatura. ¿Qué explica este comportamiento?
3. La resistividad de casi todos los metales crece con el aumento de temperatura, mientras la resistividad de un semiconductor disminuye conforme aumenta la temperatura. ¿Qué explica esta diferencia de comportamiento?
4. Analice las diferencias entre las estructuras de las bandas de metales, aislantes y semiconductores. ¿Cómo permite comprender mejor las propiedades eléctricas de estos materiales el modelo de la estructura de bandas?
5. Analice las propiedades eléctricas, físicas y ópticas de los sólidos enlazados iónicamente.

6. Analice las propiedades eléctricas, físicas y ópticas de los sólidos enlazados covalentemente.
7. Cuando un fotón es absorbido por un semiconductor, se dice que se crea un par electrón-hueco. Proporcione una explicación física de este concepto, usando el modelo de las bandas de energía como base para su descripción.
8. En un semiconductor como el silicio, átomos pentavalentes como el arsénico son donantes, y átomos trivalentes como el indio son aceptantes. Analice la tabla periódica que aparece al final del libro y determine qué otros elementos podrían considerarse como donantes o como aceptantes.
9. Explique la forma en que opera un diodo *p-n* como rectificador, celda solar y como LED.
10. ¿Cuáles son las hipótesis básicas que se establecen en la teoría clásica de los electrones libres para los metales? ¿Cómo difiere el modelo de bandas de energía con la teoría clásica de los electrones libres en cuanto a la descripción de las propiedades de los metales?
11. Explique las semejanzas de la conducción eléctrica y la conducción de calor en los metales.
12. Analice las diferencias entre los sólidos cristalinos, los sólidos amorfos y los gases.
13. Analice las fuentes físicas de la resistencia eléctrica en un metal. ¿La resistencia depende de las intensas reflexiones que se establecen cuando la separación de la red es igual a un número entero de longitudes de onda?
14. ¿Es razonable que el promedio del cuadrado de una cantidad sea mayor que el cuadrado del promedio? (Recuerde de la sección 12.2 que $\bar{t} = \tau$ y $\overline{t^2} = 2\tau^2$.)
15. ¿En qué son semejantes las ecuaciones que rigen el flujo de calor y el flujo de carga para los metales?
16. La emisión radiactiva de un átomo puede ser espontánea o estimulada. Establezca la diferencia entre estos dos procesos, identificando los rasgos característicos de cada uno. Describa el (los) papel(es) que desempeña cada uno en la operación de un láser.
17. ¿Por qué es necesario que un medio láser tenga por lo menos tres niveles energéticos?
18. Debido a que la luz de rayos láser semiconductores puede modificarse con facilidad, estos rayos se utilizan bastante en sistemas de comunicación de ondas de luz. Demuestre que los sistemas de comunicación láser poseen una gran ventaja sobre los sistemas de comunicación de microondas en términos de la cantidad de información que puede transportarse. (*Sugerencia:* Si cada canal de audio requiere un ancho de banda de 5 kHz, calcule el número de canales transportados por un haz de láser de 10^{16} Hz y por un haz de microondas de 10^{10} Hz.)
19. Analice los criterios más importantes que deben cumplirse para obtener acción láser en un sistema de tres niveles.
20. ¿Cuáles son las tres formas fundamentales en que la luz (fotones) interactúa con la materia (átomos)? Explique brevemente cada una.
21. Suponga que K es una constante positiva en la ecuación 12.18 y explique por qué en esta ecuación aparece un signo negativo.
22. Explique por qué los pares de Cooper no son dispersadas por iones positivos de la red en un metal.

PROBLEMAS

12.1 Enlace en sólidos

1. Demuestre que la energía potencial mínima de un par de iones en un sólido *iónico* es

$$U_0 = -\alpha k \frac{e^2}{r_0}\left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

donde r_0 es la separación en equilibrio entre iones, α es la constante de Madelung y la energía potencial de repulsión entre iones es B/r^m. $|U_0|$ se denomina *energía de cohesión iónica* y es la energía necesaria para separar hasta el infinito un par de iones originalmente a una separación r_0 en el cristal. *Sugerencia:*

$$\left.\frac{dU}{dr}\right|_{r=r_0} = 0$$

2. Demuestre que el ángulo entre los enlaces de carbono que se muestran en la figura 12.3a es igual a 109.5°.
3. Calcule la energía de cohesión iónica para el NaCl, usando la ecuación 12.3. Tome $\alpha = 1.7476$, $r_0 = 0.281$ nm, y $m = 8$.
4. El LiCl, que tiene la misma estructura cristalina que el NaCl, posee $r_0 = 0.257$ nm y tiene una energía de cohesión iónica medida de 199 kcal/mol. a) Encuentre el valor entero de m que coincida mejor con el valor medido 199 kcal/mol. b) ¿El valor de U_0 es muy sensible a un cambio en m? Calcule el cambio porcentual en U_0 cuando m crece por 1.
5. Considere una cadena unidimensional de iones positivos y negativos de manera alternada. Demuestre que la energía potencial de un ion en este cristal hipotético es

$$U(r) = -k\alpha \frac{e^2}{r}$$

donde $\alpha = 2 \ln 2$ (la constante de Madelung), y r es la separación interiónica. [*Sugerencia:* Aplique el desarrollo en series de $\ln(1 + x)$.]

6. a) Demuestre que la fuerza sobre un ion en un sólido iónico puede escribirse como

$$F = -k\alpha \frac{e^2}{r^2}\left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{m-1}\right]$$

donde r_0 es la separación en equilibrio y α es la constante de Madelung. (*Sugerencia:* Utilice el valor de B encontrado en el problema 1.) b) Suponga que se desplaza un ion en el sólido una pequeña distancia x de r_0, y

16. A partir del espectro de absorción óptico de cierto semiconductor, se encuentra que la longitud de onda más larga de la radiación absorbida es 1.85 μm. Calcule la separación de energía para este semiconductor.

17. La forma más sencilla para modelar la separación de niveles energéticos producida cuando dos átomos originalmente aislados se aproximan entre sí es mediante dos pozos finitos. En este modelo, el potencial de Coulomb experimentado por el electrón más externo en cada átomo se aproxima por un pozo cuadrado finito unidimensional de profundidad U y ancho a. Los niveles energéticos para dos átomos próximos entre sí pueden encontrarse resolviendo la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para un potencial que consta de dos pozos finitos separados por una distancia b. a) Inicie la resolución de este problema encontrando primero la solución al simple pozo finito que se muestra en la figura P12.17a. Justifique las soluciones enumeradas para las regiones I, II y III, y establezca condiciones en la frontera normales (ψ y $d\psi/dx$ continuas en $x = 0$ y $x = a$) a fin de obtener una ecuación trascendente para las energías del estado de unión. b) Resuelva numéricamente las energías del estado de unión cuando un electrón está confinado a un pozo con $U = 100$ eV y $a = 1$ Å. Debe encontrar dos estados de unión aproximadamente a 19 y 70 eV. c) Ahora considere los pozos finitos separados por una distancia b, como se muestra en la figura P12.17b. Imponga las condiciones de continuidad sobre ψ y $d\psi/dx$ en $x = 0$ y $x = a$ para obtener

$$\frac{D}{E'} = \frac{2e^{-2Ka}[\cos ka + \frac{1}{2}(K/k - k/K)\operatorname{sen} ka]}{(k/K + K/k)\operatorname{sen} ka}$$

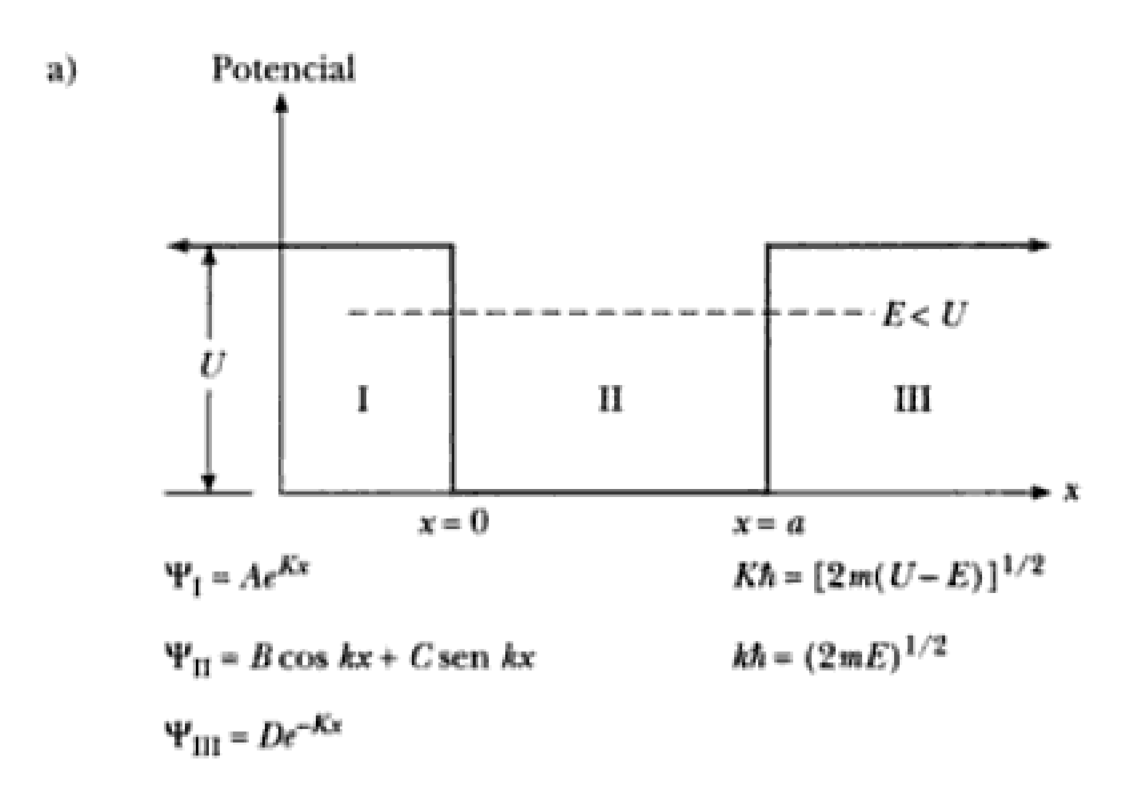
Demuestre que las condiciones en la frontera en $x = a + b$ producen

$$\frac{F}{G} = \frac{(D/E')e^{\beta}[\cos\alpha - (K/k)\operatorname{sen}\alpha] + e^{-\beta}[\cos\alpha + (K/k)\operatorname{sen}\alpha]}{(D/E')e^{\beta}[\operatorname{sen}\alpha + (K/k)\cos\alpha] + e^{-\beta}[\operatorname{sen}\alpha - (K/k)\cos\alpha]}$$

donde $\alpha = k(a + b)$ y $\beta = K(a + b)$. Las condiciones en la frontera en $x = 2a + b$ producen

$$\frac{F}{G} = \frac{\cos k(2a + b) + (K/k)\operatorname{sen} k(2a + b)}{\operatorname{sen} k(2a + b) - (K/k)\cos k(2a + b)}$$

Así, las dos expresiones para F/G pueden igualarse y la expresión para D/E' puede usarse a fin de obtener una ecuación trascendente para la energía E. d) Resuelva las energías del estado de unión cuando $U = 100$ eV y $a = b = 1$ Å. Debe observar una doble separación de las energías del estado de unión encontradas a 19 y 70 eV para el pozo único.



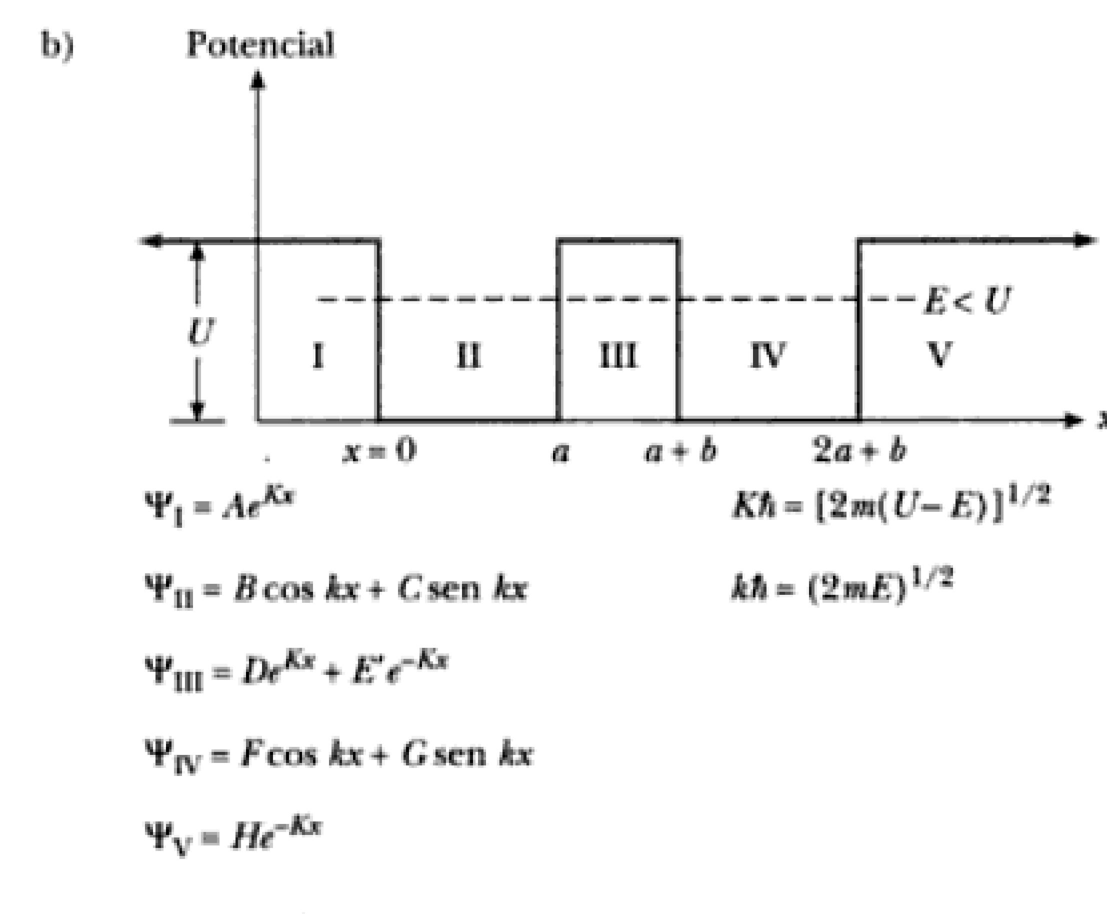


Figura P12.17 a) Potencial y funciones propias para un simple pozo finito de profundidad U, donde $E < U$. b) Potencial y funciones propias para dos pozos finitos. El ancho de cada pozo es a, y la distancia de separación entre los pozos es b.

12.5 Dispositivos semiconductores

18. Es posible calcular de manera aproximada la débil energía de enlace de un electrón donante, así como su radio orbital, en un semiconductor con base en la teoría del átomo de Bohr. Recuerde que para un simple electrón ligado a un núcleo de carga Z, la energía de enlace del estado fundamental o base está dada por

$$\frac{ke^2Z^2}{2a_0} = 13.6Z^2 \text{ eV} \qquad (4.36)$$

y que el radio del estado fundamental está dado por

$$r_1 = a_0/Z \qquad (4.35)$$

Para el caso de un átomo de fósforo donante en el silicio, el electrón donante más externo es atraído por una carga nuclear de $Z = 1$. No obstante, debido a que el núcleo del fósforo está incrustado en el silicio polarizable, la carga nuclear efectiva observada por el electrón se reduce a Z/κ, donde κ es la constante dieléctrica. a) Calcule la energía de unión de un electrón donante en Si ($\kappa = 12$) y en Ge ($\kappa = 16$), y compare con la energía térmica disponible a temperatura ambiente. b) Calcule el radio de la primera órbita de Bohr de un electrón

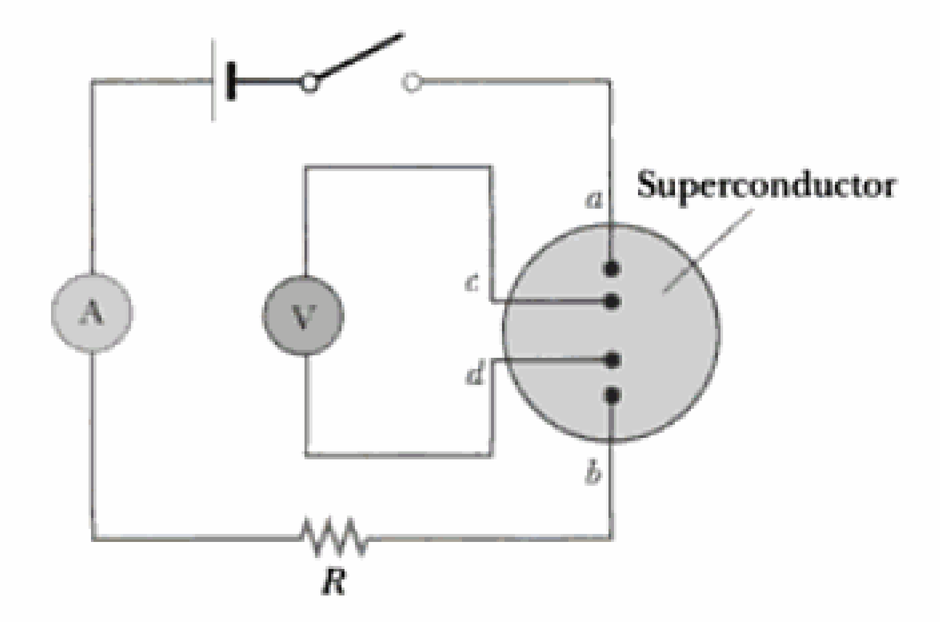


Figura P12.23 Diagrama de circuitos utilizado en la medición de la resistencia de una muestra al voltaje cd con una sonda de cuatro puntos. Se utiliza un amperímetro digital cd para medir la corriente y la diferencia de potencial entre *c* y *d* se mide con un voltímetro digital. Observe que no hay fuente de voltaje en el circuito interior donde se está midiendo ΔV_{cd}.

Tabla P12.23 Corriente contra la diferencia de potencial ΔV_{cd} medidas en una muestra voluminosa de cerámica de $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ a temperatura ambiente

I (mA)	ΔV_{cd} (mV)
57.8	1.356
61.5	1.441
68.3	1.602
76.8	1.802
87.5	2.053
102.2	2.398
123.7	2.904
155	3.61

digital. Cuando la sonda se sumerge en nitrógeno líquido, la muestra se enfría rápidamente a 77 K, por debajo de la temperatura crítica del material, 92 K. La corriente permanece aproximadamente constante, pero ΔV_{cd} *baja en forma abrupta a cero.* a) Explique esta observación con base en sus conocimientos acerca de los superconductores. b) Los datos en la tabla P12.23 representan valores reales de ΔV_{cd} para diferentes valores de I tomados sobre la muestra a temperatura ambiente. La corriente es suministrada por una batería de 6 V conectada en serie con un resistor variable R. Los valores de R variaron desde 10 Ω hasta 100 Ω. Los datos son del laboratorio del autor [RAS]. Haga una gráfica I–ΔV de los datos y determine si la muestra se comporta en forma lineal. A partir de los datos, obtenga un valor para la resistencia cd de la muestra a temperatura ambiente. c) A temperatura ambiente se encontró que $\Delta V_{cd} = 2.234$ mV para $I = 100.3$ mA, pero después que la muestra se enfría a 77 K, se tiene $\Delta V_{cd} = 0$ e $I = 98.1$ mA. ¿Qué cree que pudo provocar la ligera disminución en la corriente?

24. Bajo presión, el helio líquido puede solidificarse cuando cada átomo se enlaza con otros cuatro, y cada enlace tiene una energía media de 1.74×10^{-23} J. Encuentre el calor latente de fusión para el helio en joules por gramo. (La masa molar del He es 4 g/mol.)
25. Un diodo, un resistor y una batería se conectan en un circuito en serie. El diodo está a la temperatura para la cual $k_B T = 25$ meV y tiene una corriente de saturación de 1 μA. La resistencia del resistor es 745 Ω y la batería mantiene una diferencia de potencial constante de 2.42 V. a) Encuentre gráficamente la corriente en el circuito. Proceda como sigue: sobre los mismos ejes, grafique la corriente I_D en el diodo y la corriente I_W en el alambre contra el voltaje ΔV a través del diodo. Escoja valores de ΔV que varíen de 0 a 0.250 V en pasos de 0.025 V. Determine el valor de ΔV en la intersección de las dos líneas de las gráficas y calcule las corrientes correspondientes I_D e I_W. ¿Coinciden? b) Encuentre la resistencia óhmica del diodo, que se define como la razón $\Delta V/I_D$. c) Encuentre la resistencia dinámica del diodo, que se define como la derivada $d(\Delta V)/dI_D$.

13
Estructura nuclear

Contenido del capítulo

En 1896, el año que señala el nacimiento de la física nuclear, el físico francés Henri Becquerel (1852-1908) descubrió la radiactividad en compuestos de uranio. Luego de este descubrimiento, los científicos realizaron exhaustivas investigaciones en un esfuerzo por comprender la naturaleza de la radiación emitida por núcleos radiactivos. La obra pionera de Ernest Rutherford demostró que la radiación emitida era de tres tipos: rayos alfa, beta y gamma. Rutherford clasificó los rayos dependiendo de la naturaleza de las cargas eléctricas que poseían y sus capacidades para penetrar en la materia e ionizar el aire. Experimentos posteriores demostraron que los rayos alfa son núcleos de helio, que los rayos beta son electrones y que los rayos gamma son fotones de alta energía.

En 1911 Rutherford y sus estudiantes Geiger y Marsden realizaron varios experimentos importantes de dispersión en los que se utilizaban partículas alfa. Los resultados establecieron que el núcleo de un átomo puede considerarse esencialmente como una masa y carga puntual y que la mayor parte de la masa atómica está contenida en el núcleo. Estudios posteriores revelaron la presencia de un tipo desconocido de fuerza de corto alcance, la fuerza nuclear, que predomina a distancias menores, de aproximadamente 10^{-14} m, y que se anula a grandes distancias.



Ernest Rutherford (1871-1937), físico neozelandés, fue galardonado con el premio Nobel en 1908 por haber descubierto que los átomos pueden separarse utilizando rayos alfa y por haber estudiado la radiactividad. "Al considerarlo, me di cuenta que esta dispersión hacia atrás debía ser el resultado de una simple colisión, y cuando hice cálculos observé que era imposible obtener algo de ese orden de magnitud, a menos que se considerase un sistema donde la mayor parte de la masa del átomo estuviera concentrada en un núcleo diminuto. Entonces fue que se me ocurrió la idea de un átomo con un centro masivo minúsculo transportando una carga." (*Foto cortesía de AIP Niels Bohr Library.*)

Otros eventos importantes en el desarrollo de la física nuclear incluyen:

- La observación de reacciones nucleares en 1930 por Cockroft y Walton, usando partículas aceleradas en forma *artificial.*
- El descubrimiento del neutrón en 1932 por Chadwick y la conclusión de que los neutrones constituyen casi la mitad del núcleo.
- El descubrimiento de la radiactividad artificial en 1933 por Joliot e Irene Curie.
- El descubrimiento de la fisión nuclear en 1938 por Meitner, Hahn y Strassmann.
- El desarrollo del primer reactor de fisión controlada en 1942 por Fermi y sus colaboradores.

En este capítulo se analizan las propiedades y la estructura del núcleo atómico. Se describen las propiedades básicas de los núcleos, las fuerzas nucleares y la energía de ligadura, los modelos nucleares y el fenómeno de la radiactividad, y los procesos por los que se desintegran los núcleos.

13.1 ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS NÚCLEOS

Todos los núcleos están constituidos por dos tipos de partículas: protones y neutrones. La única excepción es el núcleo de hidrógeno normal, que es un simple protón. Para describir el núcleo atómico es necesario utilizar las siguientes cantidades:

- El **número atómico,** Z (algunas veces denominado *número de carga*), que es igual al número de protones en el núcleo.
- El **número de neutrones,** N, que es igual al número de neutrones en el núcleo.
- El **número de masa,** A, que es igual al número de nucleones (neutrones más protones) en el núcleo.

Al representar núcleos, conviene tener un sistema de símbolos para mostrar cuántos protones y neutrones hay. El símbolo usado es $^{A}_{Z}X$, donde X representa el símbolo químico del elemento. Por ejemplo, el $^{56}_{26}Fe$(hierro) tiene un número de masa de 56 y un número atómico de 26; en consecuencia, tiene 26 protones y 30 neutrones. Cuando no hay posibilidad de confusión, se omite el subíndice Z porque para determinar Z siempre puede usarse el símbolo químico.

Los núcleos de todos los átomos de un elemento particular tienen el mismo número de protones, pero a menudo tienen diferente número de neutrones. Los núcleos que están relacionados de esta manera se denominan **isótopos.**

Isótopos

Los isótopos de un elemento tienen el mismo valor Z pero diferentes valores N y A.

La abundancia natural de los isótopos puede diferir sustancialmente unos de otros. Por ejemplo, $^{11}_{6}C$, $^{12}_{6}C$ $^{13}_{6}C$ y $^{14}_{6}C$ son cuatro isótopos del carbono. La abundancia natural del isótopo $^{12}_{6}C$ es alrededor de 98.9%, mientras que la del isótopo $^{13}_{6}C$ es de sólo aproximadamente 1.1%. Algunos isótopos no existen naturalmente, pero es posible producirlos en el laboratorio mediante reacciones nucleares. Incluso el elemento más simple, el hidrógeno, tiene isótopos: $^{1}_{1}H$, el núcleo normal del hidrógeno; $^{2}_{1}H$, deuterio; y $^{3}_{1}H$, tritio.

EJEMPLO 13.1 Unidad de masa atómica

Use el número de Avogadro para demostrar que la unidad de masa atómica es $1\ u = 1.66 \times 10^{-27}$ kg.

Solución Se sabe que exactamente 12 g de ^{12}C contienen el número de Avogadro de átomos. El número de Avogadro, N_A, tiene el valor de 6.02×10^{23} átomos/mol. Así, la masa de un átomo de carbono es

$$\text{masa de un átomo de } ^{12}\text{C átomos} = \frac{0.012\ \text{kg}}{6.02 \times 10^{23}\ \text{átomos}} = 1.99 \times 10^{-26}\ \text{kg}$$

Debido a que un átomo de ^{12}C tiene una masa de 12 u, se encuentra que

$$1\ u = \frac{1.99 \times 10^{-26}\ \text{kg}}{12} = 1.66 \times 10^{-27}\ \text{kg}$$

Tamaño y estructura de los núcleos

El tamaño y la estructura de los núcleos fueron investigados por primera vez en los experimentos de dispersión de Rutherford, analizados en la sección 4.2. En estos experimentos, Rutherford dirigió núcleos de átomos de helio (partículas alfa) cargados positivamente hacia una delgada lámina metálica. A medida que las partículas α se movían a través de ella, a menudo pasaban cerca de un núcleo del metal. Debido a la carga positiva tanto de las partículas incidentes como de los núcleos, las partículas se desviaban de sus trayectorias rectilíneas debido a la fuerza de repulsión de Coulomb. De hecho, incluso algunas partículas se desviaban hacia atrás, describiendo un ángulo de 180° con respecto a la dirección de incidencia. Estas partículas, en apariencia, se movían directamente en una dirección de colisión frontal hacia un núcleo.

Rutherford empleó un cálculo de energía y encontró una expresión para la distancia, d, a la que una partícula que se aproxima a un núcleo da la vuelta debido a la repulsión de Coulomb. En tal colisión frontal, la energía cinética de la partícula alfa incidente debe transformarse por completo en energía potencial eléctrica cuando la partícula se detiene en el punto de aproximación máxima y da la vuelta (figura 13.1). Si la energía cinética de la partícula alfa es igual a la energía potencial eléctrica del sistema (partícula alfa más núcleo objetivo), se tiene

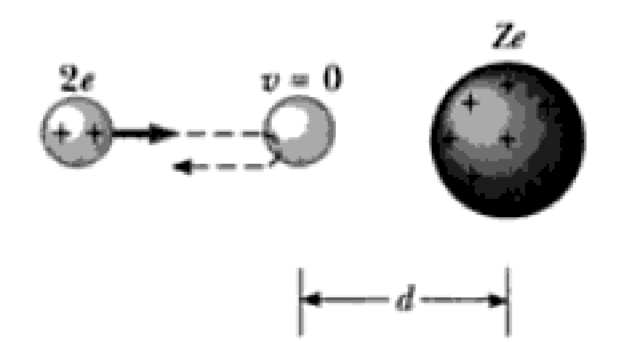


Figura 13.1 Partícula alfa en dirección de una colisión frontal con un núcleo de carga Ze. Debido a la repulsión de Coulomb entre cargas semejantes, la partícula alfa se acerca a una distancia d del núcleo, denominada *distancia de aproximación máxima.*

$$\tfrac{1}{2} mv^2 = k\frac{q_1 q_2}{r} = k\frac{(2e)(Ze)}{d}$$

Al despejar d, la distancia de aproximación máxima, se obtiene

$$d = \frac{4kZe^2}{mv^2}$$

A partir de esta expresión, Rutherford encontró que partículas α de 7 MeV se aproximaban a los núcleos a menos de 3.2×10^{-14} m cuando la lámina era de oro. Así, el radio del núcleo de oro debe ser menor que este valor. Para átomos de plata, se encontró que la distancia de aproximación máxima era 2×10^{-14} m. Con base en estos resultados, Rutherford concluyó que la carga positiva en un átomo está concentrada en una pequeña esfera de radio aproximadamente igual a 10^{-14} m, que denominó núcleo. Debido a que estas pequeñas dimensiones son comunes en física nuclear, una unidad de longitud conveniente es el femtómetro (fm), algunas veces denominado **fermi,** definido como

$$1\ \text{fm} \equiv 10^{-15}\ \text{m}$$

A principios de 1920, por el trabajo de Rutherford, Bohr y Moseley, se sabía que el núcleo contenía Z protones con una carga $+Ze$, pero que tenía una masa

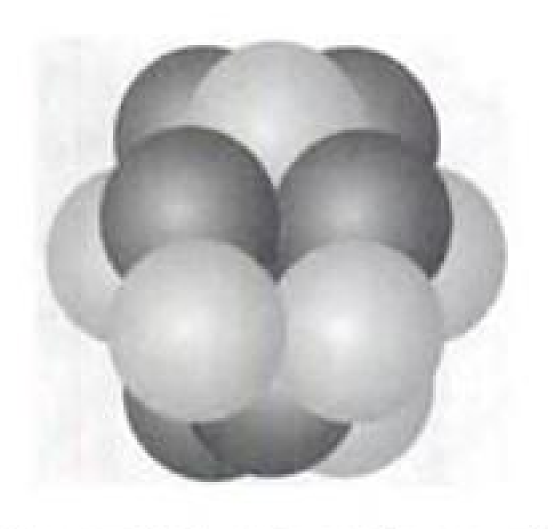


Figura 13.3 Un núcleo puede modelarse como una acumulación de esferas estrechamente empacadas, cada una de las cuales es un nucleón.

donde A es el número de masa y r_0 es una constante igual a 1.2×10^{-15} m. Debido a que el volumen de una esfera es proporcional al cubo de su radio, de la ecuación 13.1 se concluye que el volumen de un núcleo (suponiendo que es esférico) es directamente proporcional a A, el número total de nucleones. Esto sugiere que **todos los núcleos tienen aproximadamente la misma densidad.** Cuando los nucleones se combinan para formar un núcleo, lo hacen como si fuesen esferas estrechamente empacadas (figura 13.3). Esto ha conducido a una analogía entre el núcleo y una gota de líquido, donde la densidad de la gota es independiente de su tamaño. El modelo de la gota líquida se analizará en la sección 13.3.

EJEMPLO 13.2 Volumen y densidad de un núcleo

Encuentre a) una expresión aproximada para la masa de un núcleo con número de masa A, b) una expresión para el volumen de este núcleo en términos del número de masa y c) un valor numérico para su densidad.

Solución a) La masa del protón es aproximadamente igual a la del neutrón. Por tanto, si la masa de una de estas partículas es m, entonces la masa del núcleo es aproximadamente Am.

b) Suponiendo que el núcleo es esférico y usando la ecuación 13.1, se encuentra que el volumen es

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r_0{}^3 A$$

c) La densidad nuclear puede encontrarse como sigue:

$$\rho_n = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}} = \frac{Am}{\frac{4}{3}\pi r_0{}^3 A} = \frac{3m}{4\pi r_0{}^3}$$

Al tomar $r_0 = 1.2 \times 10^{-15}$ m y $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg, se encuentra que

$$\rho_n = \frac{3(1.67 \times 10^{-27}\text{ kg})}{4\pi(1.2 \times 10^{-15}\text{ m})^3} = 2.3 \times 10^{17}\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

¡La densidad nuclear es aproximadamente 2.3×10^{14} veces la densidad del agua ($\rho_{\text{agua}} = 1 \times 10^3$ kg/m^3)!

Estabilidad nuclear

El núcleo consta de un conjunto de protones y neutrones estrechamente empacados. Cargas semejantes (los protones) próximas entre sí ejercen mutuamente fuerzas electrostáticas de repulsión muy grandes, lo cual debería provocar la separación del núcleo. No obstante, los núcleos son estables debido a la presencia de la **fuerza nuclear.** Ésta es una fuerza de atracción, de muy corto alcance (alrededor de 2 fm), que actúa entre *todas* las partículas nucleares. Los protones se atraen mutuamente mediante la fuerza nuclear, y al mismo tiempo se repelen entre sí debido a la fuerza de Coulomb. La fuerza de atracción nuclear también actúa entre pares de neutrones y entre neutrones y protones.

Hay aproximadamente 260 núcleos estables; se han observado cientos de núcleos más, pero son inestables. La figura 13.4 es una gráfica de N contra Z para algunos núcleos estables. Observe que los núcleos ligeros son más estables si contienen igual número de protones y neutrones; es decir, si $N = Z$. Más aún, los núcleos pesados son más estables si el número de neutrones supera al de protones. Esto puede comprenderse al reconocer que a medida que aumenta el número de protones, la intensidad de la fuerza de Coulomb se incrementa, lo cual tiende a separar al núcleo. Como resultado, para mantener estable al núcleo se requieren más neutrones, ya que estos sólo experimentan fuerzas de atracción nuclear. Finalmente, las fuerzas de repulsión entre los protones no pueden compensarse por la adición de más neutrones; esto ocurre cuando $Z = 83$. Elementos que contienen más de 83 protones no tienen núcleos estables.

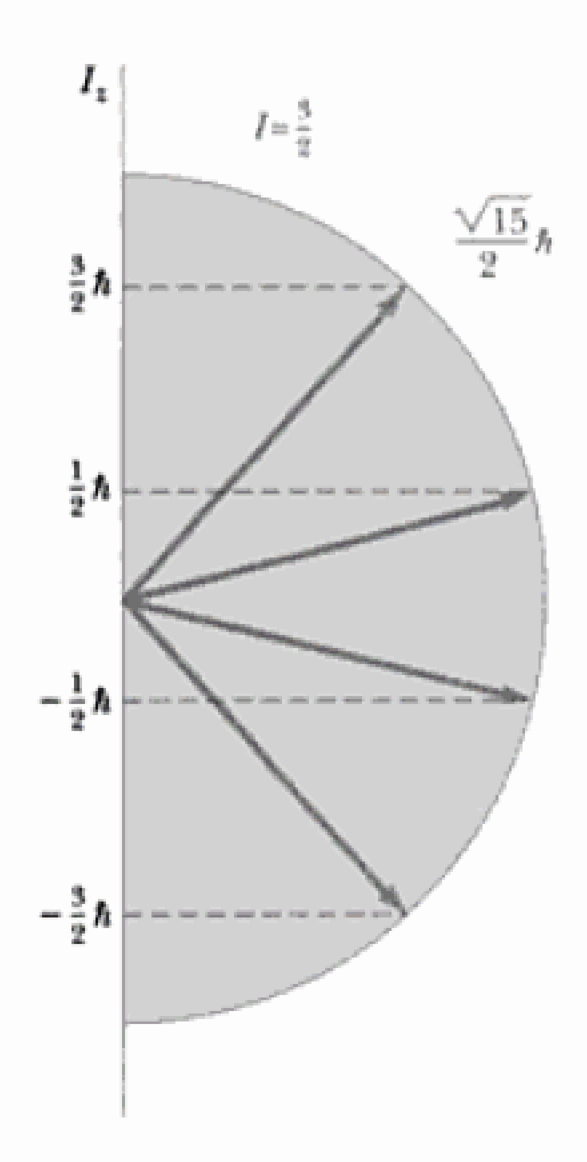


Figura 13.5 Orientaciones posibles del momento angular nuclear y sus proyecciones a lo largo del eje z para el caso $I = \frac{3}{2}$

incluyendo el momento angular orbital y de espín de cada nucleón. La componente máxima del momento angular proyectado a lo largo del eje z es $I\hbar$. En la figura 13.5 se ilustran las orientaciones posibles del momento angular nuclear y sus proyecciones a lo largo del eje z para el caso en que $I = \frac{3}{2}$.

El momento angular nuclear tiene asociado un momento magnético nuclear semejante al de los electrones. El momento magnético de un núcleo se mide en términos del **magnetón nuclear** μ_n, una unidad del momento magnético definida como

$$\mu_n = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5.05 \times 10^{-27}\,\mathrm{J/T} \tag{13.3}$$

donde m_p es la masa del protón. Esta definición es semejante a la del magnetón de Bohr, μ_B, que corresponde al momento magnético de espín de un electrón libre (sección 9.2). Observe que μ_n es menor que μ_B por un factor aproximado de 2 000 debido a la gran diferencia en masas del protón y el electrón.

El momento magnético de un protón libre es aproximadamente igual a 2.7928 μ_n. Desafortunadamente, no existe ninguna teoría general del magnetismo nuclear que explique este valor. Otro punto sorprendente es que el neutrón también tiene un momento magnético, con un valor de $-1.9135\ \mu_n$. El hecho de que el neutrón tenga un momento magnético es evidencia de que el neutrón sin carga posee una distribución interna de carga. El signo menos indica que este momento apunta en la dirección contraria del momento angular de espín del neutrón.

Resonancia magnética nuclear e imagenología por resonancia magnética

Frecuencia de Larmor

Los momentos magnéticos nucleares (así como los momentos magnéticos electrónicos) realizan un movimiento de precesión cuando se colocan en un campo magnético externo. La frecuencia a la que siguen este movimiento de precesión, denominada **frecuencia de precesión de Larmor,** ω_L, es directamente proporcional al campo magnético. Esta precesión se ilustra en la figura 13.6a, donde el campo magnético está a lo largo del eje z. Por ejemplo, la frecuencia de Larmor de un protón en un campo magnético de 1 T es 42.577 MHz. La energía potencial de un momento dipolar magnético $\boldsymbol{\mu}$ en un campo magnético externo $\mathbf{B}$ está dada por $-\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}$. Cuando el momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ se alinea con el campo tanto como permite la física cuántica, la energía potencial del momento dipolar en el campo toma su valor mínimo, $E_{\text{mín}}$. Cuando $\boldsymbol{\mu}$ es tan antiparalelo como es posible, la energía potencial toma su valor máximo, $E_{\text{máx}}$. Estos dos estados se muestran en la figura 13.6b para un núcleo con espín igual a $\frac{1}{2}$.

Resonancia magnética nuclear

Es posible observar transiciones entre estos dos estados de espín a través de una técnica denominada **resonancia magnética nuclear (RMN).** Un campo magnético constante ($\mathbf{B}$ en la figura 13.6a) se introduce para alinear los momentos magnéticos, junto con un segundo campo magnético oscilante débil orientado en forma perpendicular a $\mathbf{B}$. Cuando la frecuencia del campo oscilante se ajusta para coincidir con la frecuencia de precesión de Larmor, una torca que actúa sobre los momentos que precesan hace que éstos "oscilen" entre los dos estados de espín. Estas transiciones resultan en una absorción neta de energía por el sistema de espín, absorción que puede detectarse electrónicamente. La figura 13.7 es un bosquejo del aparato utilizado en la RMN. La energía absorbida es suministrada por el generador que produce el campo magnético oscilante La RMN y una técnica relacionada denominada resonancia del espín

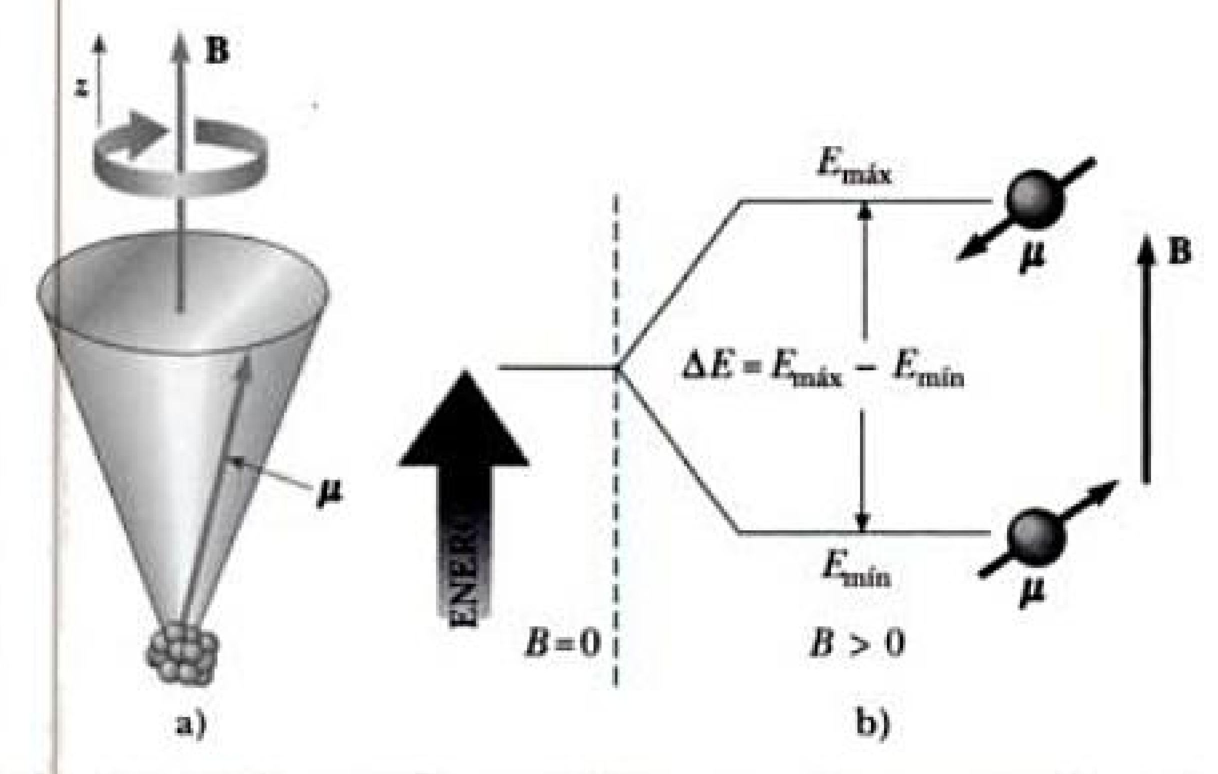


Figura 13.6 a) Cuando un núcleo se coloca en un campo magnético externo, **B**, el momento magnético realiza un movimiento de precesión alrededor del campo magnético con una frecuencia proporcional al campo. b) Cuando se coloca en un campo magnético externo un núcleo con espín $\frac{1}{2}$ puede ocupar uno de los dos estados energéticos. El estado energético inferior $E_{mín}$ corresponde al caso en que el espín está alineado con el campo tanto como es posible según la mecánica cuántica, y el estado energético superior $E_{máx}$ corresponde al caso en que el espín se opone al campo tanto como es posible.

del electrón constituyen métodos sumamente importantes para el estudio de sistemas atómicos y nucleares y la forma en que estos sistemas interactúan con su entorno. En la figura 13.8 se muestra un espectro típico de RMN.

Una técnica de diagnóstico bastante utilizada denominada **imagenología por resonancia magnética (IRM)** se basa en la resonancia magnética nuclear. Debido a que cerca de dos tercios de los átomos que constituyen el cuerpo humano son de hidrógeno, lo cual proporciona una fuerte señal de resonancia magnética nuclear, la imagenología por resonancia magnética funciona excepcionalmente bien para observar tejidos internos. En la IRM, el paciente es colocado en el interior de un gran solenoide que genera un campo magnético que varía espacialmente. Debido al gradiente del campo magnético, los protones en



Figura 13.7 Disposición experimental para la resonancia magnética nuclear. El campo magnético a radiofrecuencia de la bobina, proporcionado por el oscilador de frecuencia variable, debe ser perpendicular al campo magnético CD. Cuando los núcleos de la muestra satisfacen la condición de resonancia, los espines absorben energía del campo de la bobina, y esta absorción modifica la Q del circuito donde está incluida la bobina. La mayor parte de los espectrómetros por resonancia magnética nuclear usan imanes superconductores a intensidades de campo fijas y operan a frecuencias aproximadamente iguales a 200 MHz.

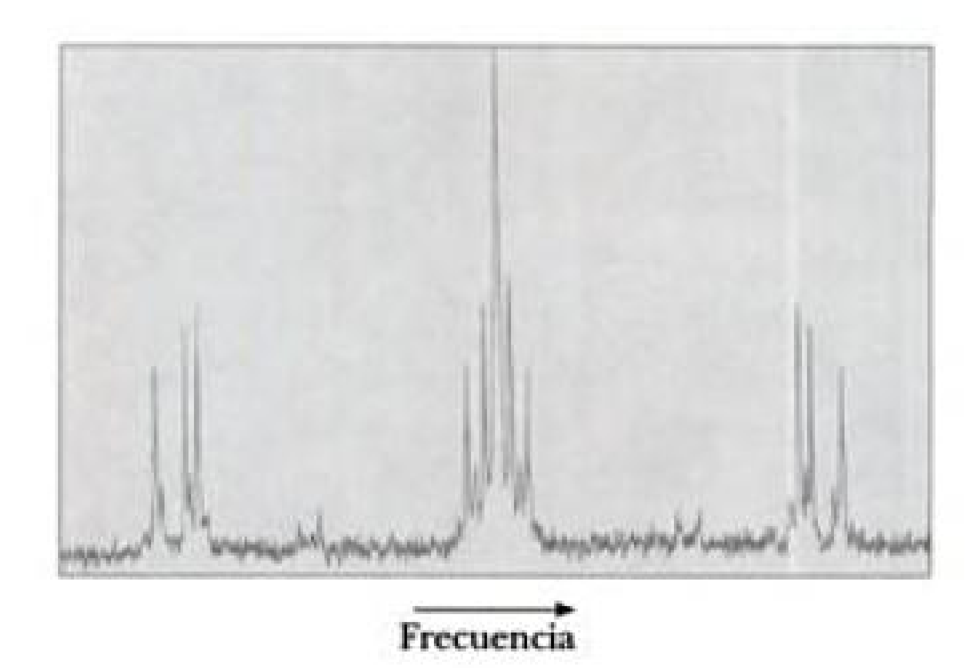


Figura 13.8 Espectro por resonancia magnética nuclear de ^{31}P en un complejo metálico con puente que contiene platino. Las líneas que flanquean el notorio pico central se deben a la interacción entre ^{31}P y otros núcleos distantes de ^{31}P. El conjunto externo de líneas se debe a la interacción entre ^{31}P y núcleos de platino vecinos. El espectro fue registrado a un campo magnético fijo de aproximadamente 4 T, y la frecuencia media era de 200 MHz.

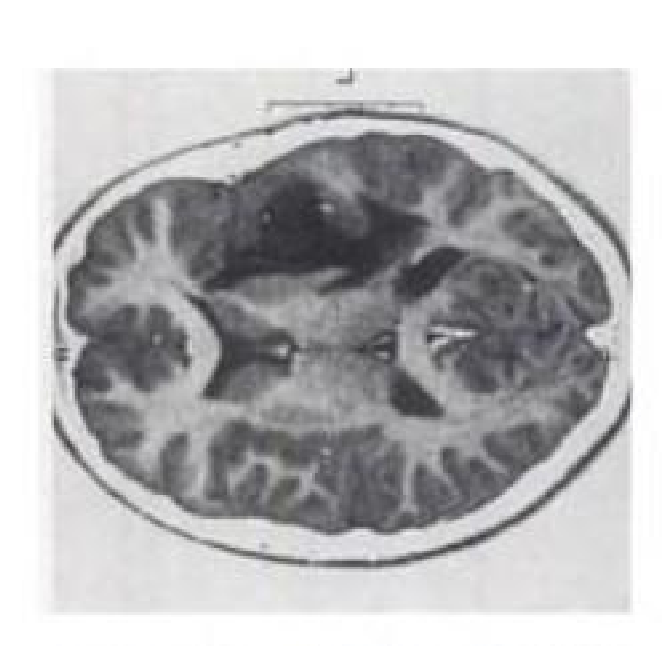


Figura 13.9 Barrido digitalizado por computadora de imagenología por resonancia magnética de un cerebro con un tumor glioma. (© *1996 Scott Magazine.*)

distintas partes del cuerpo presentan un movimiento de precesión a diferentes frecuencias, de modo que la señal de resonancia puede proporcionar información sobre la posicion de los protones. Para analizar la información sobre tales posiciones se utiliza una computadora a fin de obtener datos para la construcción de una imagen final. En la figura 13.9 se muestra un barrido por IRM de un cerebro humano.

Otra de sus ventajas sobre otras técnicas de imagenología es que provoca daños mínimos a las estructuras celulares. Los fotones asociados con las señales de radiofrecuencia utilizadas en la IRM poseen energías de sólo alrededor de 10^{-7} eV. Debido a que las intensidades de los enlaces moleculares son mucho mayores (aproximadamente iguales a 1 eV), la radiación a radiofrecuencia provoca poco daño celular. En comparación, los rayos X y los rayos gamma poseen energías que varían desde 10^4 hasta 10^6 eV y pueden ocasionar considerable daño celular.

13.2 ENERGÍA DE ENLACE Y FUERZAS NUCLEARES

La masa total del núcleo siempre es menor que la suma de las masas de sus nucleones. Debido a que la masa es una medida de energía, **la energía total del sistema ligado (el núcleo) es menor que la energía combinada de los nucleones separados.** Esta diferencia en energía se denomina **energía de enlace** del núcleo y puede entenderse como la energía que debe agregarse a un núcleo para separarlo en sus componentes. En consecuencia, para separar un núcleo en sus protones y neutrones constituyentes, es necesario agregar energía al sistema.

La conservación de la energía y la relación de equivalencia masa-energía de Einstein muestran que la energía de enlace de cualquier núcleo de masa M_A es

Energía de enlace de un núcleo

$$E_b(\text{MeV}) = [ZM(\text{H}) + Nm_\text{n} - M_A] \times 931.494 \frac{\text{MeV}}{\text{u}} \qquad (13.4)$$

donde M(H) es la masa atómica del hidrógeno, M_A representa la masa atómica del elemento ${}^A_Z\text{X}$, m_n es la masa del neutrón y todas las masas están expresadas en unidades de masa atómica. Observe que la masa de los electrones Z incluida

en el primer término de la ecuación 13.4 se cancela con la masa de los electrones Z incluida en el término M_A, dentro de una pequeña diferencia asociada con la energía de enlace atómica de los electrones. Debido a que las energías de enlace atómicas son por lo general de varios electrón-volts y a que las energías de enlace nucleares son de varios MeV, esta diferencia es despreciable.

EJEMPLO 13.3 Energía de enlace del deuterón

Calcule la energía de enlace del deuterón, que consta de un protón y un neutrón, dado que la masa atómica del deuterón es $M_2 = 2.014102$ u.

Solución Se sabe que la masa atómica del hidrógeno y la masa atómica del neutrón son

$$M(\text{H}) = 1.007\,825 \text{ u}$$

$$m_n = 1.008\,665 \text{ u}$$

Al usar la ecuación 13.4, para la energía de enlace del deuterón se encuentra

$$E_b = [M(\text{H}) + m_n - M_2] \times 931.494 \text{ MeV/u}$$

$$= [2.016\,490 \text{ u} - 2.014\,102 \text{ u}] \times 931.494 \text{ MeV/u}$$

$$E_b = [0.002\,388 \text{ u}] \times 931.494 \text{ MeV/u}$$

$$= 2.224 \text{ MeV}$$

Este resultado establece que para separar un deuterón en sus partes constituyentes en reposo (un protón y un neutrón), es necesario agregar 2.224 MeV de energía al deuterón. Una forma de lograr lo anterior es bombardearlo con partículas energéticas.

Si la energía de enlace de un núcleo fuese cero, éste se separaría en sus protones y neutrones constituyentes sin la adición de energía; es decir, se separaría de manera espontánea.

En la figura 13.10 se muestra una gráfica de la **energía de enlace por nucleón,** E_b/A, como una función del número de masa para varios núcleos estables. Excepto por los núcleos más ligeros, la energía de enlace promedio por nucleón es alrededor de 8 MeV. Para el deuterón, la energía de enlace promedio por nucleón es $E_b/A = 2.224/2$ MeV $= 1.112$ MeV. Observe que la curva en la figura 13.10 muestra un pico en la vecindad de $A = 60$. Es decir, núcleos con número de masa mayores o menores que 60 no están tan estrechamente ligados como los que se encuentran cerca de la mitad de la tabla periódica.

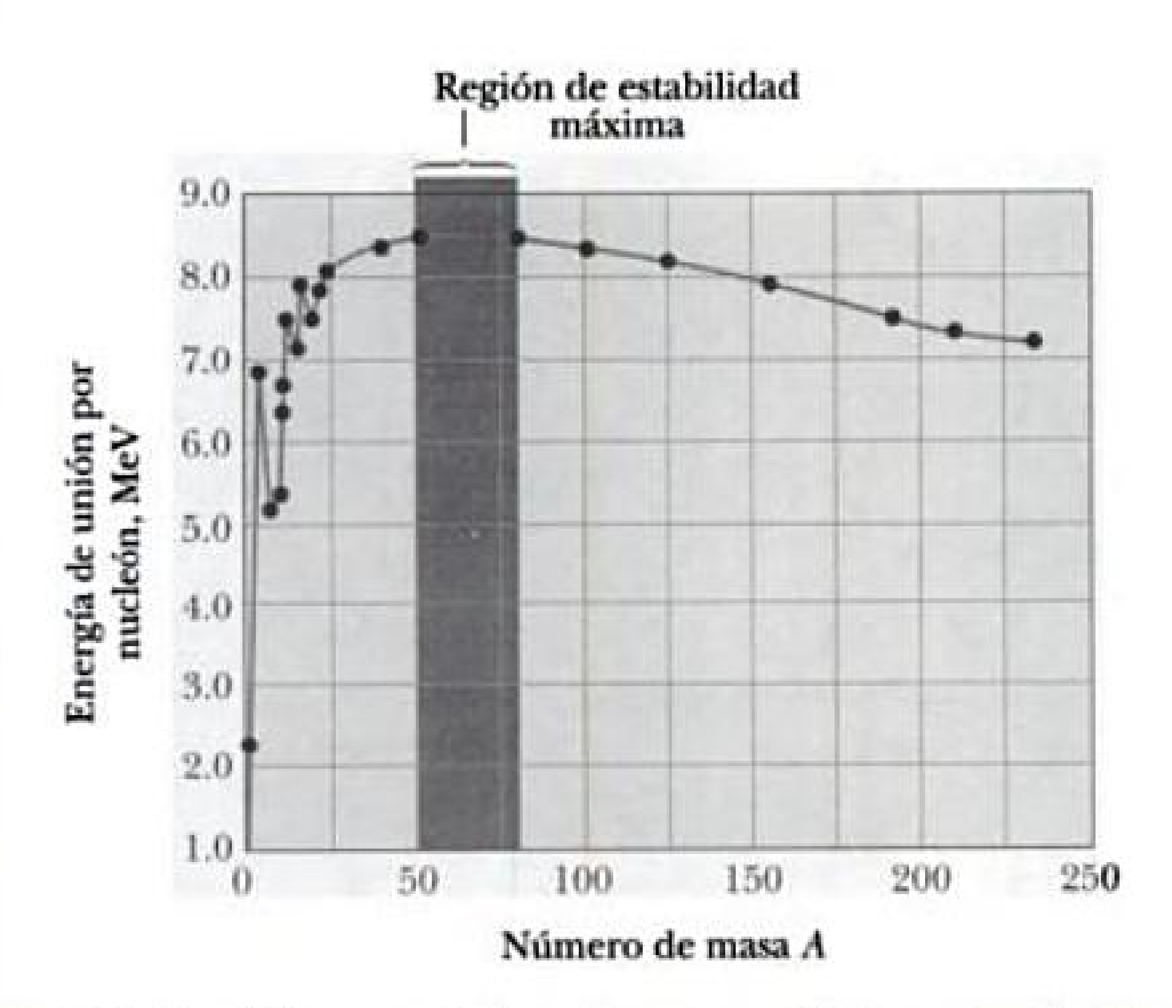


Figura 13.10 Gráfica de la energía de enlace por nucleón contra el número de masa para los núcleos estables que se muestran en la figura 13.4.

Los valores superiores de energía de enlace cerca de $A = 60$ implican que se libera energía cuando un núcleo pesado con $A \approx 200$ se separa o fisiona en varios núcleos más ligeros que están cerca de $A = 60$. En la fisión se libera energía debido a que el estado final, que consta de dos fragmentos más ligeros, está ligado más estrechamente, o posee menor energía, que el núcleo original. De manera semejante, puede liberarse energía cuando dos núcleos ligeros con $A \leq 20$ se combinan o unen para formar un núcleo más pesado. Estos dos procesos importantes, *fisión* y *fusión*, se consideran en detalle en el capítulo 14.

Saturación de las fuerzas nucleares

Otra característica importante de la figura 13.10 es que la energía de enlace por nucleón es aproximadamente constante para $A > 20$. En este caso, se dice que las fuerzas nucleares entre un nucleón particular y todos los demás nucleones en el núcleo están saturadas; es decir, un nucleón particular forma enlaces de atracción sólo con un número limitado de otros nucleones. Debido al carácter de corto alcance de la fuerza nuclear, estos otros nucleones pueden considerarse como si fuesen los vecinos más próximos en la estructura estrechamente empacada que se muestra en la figura 13.3. Si cada nucleón pudiese interactuar con todos los demás nucleones, cada uno formaría $(A - 1)$ enlaces, y la energía de enlace por nucleón sería proporcional a $(A - 1)$, en vez de constante, como se observó.

Las características generales de la fuerza de enlace nuclear han sido descubiertas en una amplia gama de experimentos, que se resumen a continuación.

- La fuerza de atracción nuclear es un tipo de fuerza distinto a las fuerzas comunes del electromagnetismo y la gravitación, y como domina a la fuerza de repulsión de Coulomb entre los protones en el núcleo, es más intensa que la fuerza electromagnética.
- La fuerza nuclear es una fuerza de corto alcance que rápidamente se vuelve cero cuando la separación entre los nucleones es superior a varios fermis. El alcance limitado de las fuerzas nucleares se demuestra a través de experimentos de dispersión y de la saturación de las fuerzas nucleares mencionadas anteriormente. La gráfica de energía potencial neutrón-protón (n–p) de la figura 13.11a, obtenida por la dispersión de neutrones por un blanco que contiene hidrógeno, muestra el corto alcance de la fuerza

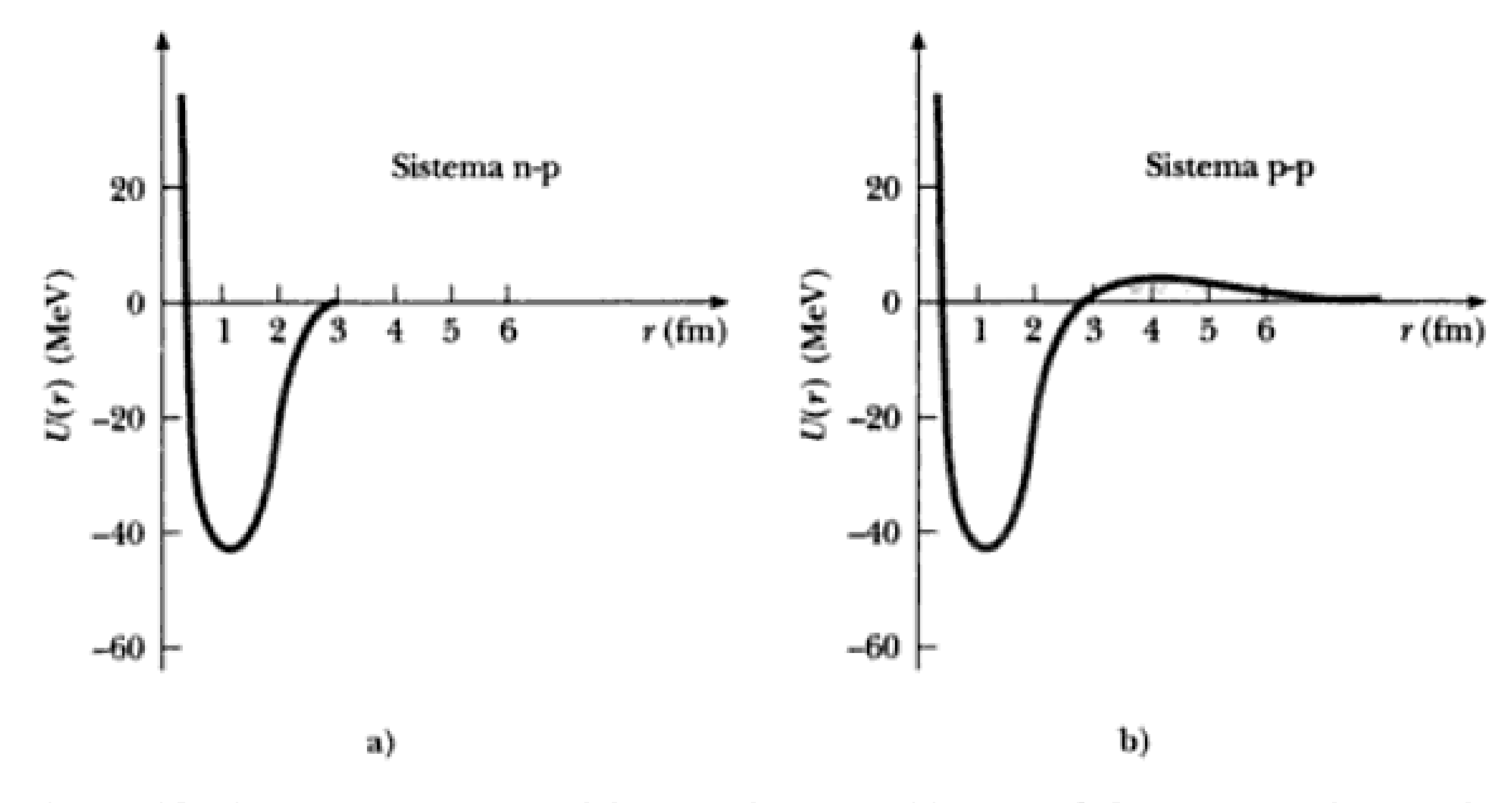


Figura 13.11 a) Energía potencial contra la separación para el sistema neutrón–protón. b) Energía potencial contra la separación para el sistema protón-protón. La diferencia en las dos curvas se debe principalmente a la repulsión de Coulomb en el caso de la interacción protón-protón.

nuclear. La profundidad de la energía potencial n-p está entre de 40 y 50 MeV y contiene una intensa componente de repulsión que evita que los nucleones se aproximen a menos de 0.4 fm. Otro rasgo interesante de la fuerza nuclear es que su magnitud depende de las orientaciones relativas de los espines de los nucleones, como demuestran experimentos de dispersión realizados con haces y blancos cuyos espines están polarizados.

- Con base en experimentos de dispersión n–n, n–p y p–p, y otras evidencias indirectas, se encontró que la fuerza nuclear es independiente de la carga eléctrica de los nucleones interactuantes. Como sería de esperar a partir de este carácter "ciego respecto a la carga" de la fuerza nuclear, ésta no afecta a los electrones, lo que permite utilizar electrones energéticos como sondas puntuales para investigar la densidad de carga de los núcleos. La independencia de la fuerza nuclear con respecto a la carga también implica que la diferencia más importante entre las interacciones n–p y p–p es que la energía potencial p–p consta de una *superposición* de las interacciones nuclear y de Coulomb, como se muestra en la figura 13.11b. A distancias menores que 2 fm, las energías potenciales p–p y n–p son casi idénticas, pero a distancias mayores, el potencial p–p tiene una barrera de energía positiva, con un máximo aproximado de 1 MeV a 4 fm.

Independencia con respecto a la carga de la fuerza nuclear

Aunque la "lista" anterior de propiedades observadas de la fuerza nuclear puede ser interesante, deja sin responder la pregunta más profunda sobre qué mecanismos explican la poderosa fuerza nuclear. Un modelo que explica con éxito la fuerza nuclear es el **modelo de fuerza por intercambio.** Según este modelo, dos nucleones—por ejemplo, un protón y un neutrón— experimentan una fuerza de atracción cuando uno emite espontáneamente una partícula y el otro la absorbe. Desde un punto de vista clásico, los nucleones emisor y absorbedor son atraídos fuertemente hacia la partícula intercambiada, como si estuviesen unidos a ésta por bandas elásticas o por resortes. Debido a que ambos nucleones son atraídos fuertemente por la misma partícula, parece que se atraen fuertemente entre sí.

Modelo de intercambio de partículas

Quizá usted se pregunte cómo puede ocurrir el intercambio de una partícula de masa m entre el protón y el neutrón sin violar la conservación de la energía y la conservación de la cantidad de movimiento (momentum). Una violación de la conservación de la energía ocurre si un protón en reposo con energía m_pc^2 emite una partícula de masa m, con energía mc^2, y permanece como un protón con energía m_pc^2. También, la conservación de la cantidad de movimiento haría que el par formado por un protón y un neutrón se separace cuando el protón hubiese emitido una partícula y el neutrón la hubiera absorbido, en vez de producir el movimiento del protón hacia el neutrón, como se requiere para una fuerza de atracción nuclear.

La respuesta a ambos dilemas parece un truco: la partícula intercambiada existe durante un lapso tan breve y está confinada a una región espacial tan pequeña que se le permite violar la conservación de la energía y la conservación de la cantidad de movimiento. Se denomina **partícula virtual.** Una partícula virtual no puede detectarse o medirse directamente durante los procesos de violación de la conservación de la cantidad de movimiento y la conservación de la energía que se lleva a cabo dentro del núcleo. Tal vez la mejor forma de comprender lo anterior es mediante los principios de incertidumbre $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$ y $\Delta p_x \Delta x \geq \hbar/2$. Estas relaciones implican que la conservación de la energía puede violarse por una cantidad ΔE durante un breve intervalo de tiempo Δt y que la conservación de la cantidad de movimiento puede violarse por una cantidad Δp_x sobre una pequeña región nuclear de tamaño Δx. Aunque podría parecer que una partícula virtual jamás puede ser detectada, si una partícula incidente

choca con el núcleo justo en la forma idónea, puede suministrar la cantidad de movimiento y la energía faltantes necesarias para hacer real a una partícula virtual, permitiendo así la medición en el laboratorio de la partícula intercambiada.

Una simple aplicación del principio de incertidumbre energía-tiempo permite estimar la masa de la partícula intercambiada que debe ser responsable de la fuerza nuclear. Debido a que la cantidad en que se viola la conservación de la energía en el proceso de intercambio es $\Delta E = mc^2$, donde m es la masa de la partícula intercambiada, se tiene

$$\Delta t \cong \frac{\hbar}{\Delta E} = \frac{\hbar}{mc^2} \tag{13.5}$$

Al observar que Δt es el tiempo que requiere la partícula intercambiada para recorrer la distancia d entre los nucleones, y que el valor máximo de d es $d = c\Delta t$, para una partícula intercambiada que se desplaza a la velocidad de la luz, se encuentra que

$$d_{\text{máx}} = c\Delta t = c\left(\frac{\hbar}{mc^2}\right) = \frac{\hbar}{mc} \tag{13.6}$$

Esta expresión muestra que **el alcance de la fuerza nuclear, $\mathbf{d_{máx}}$, es inversamente proporcional a la masa de la partícula intercambiada,** una característica general de los modelos de fuerza por intercambio. Por último, debido a que el alcance de la fuerza nuclear es aproximadamente 2 fm, es posible calcular la energía en reposo de la partícula intercambiada que es responsable de la fuerza nuclear:

$$mc^2 \cong \frac{\hbar c}{d_{\text{máx}}} = \frac{(1.05 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s})(3 \times 10^{8}\,\text{m/s})}{2 \times 10^{-15}\,\text{m}}$$
$$= 1.6 \times 10^{-11}\,\text{J} = 100\ \text{MeV}$$

Doce años después que el físico japonés Hideki-Yukawa (1907-1981) propuso la teoría de la fuerza nuclear por intercambio que acaba de describirse, se descubrió en los rayos cósmicos una partícula fuertemente interactuante de alrededor de 140 MeV/c^2, denominada mesón pi, lo cual confirmó las predicciones de Yukawa. El mesón pi y otras partículas de intercambio portadoras de fuerza se analizarán con mayor detalle en el capítulo 15.

13.3 MODELOS NUCLEARES

Aunque los detalles de las fuerzas nucleares todavía no se entienden por completo, se han propuesto varios modelos nucleares con parámetros ajustables que ayudan a comprender varias características de los datos experimentales nucleares y los mecanismos responsables de la energía de enlace. Los modelos que se analizarán son 1) el modelo de la gota líquida, que explica la energía de enlace nuclear; 2) el modelo de la partícula independiente, que explica características más detalladas de los núcleos, incluyendo las grandes diferencias en la estabilidad entre núcleos con valores para A y Z semejantes; y 3) el modelo colectivo.

Modelo de la gota líquida

El **modelo de la gota líquida,** propuesto por C. F. von Weizsächer en 1935, trata a los nucleones como si fuesen moléculas en una gota de líquido. Los nucleones interactúan fuertemente entre sí y experimentan colisiones frecuentes a medida que vibran en el interior del núcleo. Este movimiento vibratorio es semejante al agitado movimiento térmico de las moléculas en una gota de líquido.

En el modelo de la gota líquida, la energía de enlace del núcleo se ve afectada primordialmente por tres efectos:

- **El efecto del volumen.** Antes se demostró que la energía de enlace por nucleón es aproximadamente constante, lo que indica que la fuerza nuclear se satura (figura 13.10). En consecuencia, la energía total de enlace del núcleo es proporcional a A y al volumen nuclear. La contribución de este efecto del volumen a la energía de enlace es C_1A, donde C_1 es una constante ajustable.
- **El efecto de la superficie.** Debido a que los nucleones en la superficie de la gota tienen menos vecinos que los nucleones en el interior, los nucleones superficiales reducen la energía de enlace por una cantidad proporcional al número de nucleones superficiales. Debido a que el número de éstos es proporcional al área superficial del núcleo, $4\pi r^2$ y $r^2 \propto A^{2/3}$ (ecuación 13.1), el término superficial puede expresarse como $-C_2A^{2/3}$, donde C_2 es una constante.
- **El efecto de repulsión de Coulomb.** Cada protón repele a los demás protones en el núcleo. La energía potencial correspondiente por pareja de partículas interactuantes es ke^2/r, donde k es la constante de Coulomb. La energía de Coulomb total representa el trabajo necesario para juntar Z protones desde el infinito en una esfera de volumen V. Esta energía es proporcional al número de pares de protones $Z(Z-1)/2$, e inversamente proporcional al radio nuclear. En consecuencia, la reducción en energía que resulta del efecto de Coulomb es $-C_3Z(Z-1)/A^{1/3}$, donde C_3 es una constante.

Otro efecto que disminuye la energía de enlace es importante para núcleos pesados con gran exceso de neutrones. Debido a que se ha observado que para un valor dado de A los núcleos con $Z = N$ tienen la mayor energía de enlace, ésta debe corregirse por un término de simetría que prefiera a $Z = N$ y disminuya simétricamente la energía de enlace para $N > Z$ o $N < Z$. El término de simetría suele escribirse como $-C_4(N-Z)^2/A$, donde C_4 es una constante ajustable.

Al sumar estas contribuciones, se obtiene que la energía de enlace total es

$$E_b = C_1A - C_2A^{2/3} - C_3\frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - C_4\frac{(N-Z)^2}{A} \qquad (13.7)$$

Fórmula semiempírica para la energía de enlace

A esta ecuación a menudo se le denomina como **fórmula semiempírica de Weizsächer para la energía de enlace,** porque tiene algo de justificación teórica pero contiene cuatro constantes que se ajustan para hacer coincidir esta expresión con los datos experimentales. Para núcleos con $A \geq 15$, los valores de las constantes son

$$C_1 = 15.7 \text{ MeV} \qquad C_2 = 17.8 \text{ MeV}$$
$$C_3 = 0.71 \text{ MeV} \qquad C_4 = 23.6 \text{ MeV}$$

La ecuación 13.7 junto con estas constantes se ajusta muy bien a los valores conocidos de la energía de enlace. No obstante, el modelo de la gota líquida no explica algunos detalles más finos de la estructura nuclear, como ciertas reglas de estabilidad y momento angular. Por otra parte, proporciona una descripción cualitativa de la fisión nuclear, como se muestra esquemáticamente en la figura 13.12. Si la gota vibra con gran amplitud (lo cual puede iniciarse mediante una colisión con otra partícula), se distorsiona y, en condiciones idóneas, se separa. El proceso de fisión se analizará con más detalle en el capítulo 14.

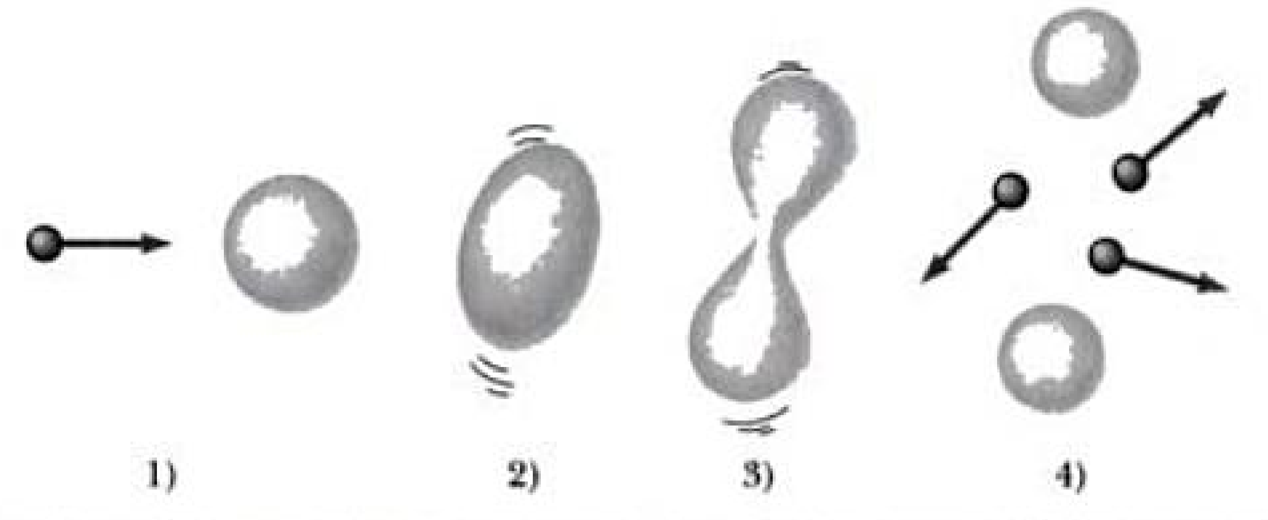


Figura 13.12 Pasos que conducen a la fisión según el modelo de la gota líquida del núcleo.

Modelo de la partícula independiente

El **modelo de la partícula independiente,** a menudo denominado **modelo de capas,** fue desarrollado de manera independiente por María Goeppert-Mayer (1906-1972, física alemana-estadounidense) y Hans Jensen (1907-1973, físico alemán), quienes compartieron el premio Nobel en 1963 por esta hazaña. **El modelo de capas se basa en la suposición de que cada nucleón se mueve en un estado orbital bien definido dentro del núcleo en un campo promedio producido por los otros nucleones.** Este modelo es semejante al modelo de capas del átomo, excepto por el carácter del término de fuerza. En el modelo de capas, los nucleones existen en estados energéticos cuantizados, y entre los nucleones hay pocas colisiones. Resulta evidente que las hipótesis de este modelo son bastante diferentes a las del modelo de la gota líquida.



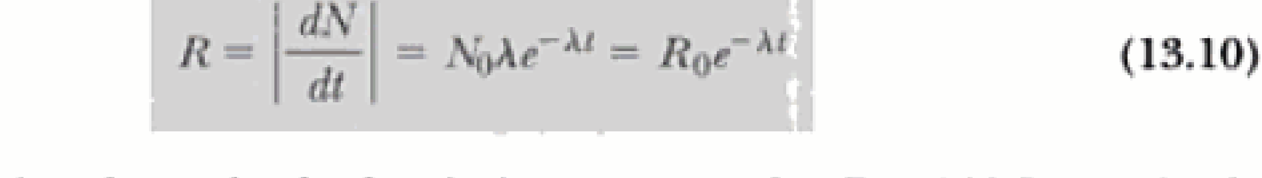
María Goeppert-Mayer (1906-1972) nació y estudió en Alemania. Es mejor conocida por el desarrollo del modelo de capas (modelo de la partícula independiente) del núcleo, publicado en 1950. Un modelo semejante fue desarrollado en forma simultánea por Hans Jensen, otro científico alemán. Goeppert-Mayer y Jensen obtuvieron el premio Nobel de Física en 1963 por su extraordinario trabajo para comprender la estructura del núcleo. (*Cortesía de Louise Barker/AIP Niels Bohr Library.*)

Cada estado orbital cuantizado para un protón o neutrón es semejante a uno de los estados orbitales de un electrón en una subcapa atómica, con la excepción de que el ordenamiento en energía de los estados nucleares está modelado de manera más precisa por un potencial de un pozo esférico, y no por el potencial de Coulomb idóneo para los electrones atómicos. (Consulte el problema 32 del capítulo 8 para una solución del pozo esférico.) Los estados cuánticos ocupados por los nucleones pueden describirse mediante un conjunto de números cuánticos. Debido a que el espín del protón y del neutrón es $\frac{1}{2}$, puede aplicarse el principio de exclusión de Pauli para describir los estados permitidos (como se hizo para los electrones en el capítulo 9). Es decir, cada estado orbital sólo puede contener dos protones (o dos neutrones) de espín *opuesto* (figura 13.13). Los protones poseen un conjunto de estados permitidos, que difieren ligeramente de los estados permitidos de los neutrones porque se mueven en pozos de potencial diferentes. Los niveles del protón son energéticamente superiores a los niveles del neutrón porque los protones experimentan la superposición del potencial de Coulomb y del potencial nuclear, mientras que los neutrones sólo experimentan un potencial nuclear. Estos dos pozos diferentes se muestran en la figura 13.13.

Usando sólo el hecho de que los niveles de energía nuclear existen y que se llenan según el principio de exclusión de Pauli, es posible explicar la tendencia de N para igualar a Z en núcleos estables y ligeros. A fin de alcanzar una estabilidad máxima para una A dada, todos los nucleones deben estar colocados en forma secuencial en los niveles energéticos más bajos sin dejar separaciones en los niveles llenos. Dado que cualquier nivel energético se llena cuando contiene dos protones (o dos neutrones), al agregar otro protón (o neutrón) al núcleo se produce un incremento en la energía y una disminución en la estabilidad del núcleo. Así, si se compara ${}^{12}_{5}\text{B}$ y ${}^{12}_{6}\text{C}$, el séptimo neutrón en el boro debe ocupar un estado energético superior al del sexto neutrón en el carbono (dos nucleones por estado energético), y en consecuencia el ${}^{12}_{5}\text{B}$ tiene mayor energía y es menos estable que el ${}^{12}_{6}\text{C}$.

La **razón de decaimiento** R, o número de desintegraciones por unidad de tiempo, puede obtenerse al diferenciar la ecuación 13.9 con respecto al tiempo:

Razón de decaimiento



$$R = \left|\frac{dN}{dt}\right| = N_0 \lambda e^{-\lambda t} = R_0 e^{-\lambda t} \qquad (13.10)$$

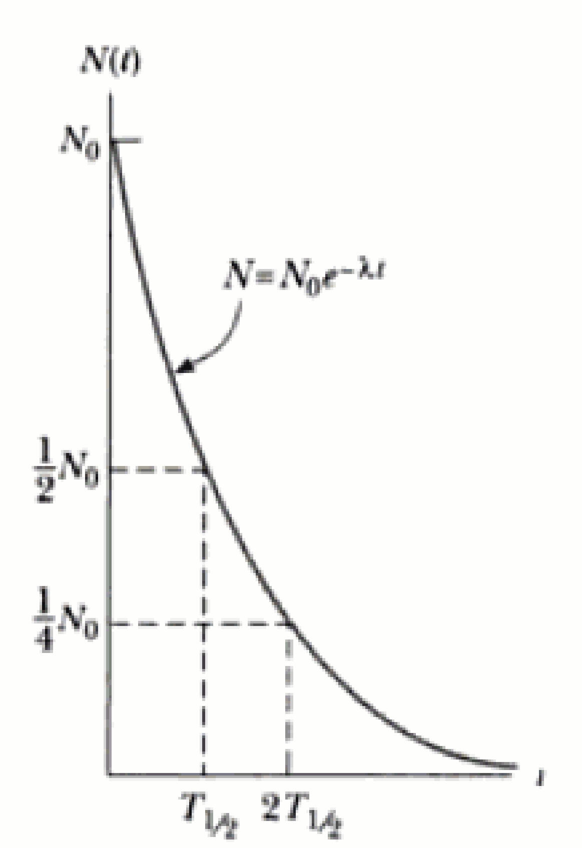


Figura 13.15 Gráfica de la ley de decaimiento exponencial para núcleos radiactivos. El eje vertical representa el número de núcleos radiactivos presentes en cualquier instante t, y el eje horizontal es el tiempo. El tiempo $T_{1/2}$ es la vida media de la muestra.

donde $R_0 = N_0\lambda$ es la razón de decaimiento en $t = 0$ y $R = \lambda N$. La razón de decaimiento de una muestra suele identificarse como su **actividad.** Observe que tanto N como R decrecen exponencialmente con el tiempo. La gráfica de N contra t que se muestra en la figura 13.15 ilustra la ley de decaimiento exponencial.

Otro parámetro de utilidad para caracterizar la desintegración o decaimiento de un núcleo particular es la **vida media,** $T_{1/2}$:

La **vida media** de una sustancia radiactiva es el tiempo necesario para que decaigan la mitad de un número dado de núcleos radiactivos.

Al hacer $N = N_0/2$ y $t = T_{1/2}$ en la ecuación 13.9, se obtiene

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}$$

Cuando lo anterior se escribe en la forma $e^{\lambda T_{1/2}} = 2$ y se toma el logaritmo natural de ambos miembros, se obtiene

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.693}{\lambda} \qquad (13.11)$$

Ésta es una expresión conveniente para relacionar la vida media con la constante de decaimiento. Observe que después de transcurrido un lapso de una vida media, quedan $N_0/2$ núcleos radiactivos (por definición); luego de dos vidas medias, la mitad de éstos han decaído y quedan $N_0/4$ núcleos radiactivos; al cabo de tres vidas medias, quedan $N_0/8$; etcétera. En general, después de n vidas medias, el número de núcleos radiactivos que quedan es $N_0/2^n$. Así, se observa que el decaimiento nuclear es independiente de la historia pasada de una muestra.

Una unidad de la actividad utilizada frecuentemente es el **curie** (Ci), definido como

El curie

$$1 \text{ Ci} \equiv 3.7 \times 10^{10} \text{ decaimientos/s}$$

Este valor fue seleccionado originalmente porque es la actividad aproximada de 1 g de radio. La unidad SI de la actividad es el **becquerel** (Bq):

El becquerel

$$1 \text{ Bq} \equiv 1 \text{ decaimiento/s}$$

En consecuencia, 1 Ci = 3.7×10^{10} Bq. El curie es una unidad más bien grande, y las unidades de actividad utilizadas con mayor frecuencia son el milicurie mCi (10^{-3} Ci) y el microcurie, μCi (10^{-6} Ci).

EJEMPLO 13.4 ¿Cuántos núcleos quedan?

El isótopo del carbono 14, ${}^{14}_{6}$C, es radiactivo y tiene una vida media de 5 730 años. Si se empieza con una muestra de 1 000 núcleos de carbono 14, ¿cuántos quedarán en 22 920 años?

Solución En 5 730 años, la mitad de la muestra habrá decaído, quedando 500 núcleos de carbono 14. En otros 5 730 años (para un total transcurrido de 11 460 años) el número se reducirá a 250 núcleos. Al cabo de otros 5 730

años (tiempo total 17 190 años) quedarán 125. Por último, después de cuatro vidas medias (22 920 años) sólo quedarán alrededor de 62 núcleos.

Estas cantidades representan circunstancias ideales. El cálculo del decaimiento radiactivo es un proceso de obtención de promedios que se lleva a cabo con un gran número de átomos, y el resultado real depende de la estadística. En este ejemplo, la muestra original contenía sólo 1 000 núcleos, lo cual ciertamente no es un número muy grande. Luego, si en realidad se cuenta el número de núcleos que quedan de esta pequeña muestra luego de una vida media, tal vez el resultado no sea 500.

EJEMPLO 13.5 Actividad del radio

La vida media del núcleo radiactivo $^{226}_{88}Ra$ es aproximadamente igual a 1.6×10^3 yr. A) ¿Cuál es la constante de decaimiento del $^{226}_{88}Ra$?

Solución a) La constante de decaimiento λ puede calcularse usando la ecuación 13.11, y que

$$\begin{aligned} T_{1/2} &= 1.6 \times 10^3 \text{ años} \\ &= (1.6 \times 10^3 \text{ años})(3.16 \times 10^7 \text{ s/años}) \\ &= 5 \times 10^{10} \text{ s} \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\lambda = \frac{0.693}{T_{1/2}} = \frac{0.693}{5 \times 10^{10}\text{ s}} = 1.4 \times 10^{-11}\text{ s}^{-1}$$

Observe que este resultado proporciona la probabilidad de que cualquier simple núcleo de $^{226}_{88}Ra$ se decaiga en 1 s.

b) Si una muestra contiene 3×10^{16} de tales núcleos en $t = 0$, determine su actividad en ese tiempo.

Solución b) Es posible calcular la actividad de la muestra en $t = 0$ usando $R_0 = \lambda N_0$, donde R_0 es la razón de decaimiento en $t = 0$ y N_0 es el número de núcleos radiactivos presentes en $t = 0$. Como $N_0 = 3 \times 10^{16}$, se tiene

$$\begin{aligned} R_0 = \lambda N_0 &= (1.4 \times 10^{-11}\text{ s}^{-1})(3 \times 10^{16}) \\ &= 4.2 \times 10^5 \text{ decaimientos/s} \end{aligned}$$

Debido a que 1 Ci = 3.7×10^{10} decaimientos/s, la actividad, o velocidad de decaimiento, en $t = 0$, es

$$R_0 = 11.1\ \mu\text{Ci}$$

c) ¿Cuál es la razón de decaimiento después que la muestra tiene 2×10^3 años de antigüedad?

Solución c) Es posible utilizar la ecuación 13.10 y que 2×10^3 años $= (2 \times 10^3 \text{ años})(3.15 \times 10^7 \text{ s/año}) = 6.3 \times 10^{10}$ s:

$$\begin{aligned} R &= R_0 e^{-\lambda t} \\ &= (4.2 \times 10^5 \text{ decaimientos/s})\, e^{-(1.4\times10^{-11}\text{ s}^{-1})(6.3\times10^{10}\text{ s})} \\ &= 1.7 \times 10^5 \text{ decaimientos/s} \end{aligned}$$

EJEMPLO 13.6 Actividad del carbono

Una muestra radiactiva contiene 3.50 μg de $^{11}_{6}C$ puro, cuya vida media es de 20.4 min. a) Determine el número de núcleos en la muestra en $t = 0$.

Solución La masa atómica del $^{11}_{6}C$ es aproximadamente 11, de modo que 11 g contienen el número de Avogadro (6.02×10^{23}) de núcleos. En consecuencia, 3.50 μg contienen N núcleos, donde

$$\frac{N}{6.02 \times 10^{23}\text{ núcleos/mol}} = \frac{3.50 \times 10^{-6}\text{ g}}{11.0\text{ g/mol}}$$

$$N = 1.92 \times 10^{17}\text{ núcleos}$$

b) ¿Cuál es la actividad de la muestra inicialmente y después de 8 horas?

Solución Debido a que $T_{1/2} = 20.4$ min $= 1\ 224$ s, la constante de decaimiento es

$$\lambda = \frac{0.693}{T_{1/2}} = \frac{0.693}{1224\text{ s}} = 5.66 \times 10^{-4}\text{ s}^{-1}$$

En consecuencia, la actividad inicial o razón de decaimiento de la muestra es

$$\begin{aligned} R_0 = \lambda N_0 &= (5.66 \times 10^{-4}\text{ s}^{-1})(1.92 \times 10^{17}) \\ &= 1.08 \times 10^{14}\text{ decaimientos/s} \end{aligned}$$

Para encontrar la actividad en cualquier instante t puede usarse la ecuación 13.10. Para $t = 8$ h $= 2.88 \times 10^4$ s, se observa que $\lambda t = 16.3$, de modo que

$$\begin{aligned} R = R_0 e^{-\lambda t} &= (1.09 \times 10^{14}\text{ decaimientos/s})\, e^{-16.3} \\ &= 8.96 \times 10^6\text{ decaimientos/s} \end{aligned}$$

En la tabla 13.3 se enumeran valores para la actividad contra el tiempo en horas para esta situación.

Tabla 13.3 Actividad como función del tiempo para la muestra descrita en el ejemplo 13.6

t (h)	R (decaimientos /s)
0	1.08×10^{14}
1	1.41×10^{13}
2	1.84×10^{12}
3	2.39×10^{11}
4	3.12×10^{10}
5	4.06×10^{9}
6	5.28×10^{8}
7	6.88×10^{7}
8	8.96×10^{6}

Ejercicio 1 Calcule en el ejemplo 13.6 el número de núcleos radiactivos que quedan después de 8 h.

Respuesta 1.58×10^{10} núcleos.

EJEMPLO 13.7 Un isótopo radiactivo del yodo

Una muestra del isótopo ^{131}I, cuya vida media es de 8.04 días, tiene una actividad de 5 mCi en el momento de embarque. Luego de recibir el envío de ^{131}I en un laboratorio médico, su actividad es de 4.2 mCi. ¿Cuánto tiempo ha transcurrido entre las dos mediciones?

Solución Puede utilizarse la ecuación 13.10 en la forma

$$\frac{R}{R_0} = e^{-\lambda t}$$

Al tomar el logaritmo natural en cada miembro se obtiene

$$\ln\left(\frac{R}{R_0}\right) = -\lambda t$$

$$(1) \qquad t = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{R}{R_0}\right)$$

Para encontrar λ se usa la ecuación 13.11:

$$(2) \qquad \lambda = \frac{0.693}{T_{1/2}} = \frac{0.693}{8.04 \text{ días}}$$

Al sustituir (2) en (1) se obtiene

$$t = -\left(\frac{8.04 \text{ días}}{0.693}\right)\ln\left(\frac{4.2 \text{ mCi}}{5 \text{ mCi}}\right) = 2.02 \text{ días}$$

13.5 PROCESOS DE DECAIMIENTO

Como se afirmó en la sección precedente, un núcleo radiactivo se desintegra de manera espontánea por medio de uno de los tres procesos siguientes: decaimiento alfa, decaimiento beta o decaimiento gamma. A continuación se estudiarán con mayor detalle estos procesos.

Decaimiento alfa

Si un núcleo emite una partícula α ($^4_2$He), pierde dos protones y dos neutrones. En consecuencia, el número atómico Z decrece por 2, el número de masa A decrece por 4 y el número de neutrones decrece por 2. El decaimiento puede expresarse como

Decaimiento alfa

$$^{A}_{Z}\text{X} \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\text{Y} + {}^{4}_{2}\text{He} \qquad (13.12)$$

donde X se denomina **núcleo padre** y Y se denomina **núcleo hijo.** Por ejemplo, ^{238}U y ^{226}Ra son, ambos, emisores alfa y decaen según los esquemas

$$^{238}_{92}\text{U} \longrightarrow {}^{234}_{90}\text{Th} + {}^{4}_{2}\text{He} \qquad (13.13)$$

$$^{226}_{88}\text{Ra} \longrightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn} + {}^{4}_{2}\text{He} \qquad (13.14)$$

La vida media para el decaimiento del ^{238}U es 4.47×10^9 años, y para el decaimiento del ^{226}Ra es 1.60×10^3 años. En ambos casos, observe que el número de masa del núcleo hijo es menor por 4 que el del núcleo padre. De manera semejante, el número atómico se reduce por 2. Las diferencias se explican mediante la partícula α emitida (el núcleo ^{4}He). Observe que los procesos de decaimiento alfa liberan energía porque los productos del decaimiento, en especial

la partícula alfa, están ligados más estrechamente que el núcleo padre (figura 13.10).

En la figura 13.16 se muestra el decaimiento espontáneo del ^{226}Ra. Como regla general, 1) la suma de los números de masa A debe ser la misma en ambos miembros de la ecuación y 2) la carga neta debe ser la misma en ambos miembros de la ecuación. Además, deben conservarse la energía y la cantidad de movimiento relativistas totales. Si M_X denota la masa atómica del padre, M_Y denota la masa del hijo y M_α la masa de la partícula alfa, puede definirse la **energía de desintegración** Q:

Energía de desintegración Q

$$Q = (M_X - M_Y - M_\alpha)c^2 \tag{13.15}$$

Observe que aquí puede usarse la masa atómica en vez de la masa nuclear, ya que las masas electrónicas se cancelan al evaluar las diferencias de masas. Las unidades de Q son joules cuando las masas se miden en kilogramos, y c es el valor conocido 3×10^8 m/s. No obstante, cuando las masas se expresan en la unidad más conveniente u, el valor de Q puede calcularse en MeV con la expresión

$$Q = (M_X - M_Y - M_\alpha) \times 931.494 \text{ MeV/u} \tag{13.16}$$

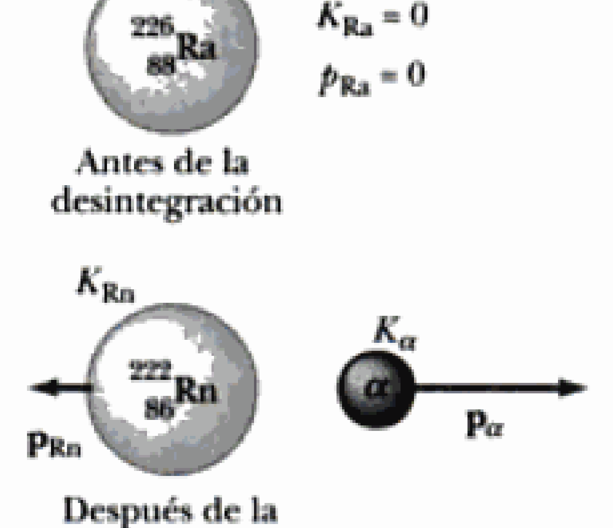


Figura 13.16 Decaimiento alfa del radio. El núcleo de radio está inicialmente en reposo. Después del decaimiento, la energía cinética del núcleo de radón es K_{Rn} y su cantidad de movimiento es $\mathbf{p}_{Rn}$, y la partícula alfa tiene energía cinética K_α y cantidad de movimiento $\mathbf{p}_\alpha$.

La energía de desintegración Q aparece en la forma de energía cinética del núcleo hijo y la partícula α. La cantidad proporcionada por la ecuación 13.16 algunas veces se denomina valor Q de la reacción nuclear. En el caso del decaimiento del ^{226}Ra descrito en la figura 13.16, si el núcleo padre está en reposo cuando se decae, la energía cinética residual de los productos es 4.87 MeV. La mayor parte de la energía cinética está asociada a la partícula alfa porque esta partícula es menos masiva que el núcleo hijo en retroceso, ^{222}Rn. Es decir, ya que debe conservarse la cantidad de movimiento, la partícula α más ligera retrocede a mucho mayor velocidad que el núcleo hijo. En general, las partículas ligeras se llevan la mayor parte de la energía en los decaimientos nucleares.

Es bastante fácil calcular la fracción de la energía de desintegración que se lleva la partícula α si se aplican la conservación de la energía y de la cantidad de movimiento:

$$Q = K_Y + K_\alpha \tag{13.17}$$

$$p_Y = p_\alpha \tag{13.18}$$

donde el subíndice Y representa al núcleo hijo. Debido a que la energía cinética total liberada en el decaimiento alfa (varios MeV) es pequeña en comparación con las energías en reposo de la partícula α (3 726 MeV) y del núcleo hijo (206.793 BeV para el ^{222}Rn), es posible utilizar las expresiones clásicas para la cantidad de movimiento y la energía cinética de las ecuaciones 13.17 y 13.18 para demostrar que

$$K_\alpha = \frac{M_Y}{M_Y + M_\alpha} Q \tag{13.19}$$

donde M_Y y M_α son las masas atómicas del núcleo hijo y la partícula α (consulte el problema 43 al final del capítulo).

De manera interesante, si se supone que el ^{238}U (u otros emisores alfa) decae (n) por la emisión de un protón o un neutrón, entonces la masa de los productos del decaimiento sería mayor que la del núcleo padre, correspondiendo a valores Q negativos. Estos valores Q negativos indican que tales decaimientos no ocurren en forma espontánea.

crementa su probabilidad de escapar. Además, la probabilidad se incrementa cuando disminuye el ancho de la barrera.

EJEMPLO 13.9 Probabilidad de decaimiento alfa

Aplique los métodos de tunelaje del capítulo 7 para calcular la probabilidad de que una partícula α escape de un núcleo de $^{226}_{88}$Ra con una energía de desintegración igual a 5 MeV.

Solución La probabilidad de escape no es otra que el coeficiente de transmisión T(E) para la barrera de Coulomb que se muestra en la figura 13.17. La ecuación 7.10 del capítulo 7 proporciona T(E) aproximadamente como

$$T(E) \approx \exp^{-(2/\hbar)\sqrt{2m}\int\sqrt{U(r)-E}\,dr}$$

La integral se toma sobre la región clásicamente prohibida, donde $E < U$. Para el decaimiento alfa, esta región está acotada por abajo por el radio nuclear R y por arriba por $R_1 = 2Zke^2/E$ [de $E = U(R_1) = 2Zke^2/R_1$] (consulte la figura 13.17). En esta expresión, Z es el número atómico del núcleo *hijo*.

La integral de tunelaje a evaluar es

$$\int\sqrt{U(r)-E}\,dr = \sqrt{E}\int_R^{R_1}\sqrt{\frac{R_1}{r}-1}\,dr$$

$$= R_1\sqrt{E}\int_{R/R_1}^{1}\sqrt{\frac{1}{z}-1}\,dz$$

donde $z = r/R_1$. Con algo de esfuerzo puede obtenerse un valor exacto de esta integral, aunque rápidamente se encuentra una aproximación útil si se observa que R/R_1 es un número pequeño ($R \sim 10$ fm; $R_1 \sim 50$ fm para $E \sim 5$ MeV). Así, como una primera estimación, el límite inferior se iguala a cero y se hace un cambio de variable con $z = \cos^2\theta$, con lo que se obtiene

$$\int_0^1\sqrt{\frac{1}{z}-1}\,dz = 2\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}[1-\cos 2\theta]\,d\theta = \frac{\pi}{2}$$

Para mejorar esto, la integral original se separa en dos y se aproxima la segunda, usando $1/z \gg 1$ para z pequeño, a fin de obtener

$$\int_0^1\sqrt{\frac{1}{z}-1}\,dz - \int_0^{R/R_1}\sqrt{\frac{1}{z}-1}\,dz = \frac{\pi}{2}$$

$$-\int_0^{R/R_1}\frac{dz}{\sqrt{z}} \approx \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{R}{R_1}}$$

Al combinar este resultado con $R_1 = 2Zke^2/E$ se obtiene, para la probabilidad de decaimiento,

$$T(E) = \exp\{-4\pi Z\sqrt{(E_0/E)} + 8\sqrt{Z(R/r_0)}\}$$

El parámetro $r_0 = \hbar^2/M_\alpha ke^2$ es un tipo de radio de Bohr para la partícula alfa, con el valor de 7.25 fm, y E_0 es una unidad de energía semejante al Rydberg en física atómica:

$$E_0 = \frac{ke^2}{2r_0} = \frac{14.40\text{ eV}\cdot\text{Å}}{(2)(7.25\times10^{-5}\text{ Å})} = 0.0993\text{ MeV}$$

Para el decaimiento alfa del radio, el núcleo hijo es radón, con número atómico $Z = 86$ y número de masa $A = 222$. La ecuación 13.1 predice que el radio R del núcleo del radón es

$$R = (1.2\times10^{-5}\text{ fm})(222)^{1/3} = 7.27\text{ fm}$$

Entonces, la probabilidad de decaimiento por el decaimiento alfa a $E = 5$ MeV es

$$\exp\{-4\pi(86)\sqrt{(0.0993/5)} + 8\sqrt{86(7.27/7.25)}\}$$

$$= \exp\{-78.008\} = 1.32\times10^{-34}$$

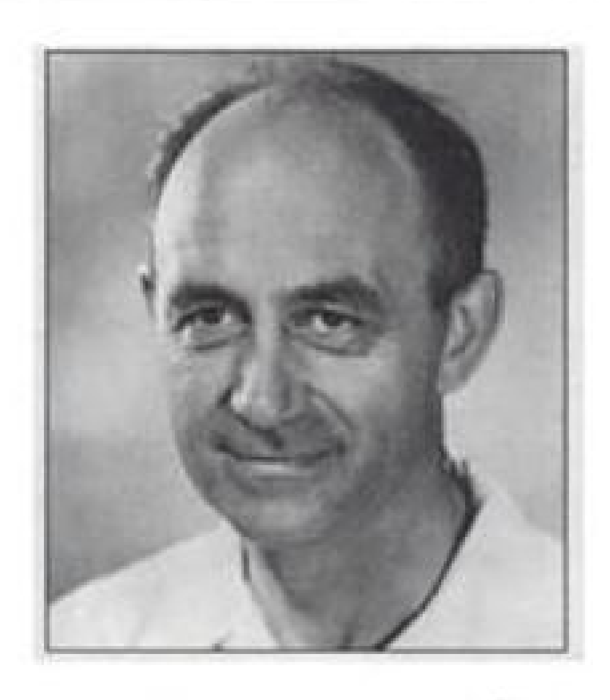
Esta probabilidad es bastante pequeña, aunque el número real de desintegraciones por segundo es mucho mayor debido a las múltiples colisiones que realiza la partícula alfa con la barrera nuclear. Esta frecuencia de colisión f es el recíproco del tiempo de tránsito para que la partícula alfa cruce el núcleo; es decir, $f = v/2R$, donde v es la velocidad de la partícula alfa dentro del núcleo. Aquí, como en casi todos los casos, f es alrededor de 10^{21} colisiones por segundo (consulte el problema 6 en el capítulo 7), lo que lleva a una razón de decaimiento pronosticada $\approx 10^{-13}$ desintegraciones por segundo, lo cual coincide razonablemente con el valor observado de $\lambda = 1.4\times10^{-11}\text{ s}^{-1}$.

Decaimiento beta

Cuando un núcleo radiactivo experimenta decaimiento beta, el núcleo hijo tiene el mismo número de nucleones que el núcleo padre, pero el número atómico se modifica por 1:

$$^{A}_{Z}\text{X} \longrightarrow {}^{A}_{Z+1}\text{Y} + \text{e}^- \qquad (13.20)$$

Decaimiento beta



BIOGRAFÍA

ENRICO FERMI
(1901–1954)

Enrico Fermi, físico italo-estadounidense, obtuvo su doctorado en la Universidad de Pisa en 1922. Luego estudió un posdoctorado en Alemania bajo la dirección de Max Born. Regresó a Italia en 1924, y en 1926 comenzó sus actividades como profesor de física en la Universidad de Roma. Fue galardonado con el premio Nobel de Física en 1938 debido a su trabajo en la producción de elementos radiactivos transuránicos (elementos más masivos que el uranio) por bombardeo de neutrones.

La primera vez que Fermi se interesó por la física fue cuando tenía 14 años, después de leer un antiguo libro de física en latín. (Era un excelente erudito y podía recitar de memoria *La divina comedia* de Dante y muchos escritos de Aristóteles.) Su gran habilidad para resolver problemas en física teórica y su capacidad para simplificar situaciones muy complicadas lo convirtieron en algo así como un oráculo. Fermi también era un talentoso experimental y profesor. Durante uno de sus primeros viajes como profesor a Estados Unidos, uno de los automóviles que había comprado se descompuso, por lo que tuvo que empujarlo hasta una gasolinera cercana. Una vez que Fermi reparó el automóvil fácilmente, el dueño de la gasolinera le ofreció trabajo ahí mismo.

Fermi y su familia emigraron a Estados Unidos, donde se volvió ciudadano por naturalización en 1944. Primero enseñó en la Universidad de Columbia y después en la de Chicago. Como parte del Proyecto Manhattan durante la Segunda Guerra Mundial, Fermi fue comisionado para diseñar y construir una estructura, denominada pila atómica, donde podía ocurrir una reacción en cadena autosostenida. La estructura, construida en una cancha de squash bajo el estadio de la Universidad de Chicago, contenía uranio en combinación con bloques de grafito para aminorar la velocidad de los neutrones a velocidades térmicas. Para absorber neutrones y controlar la velocidad de reacción se utilizaron varillas de cadmio insertadas en la pila. El 2 de diciembre de 1942 a las 15:45 hrs se hizo historia, a medida que las varillas de cadmio se retiraban lentamente y se observaba una reacción en cadena autosostenida. El impresionante logro de Fermi, el primer reactor nuclear mundial, marcó el inicio de la era atómica.

Fermi falleció de cáncer a la edad de 53 años en 1954. Un año después se descubrió el centésimo elemento, denominado *fermio* en su honor.

(*Fermi National Accelerator Laboratory.*)

Captura de un electrón

Un proceso que compite con el decaimiento e^+ se denomina **captura de un electrón.** Ésta ocurre cuando un núcleo padre captura uno de sus propios electrones atómicos orbitales y emite un neutrino. El producto final después del decaimiento es un núcleo cuya carga es $Z - 1$:

$$ {}^{A}_{Z}\text{X} + \text{e}^- \longrightarrow {}_{Z-1}^{\;\;A}\text{X} + \nu \qquad (13.24)$$

En la mayor parte de los casos lo que se captura es un electrón interno de la capa K, lo cual se denomina **captura K.** Un ejemplo de este proceso es la captura de un electrón por ${}^{7}_{4}\text{Be}$ para transformarse en ${}^{7}_{3}\text{Li}$:

$$ {}^{7}_{4}\text{Be} + \text{e}^- \longrightarrow {}^{7}_{3}\text{Li} + \nu $$

Por último, resulta instructivo mencionar los valores Q para los procesos de decaimiento beta. Los valores Q para el decaimiento e^- y la captura de un electrón están dados por $Q = (M_X - M_Y)c^2$, mientras los valores Q para el decaimiento e^+ están dados por $Q = (M_X - M_Y - 2m_e)c^2$, donde M_X y M_Y son las masas de los átomos neutros. Estas relaciones son de utilidad para determinar si los procesos de decaimiento beta son permitidos energéticamente o no.

Fechamiento con carbono

El decaimiento beta del ^{14}C suele usarse para fechar muestras orgánicas. Los rayos cósmicos en la atmósfera superior provocan reacciones nucleares que producen ^{14}C. De hecho, la razón del ^{14}C al ^{12}C en las moléculas de bióxido

de carbono de la atmósfera terrestre tiene un valor constante aproximadamente igual a 1.3×10^{-12}. Todos los organismos vivos poseen esta misma razón del ^{14}C al ^{12}C, porque intercambian de manera continua bióxido de carbono con su entorno. Cuando un organismo muere, no obstante, deja de absorber ^{14}C de la atmósfera, y así la razón $^{14}C/^{12}C$ decrece como resultado del decaimiento beta del ^{14}C, cuya vida media es de 5 730 años. En consecuencia, es posible medir la antigüedad de un material si se mide su actividad por unidad de masa provocada por la desintegración del ^{14}C. Utilizando esta técnica, los científicos han podido identificar muestras de madera, carbón, huesos y conchas que vivieron hace entre 1 000 y 25 000 años. Este conocimiento ha ayudado a reconstruir la historia de los organismos vivos, incluyendo los humanos, durante ese periodo.

Un ejemplo particularmente interesante de fechamiento lo constituye el de los Rollos del Mar Muerto, un grupo de manuscritos descubiertos por un pastor en 1947. Al traducirlos se encontró que se trataba de documentos religiosos que incluían la mayor parte de los libros del Antiguo Testamento. Debido a su importancia histórica y religiosa, los académicos deseaban conocer su antigüedad. El fechamiento con carbono 14 del material en que estaban envueltos los rollos estableció que éstos datan aproximadamente de hace 1 950 años.

EJEMPLO 13.10 Antigüedad del hombre de hielo

En 1991, un turista alemán descubrió los restos bien preservados de un humano, identificado más tarde como el "hombre de hielo", atrapado en un glaciar en los Alpes italianos. El fechamiento radiactivo de una muestra del hombre de hielo estableció una antigüedad de 5 300 años. ¿Por qué los científicos fecharon la muestra con el isótopo ^{14}C en vez de hacerlo con ^{11}C, un emisor beta con vida media de 20.4 min?

Razonamiento La vida media del ^{14}C es bastante larga, de 5 030 años, por lo que la fracción de núcleos de ^{14}C que quedan al cabo de una vida media es lo suficientemente alta para permitir mediciones precisas de cambios en la actividad de la muestra. El isótopo ^{11}C, cuya vida media es muy breve, no sirve porque su actividad decrece hasta un valor diminuto sobre la antigüedad de la muestra, lo que lo hace imposible de detectar. Si se quiere fechar una muestra que no es muy antigua, por ejemplo, alrededor de 50 años, entonces el científico debe seleccionar el isótopo de algún otro elemento cuya vida media sea comparable a la antigüedad de la muestra. Por ejemplo, si la muestra contiene hidrógeno, podría medirse la actividad del ^{3}H (tritio), un emisor beta cuya vida media es de 12.3 años. Como regla general, la antigüedad esperada de la muestra debe ser suficientemente grande para permitir la medición de un cambio en la actividad, aunque no tan grande para que la actividad sea indetectable.

EJEMPLO 13.11 Fechamiento radiactivo

Un arqueólogo encuentra una pieza de carbón de 25 g en los restos de una ciudad antigua. La muestra presenta una actividad de ^{14}C de 250 decaimientos/minuto. ¿Hace cuánto murió el árbol del cual proviene esta muestra?

Solución Primero se calcula la constante de decaimiento para el ^{14}C, que tiene una vida media de 5 730 años.

$$\lambda = \frac{0.693}{T_{1/2}} = \frac{0.693}{(5730\text{ años})(3.16 \times 10^{7}\text{ s/años})}$$
$$= 3.83 \times 10^{-12}\text{ s}^{-1}$$

El número de núcleos de ^{14}C puede calcularse en dos pasos: 1) El número de núcleos de ^{12}C en 25 g de carbón es

$$N(^{12}C) = \frac{6.02 \times 10^{23}\text{ núcleos/mol}}{12\text{ g/mol}}(25\text{ g})$$
$$= 1.26 \times 10^{24}\text{ núcleos}$$

Si se sabe que la razón de ^{14}C a ^{12}C en la muestra viva era 1.3×10^{-12}, se observa que el número de núcleos de ^{14}C en 25 g *antes* de la desintegración es

$$N_0(^{14}C) = (1.3 \times 10^{-12})(1.26 \times 10^{24})$$
$$= 1.6 \times 10^{12}\text{ núcleos}$$

Por tanto, la actividad inicial de la muestra es

$$R_0 = N_0\lambda = (1.6 \times 10^{12}\text{ núcleos})(3.83 \times 10^{-12}\text{ s}^{-1})$$
$$= 6.13\text{ decaimientos/s} = 370\text{ decaimientos/min}$$

2) Ahora es posible calcular la antigüedad del carbón usando la ecuación 13.10, que relaciona la actividad R en cualquier instante t con la actividad inicial R_0:

$$R = R_0 e^{-\lambda t} \qquad \text{o} \qquad e^{-\lambda t} = \frac{R}{R_0}$$

Debido a que proporcionó que $R = 250$ decaimientos/min y como se encontró que $R_0 = 370$ decaimientos/min, t puede calcularse tomando el logaritmo natural de ambos miembros de la última ecuación:

$$-\lambda t = \ln\left(\frac{R}{R_0}\right) = \ln\left(\frac{250}{370}\right) = -0.39$$

$$t = \frac{0.39}{\lambda} = \frac{0.39}{3.84 \times 10^{-12}\ \text{s}^{-1}}$$
$$= 1 \times 10^{11}\ \text{s} = 3.2 \times 10^{3}\ \text{años}$$

Decaimiento gamma

Muy a menudo, un núcleo que experimenta un decaimiento radiactivo queda en un estado energético excitado. Luego, puede experimentar un segundo decaimiento hacia un estado energético inferior, quizá al estado fundamental, al emitir un fotón de alta energía:

Decaimiento gamma

$$^{A}_{Z}\text{X}^* \longrightarrow {}^{A}_{Z}\text{X} + \gamma \tag{13.25}$$

donde X* indica un núcleo en un estado excitado. La vida media típica de un estado nuclear excitado es 10^{-10} s. Los fotones emitidos en un proceso de desexcitación así se denominan rayos gamma. Estos fotones tienen muy alta energía (en el intervalo de 1 MeV a 1 GeV) con respecto a la energía de la luz visible (alrededor de 1 eV). Recuerde que la energía de los fotones emitidos (o absorbidos) por un átomo es igual a la diferencia en energía entre los dos estados electrónicos implicados en la transición. De manera semejante, un fotón de un rayo gamma posee una energía hf que es igual a la diferencia en energía ΔE entre dos niveles energéticos nucleares. Cuando un núcleo decae al emitir un rayo gamma, el núcleo no cambia su masa atómica A o su número atómico Z.

Un núcleo puede llegar a un estado excitado como resultado de una colisión violenta con otra partícula. También es muy común que un núcleo esté en un estado excitado después de experimentar decaimiento alfa o beta. La siguiente secuencia de eventos representa una situación típica en la que se presenta decaimiento gamma:

$$^{12}_{5}\text{B} \longrightarrow {}^{12}_{6}\text{C}^* + e^- + \bar{\nu} \tag{13.26}$$

$$^{12}_{6}\text{C}^* \longrightarrow {}^{12}_{6}\text{C} + \gamma \tag{13.27}$$

En la figura 13.20 se muestra el esquema de decaimiento del ^{12}B, que experimenta decaimiento beta con una vida media de 20.4 ms hacia cualquiera de

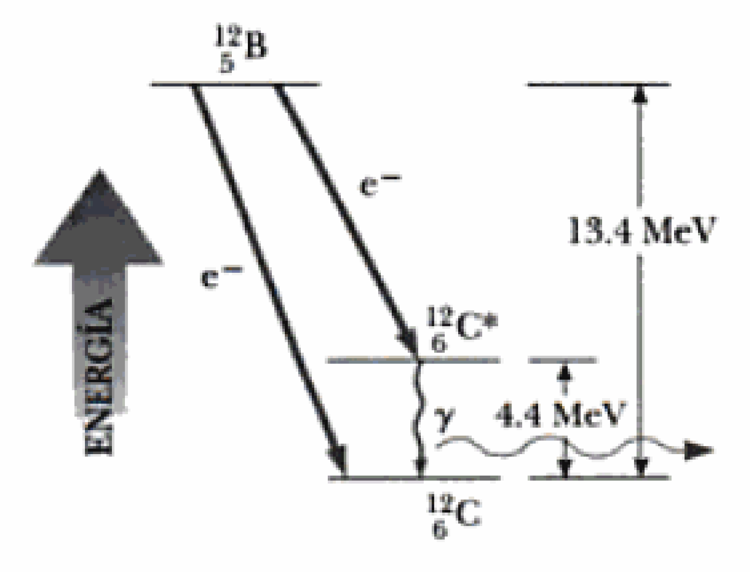


Figura 13.20 Diagrama de niveles energéticos que muestra el estado nuclear inicial de un núcleo de ^{12}B y dos estados energéticos inferiores posibles del núcleo de ^{12}C. El decaimiento beta del núcleo de ^{12}B puede resultar en una de las dos situaciones siguientes: el núcleo de ^{12}C se encuentra en el estado fundamental o en el estado excitado, en cuyo caso el núcleo se denota por ^{12}C*. En el último caso, el decaimiento beta a ^{12}C* es seguido por un decaimiento gamma a ^{12}C cuando el núcleo excitado realiza una transición al estado fundamental.

Tabla 13.4 Procesos de decaimientos

Decaimiento alfa	${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}X + {}^{4}_{2}He$
Decaimiento beta (e^-)	${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}_{Z+1}^{A}X + e^- + \bar{\nu}$
Decaimiento beta (e^+)	${}^{A}_{Z}X \longrightarrow {}_{Z-1}^{A}X + e^+ + \nu$
Captura de un electrón	${}^{A}_{Z}X + e^- \longrightarrow {}_{Z-1}^{A}X + \nu$
Decaimiento gamma	${}^{A}_{Z}X^* \longrightarrow {}^{A}_{Z}X + \gamma$

los dos niveles del ${}^{12}C$. Puede ya sea 1) decaer directamente al estado fundamental del ${}^{12}C$ emitiendo un electrón de 13.4 MeV, o bien, 2) experimentar decaimiento e^- a un estado excitado del ${}^{12}C^*$, seguida de un decaimiento gamma hacia el estado fundamental. El último proceso resulta en la emisión de un electrón de 9 MeV y un fotón de 4.4 MeV. En la tabla 13.4 se resumen los caminos mediante los cuales un núcleo radiactivo puede decaer.

13.6 RADIACTIVIDAD NATURAL

Cuatro series radiactivas

Los núcleos radiactivos suelen clasificarse en dos grupos: 1) núcleos inestables que se encuentran en la naturaleza, que originan lo que se denomina **radiactividad natural** y 2) núcleos producidos en el laboratorio a través de reacciones nucleares, que muestran **radiactividad artificial.** Hay tres series de núcleos radiactivos que existen en la naturaleza (tabla 13.5). Cada serie empieza con un isótopo radiactivo específico de larga duración, cuya vida media excede la de cualquiera de sus descendientes. Las tres series naturales empiezan con los isótopos ${}^{238}U$ (**serie del uranio**), ${}^{235}U$ (**serie del actinio**) y ${}^{232}Th$ (**serie del torio**), y los productos estables finales correspondientes son tres isótopos del plomo: ${}^{206}Pb$, ${}^{207}Pb$ y ${}^{208}Pb$. La cuarta serie en la tabla 13.5 es una serie radiactiva artificial denominada **serie del neptunio,** ya que este elemento es el miembro de mayor duración de la serie aparte de su producto final estable, el ${}^{209}Bi$. El ${}^{237}Np$ es un elemento transuránico (cuyo número atómico es mayor que el del uranio) que no se encuentra en la naturaleza. La vida media de este elemento es de "sólo" 2.14×10^6 años, mucho menos que la antigüedad de la Tierra; en consecuencia, cualquier ${}^{237}Np$ presente cuando se formó la Tierra ya se hubiera desintegrado.

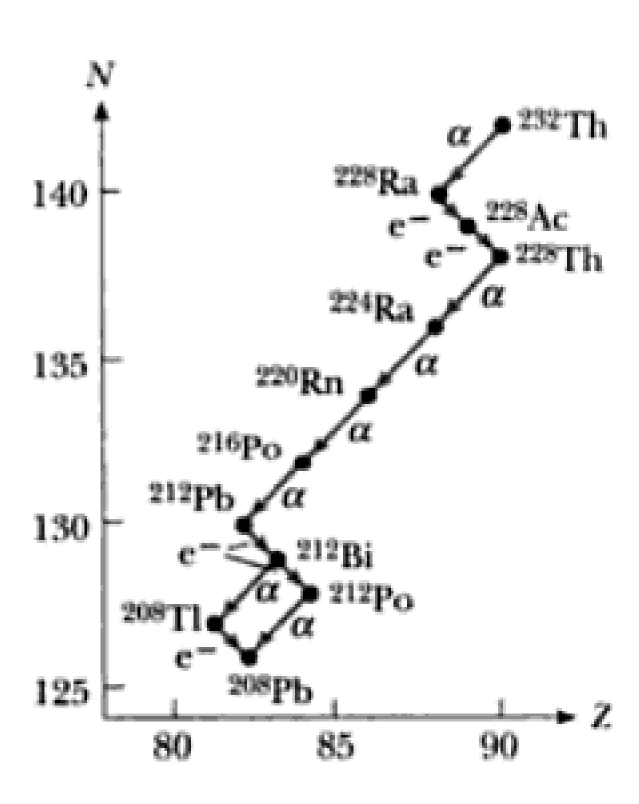


Figura 13.21 Decaimientos consecutivos para la serie del ${}^{232}Th$.

En la figura 13.21 se muestran los decaimientos sucesivos para la serie del ${}^{232}Th$. Observe que el ${}^{232}Th$ primero experimenta decaimiento α para transformarse en ${}^{228}Ra$. Luego, el ${}^{228}Ra$ experimenta dos decainientos β , consecutivos hasta el ${}^{228}Th$. La serie continúa y finalmente se bifurca cuando llega al ${}^{212}Bi$. En este punto hay dos posibilidades de decaimiento. El fin de la serie de

Tabla 13.5 Las cuatro series radiactivas

Serie	Isótopo inicial	Vida media (años)	Producto final estable
Uranio	${}^{238}_{92}U$	4.47×10^9	${}^{206}_{82}Pb$
Actinio	${}^{235}_{92}U$	7.04×10^8	${}^{207}_{82}Pb$
Torio	${}^{232}_{90}Th$	1.41×10^{10}	${}^{208}_{82}Pb$
Neptunio	${}^{237}_{93}Np$[a]	2.14×10^6	${}^{209}_{83}Bi$

[a]Este es el miembro de mayor duración de la serie. El isótopo inicial es en realidad plutonio, ${}^{241}_{94}Pu$.

teoría de la evolución requerían de largos periodos, del orden de cientos de millones de años.

Kelvin mete su cuchara. Difícilmente alguna narración científica implica más disciplinas y nombres científicos que ésta. Sólo ateniéndose a lo esencial del caso, es necesario mencionar a William Thompson, Lord Kelvin (1824-1907, físico británico), uno de los físicos más importantes del siglo XIX. En la década de 1860, Kelvin refinó el modelo de enfriamiento de Fourier y calculó que la antigüedad de la Tierra era aproximadamente de 60 millones de años, partiendo de una temperatura uniforme de alrededor de 10 000°F, el punto máximo de fusión de la roca. También estimó que el Sol tenía alrededor de la misma antigüedad, o algo menos, con base en un modelo de producción de energía solar que funciona por contracción gravitacional.

Los cálculos de Kelvin iniciaron una grave desavenencia entre los físicos que creían en la cifra de 60 millones de años y los geólogos, quienes consideraban que la Tierra era 10 veces más antigua. Incluso los antievolucionistas se pusieron al lado de los físicos, a quienes veían como los proveedores de evidencias científicas claras de que la Tierra no había existido lo suficiente para que ocurriese la selección natural. Nadie pudo prever que el descubrimiento de la radiactividad proporcionaría tanto la explicación del fracaso de los modelos de enfriamiento como un método exquisitamente preciso para fechar la antigüedad de la Tierra misma.

Fin del problema de fechamiento de la Tierra. El descubrimiento del radio y la medición de su abundancia y la energía que despide permitieron a los Curie explicar el fechamiento erróneo de Kelvin de la antigüedad de la Tierra. Cuando se calcula la cantidad de energía térmica despedida por el radio en un día en la corteza terrestre, el dato resulta comparable a la pérdida diaria de energía del núcleo de la Tierra por conducción a través de la corteza y radiación final hacia el espacio. Esto significa que la Tierra es más caliente de lo que sería si no se agregase energía por decaimiento radiactivo. Esto condujo a Kelvin a subestimar el tiempo real de enfriamiento cuando no incorporó en el presupuesto energético de la Tierra la energía liberada por decaimiento radiactivo.

Como ya se mencionó, poco después del prodigioso descubrimiento de las series radiactivas y la transmutación de miembros de las series en diferentes elementos químicos por Rutherford y Frederick Soddy (1877-1956, fisicoquímico inglés), Rutherford se dio cuenta que para fechar las rocas más antiguas de la Tierra era posible utilizar técnicas radiactivas. Los primeros métodos implicaron la medición de la cantidad de helio (del decaimiento alfa) atrapada en las rocas, aunque estos métodos sólo proporcionaron un límite inferior de la antigüedad de la Tierra, porque tal vez ya parte del helio se había fugado de las rocas. En la década de 1940, en parte como resultado del trabajo bélico sobre la bomba atómica, técnicas muy sensibles fueron desarrolladas por Clair Cameron Patterson (1922-1995, geoquímico estadounidense) y otros al medir minúsculas concentraciones de plomo en muestras. Debido a que las tres series radiactivas naturales producen isótopos estables del plomo, la medición de la cantidad de plomo en rocas muy antiguas debe indicar la antigüedad de la Tierra. No obstante, una dificultad fundamental es que se requiere conocer la cantidad inicial de plomo; es decir, plomo no producido por decaimiento radiactivo, presente. Debido a su proceso de formación, se cree que los meteoritos de hierro que casi no contienen uranio contienen verdaderos niveles originales de plomo. Patterson usó esto y las rocas más antiguas de la Tierra para determinar la antigüedad de ésta. En 1953 encontró el valor aún aceptado de (4.55 ± 0.07) miles de millones de años. Científico modesto pero enérgico, Patterson es citado al comentar algo sobre su trascendental descubrimiento:

13.4 Radiactividad

21. Mediciones de una muestra radiactiva revelan que su actividad decrece por un factor de 5 durante un intervalo de 2 h. a) Determine la constante de decaimiento del núcleo radiactivo. b) Calcule el valor de la vida media de este isótopo.
22. La vida media del ^{131}I es 8.04 días. a) Calcule la constante de decaimiento para este isótopo. b) Encuentre el número de núcleos de ^{131}I necesarios para producir una muestra con una actividad de 0.5 μCi.
23. Una muestra recién preparada de cierto isótopo radiactivo tiene una actividad de 10 mCi. Luego que transcurren 4 h, su actividad es de 8 mCi. a) Encuentre la constante de decaimiento y la vida media del isótopo. b) ¿Cuántos átomos del isótopo había en la muestra recién preparada? c) ¿Cuál es la actividad de la muestra 30 h después que se ha preparado?
24. La vida media del tritio es de 12.33 años. ¿Qué porcentaje de los núcleos de ^3H en una muestra de este elemento decaerán durante un periodo de 5 años?
25. Se dice que una muestra de material radiactivo está *libre de portadores* cuando ningún isótopo estable del elemento radiactivo se halla presente. Calcule la masa del estroncio en una muestra libre de portadores de 5 mCi de ^{90}Sr cuya vida media es de 28.8 años.
26. ¿Cuántos átomos radiactivos están presentes en una muestra que tiene una actividad de 0.2 μCi y una vida media de 8.1 días?
27. Una solución de laboratorio se prepara con una actividad inicial de 2.5 mCi/mL debida a ^{24}Na, y 10 mL de la solución se diluyen (en $t_0 = 0$) en una solución de trabajo con un volumen total de 250 mL. Después de 48 h, una muestra de 0.5 mL de la solución de trabajo se monitorea con un contador. ¿Cuál es la actividad medida? (*Nota:* 1 mL = 1 mililitro, y la vida media del ^{24}Na es 15.0 h.)
28. Empiece con la ecuación 13.10 y encuentre las siguientes formas útiles para la constante de decaimiento y la vida media:

$$\lambda = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{R_0}{R}\right) \qquad T_{1/2} = \frac{(\ln 2)\,t}{\ln(R_0/R)}$$

29. El isótopo radiactivo ^{198}Au tiene una vida media de 64.8 h. La actividad inicial de una muestra que contiene este isótopo es 40 μCi. Calcule el número de núcleos que decaen en el intervalo de $t_1 = 10$ h hasta $t_2 = 12$ h.
30. Durante la manufactura de un componente de un motor de acero, se incluye hierro radiactivo (^{59}Fe) en una masa total de 0.2 kg. El componente se coloca en un motor de prueba cuando la actividad debida a este isótopo es 20 μCi. Después de un periodo de prueba de 1 000 h, se retira el aceite del motor y se encuentra que contiene suficiente ^{59}Fe para producir 800 decaimientos/min por litro de aceite. El volumen total de aceite en el motor es 6.5 litros. Calcule la masa total gastada por el componente del motor por hora de operación. (La vida media del ^{59}Fe es 45.1 días).

Tiempo (h)	Velocidad de conteo (conteos/min)
1	3100
2	2450
4	1480
6	910
8	545
10	330
12	200

31. La actividad de una muestra de material radiactivo se midió superior a 12 h, y en los instantes indicados se obtuvieron las siguientes velocidades de conteo *netas*: a) Elabore la curva de actividad en papel semilogartímico. b) Determine la constante de decaimiento y la vida media de los núcleos en la muestra. c) ¿Qué velocidad de conteo esperaría para la muestra en $t = 0$? d) Suponga que la eficiencia del instrumento de conteo es 10% y calcule el número de átomos radiactivos en la muestra en $t = 0$.
32. Un subproducto de algunos reactores de fisión es el isótopo $^{239}_{94}Pu$, que es un emisor alfa con una vida media de 24 000 años:

$$^{239}_{94}\text{Pu} \longrightarrow {}^{235}_{92}\text{U} + \alpha$$

Considere una muestra de 1 kg de $^{239}_{94}Pu$ puro a $t = 0$. Calcule a) el número de núcleos de $^{239}_{94}Pu$ presentes en $t = 0$, b) la actividad inicial de la muestra y c) el tiempo necesario para que la actividad decrezca a 1 decaimiento/s.
33. La masa de una pieza de carbón es de 25 g y se sabe que la pieza tiene alrededor de 25 000 años de antigüedad. a) Determine el número de decaimientos por minuto esperados para esta muestra. b) Si el fondo radiactivo en el contador, sin la muestra, es de 20 conteos/min y se supone una eficiencia de 100% en el conteo, explique por qué 25 000 años está próximo al límite de fechamiento con esta técnica.
34. Debido a un accidente en un reactor de fisión, en el aire se evaporan 5×10^6 Ci de ^{90}Sr ($T_{1/2} = 27.7$ años). El ^{90}Sr cae sobre un área de 10^4 km^2. ¿Cuánto tiempo es necesario para que la actividad del ^{90}Sr alcance el nivel agrícola "seguro" de 2 μCi/m^2?
35. ¿Qué actividad específica (consulte el problema 36), en decaimientos/min·g, es de esperar para muestras de carbono provenientes de huesos de 2 000 años de antigüedad? (Observe que la razón de ^{14}C a ^{12}C en organismos vivos es de 1.3×10^{-12} y que la vida media del ^{14}C es 5 730 años.)
36. Además de los núcleos radiactivos incluidos en la serie de decaimiento natural, hay muchos otros núcleos radiactivos que existen en la naturaleza. Uno es el ^{147}Sm, que tiene una abundancia de 15% en la naturaleza y una vida media aproximada de 1.3×10^{10} años. Calcule el número de decaimientos por segundo por gramo (debido a este isótopo) en una muestra de samario natural. El peso atómico de este elemento es 150.4. (La actividad por unidad de masa se denomina *actividad específica*.)
37. Un núcleo radiactivo con constante de decaimiento λ se desintegra en un núcleo hijo estable. a) Demuestre

que el número de núcleos hijo, N_2, aumenta con el tiempo según la expresión

$$N_2 = N_{01}(1 - e^{-\lambda t})$$

donde N_{01} es el número inicial de núcleos padre. b) Empezando con 10^6 núcleos padre en $t = 0$, con una vida media de 10 h, grafique el número de núcleos padre y el número de núcleos hijo como funciones del tiempo sobre el intervalo de 0 a 30 h.

38. Muchos radioisótopos poseen importantes aplicaciones industriales, médicas y de investigación. Uno de éstos es el ^{60}Co, cuya vida media es de 5.2 años y que decae por la emisión de una partícula beta (energía igual a 0.31 MeV) y dos fotones gamma (energías iguales a 1.17 MeV y 1.33 MeV). Un científico desea preparar una fuente sellada de ^{60}Co que tenga una actividad de por lo menos 10 Ci después de 30 meses de uso. a) ¿Qué masa inicial mínima de ^{60}Co se requiere? b) ¿A qué velocidad emitirá energía la fuente al cabo de 30 meses?

39. El concepto de vida media se describió en la sección 13.4 y la ecuación 13.11 proporciona la relación entre $T_{1/2}$ y λ. Otro parámetro que suele ser de utilidad para describir procesos radiactivos es la *vida promedio*, τ. Aunque la vida media de un isótopo radiactivo se conoce con certidumbre, no es posible pronosticar el tiempo en que decaerá un átomo individual. La vida promedio es una medida de la duración promedio de existencia de todos los átomos en una muestra particular. Demuestre que $\tau = 1/\lambda$. (*Sugerencia:* Recuerde que τ es esencialmente un valor promedio, y use el hecho de que el número de átomos que decaén entre t y $t + dt$ es igual a dN. Además, observe que estos dN átomos tienen un tiempo finito de existencia, t).

40. De la forma en que existe en la naturaleza, el potasio incluye un isótopo radiactivo ^{40}K cuya vida media es de 1.27×10^9 años y tiene una abundancia relativa de 0.0012%. Estos núcleos se decaen por dos caminos distintos: 89% por emisión e^- y 11% por emisión e^+. Calcule la actividad total en Bq asociada con 1 kg de KCl *debido a la emisión* e^-.

13.5 Procesos de decaimiento

41. Encuentra la energía liberada en el decaimiento alfa de $^{238}_{92}$U:

$$^{238}_{92}\text{U} \longrightarrow {}^{234}_{90}\text{Th} + {}^{4}_{2}\text{He}$$

Los valores de masa que se muestran en la tabla 13.6 son útiles.

42. Cuando, después de una reacción o perturbación de cualquier tipo, un núcleo queda en un estado excitado, puede volver a su estado normal (fundamental) por emisión de un fotón (o varios fotones) gamma. La ecuación 13.25 describe este proceso. El núcleo emisor debe retroceder a fin de conservar tanto la energía como la cantidad de movimiento. a) Demuestre que la energía de retroceso del núcleo es

$$E_r = \frac{(\Delta E)^2}{2Mc^2}$$

donde ΔE es la diferencia en energía entre los estados excitado y fundamental de un núcleo de masa M. b) Calcule la energía de retroceso del núcleo de ^{57}Fe cuando decae por emisión gamma desde el estado excitado a 14.4 keV. Para este cálculo, considere que la masa es de 57 u. (*Sugerencia:* Cuando escriba la ecuación para la conservación de la energía, use $(Mv)^2/2M$ para la energía cinética del núcleo en retroceso. También, suponga que $hf \ll Mc^2$.)

43. La ecuación 13.12 representa el decaimiento por emisión alfa de un núcleo inestable en reposo. La energía de desintegración Q proporcionada por la ecuación 13.15 debe compartirse entre la partícula alfa y el núcleo hijo a fin de conservar tanto la energía como la cantidad de movimiento en el proceso de decaimiento. a) Demuestre que para partículas no relativistas, Q y K_α, la energía cinética de la partícula α, están relacionadas por la expresión

$$Q = K_\alpha\left(1 + \frac{M_\alpha}{M_Y}\right)$$

wdonde M_Y es la masa del núcleo hijo. b) Use el resultado del inciso a) para encontrar la energía de la partícula α emitida en el decaimiento del ^{226}Ra. c) ¿Cuál es la energía cinética del hijo? d) Aplique la expresión anterior para Q al decaimiento beta $^{210}_{83}\text{Bi} \longrightarrow {}^{210}_{84}\text{Po} + e^-$ para comprobar la afirmación de que el núcleo hijo se lleva una cantidad despreciable de energía cinética en el decaimiento beta. ¿Por qué su respuesta es una aproximación?

44. Encuentre la energía cinética de una partícula alfa emitida durante el decaimiento alfa de $^{220}_{86}$Rn. Suponga que el núcleo hijo, $^{216}_{84}$Po, posee una velocidad de retroceso igual a cero.

45. Determine cuál de los siguientes decaimientos sugeridos puede ocurrir en forma espontánea:
(a) $^{40}_{20}\text{Ca} \longrightarrow e^+ + {}^{40}_{19}\text{K} + \nu$
(b) $^{98}_{44}\text{Ru} \longrightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{94}_{42}\text{Mo}$
(c) $^{144}_{60}\text{Nd} \longrightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{140}_{58}\text{Ce}$

46. a) ¿Por qué el siguiente decaimiento β inverso está prohibido para un protón libre?

$$p \longrightarrow n + e^+ + \nu$$

b) ¿Por qué la misma reacción es posible si el protón está ligado a un núcleo? Por ejemplo, ocurre la siguiente reacción:

$$^{13}_{7}\text{N} \longrightarrow {}^{13}_{6}\text{C} + e^+ + \nu$$

c) ¿Cuánta energía se libera en la reacción proporcionada en el inciso b)? [Tome las masas como $m(e^+) = 0.000549$ u, $M(^{13}\text{C}) = 13.003355$ u y $M(^{13}\text{N}) = 13.005739$ u, y consulte el problema 49.]

47. Use el principio de incertidumbre de Heisenberg para establecer un argumento razonable contra la hipótesis de que en el núcleo puede haber electrones libres. Use expresiones relativistas para la cantidad de movimiento y la energía, e incluya hipótesis y aproximaciones idóneas.

58. a) El núcleo hijo formado en un decaimiento radiactivo a menudo es radiactivo. Sean N_{10} el número de núcleos padre en el instante $t = 0$, $N_1(t)$ el número de núcleos padre en el instante t, y λ_1 la constante de decaimiento del padre. Suponga que el número de núcleos hijo en el instante $t = 0$ es cero, y sean $N_2(t)$ el número de núcleos hijo en el instante t y λ_2 la constante de decaimiento del hijo. Demuestre que $N_2(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2$$

b) Por sustitución, compruebe que la solución de esta ecuación diferencial es

$$N_2(t) = \frac{N_{10}\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}\right)$$

Esta ecuación es la ley de decaimientos radiactivos consecutivos. c) El ^{218}Po decae en ^{214}Pb con una vida media de 3.10 min, y el ^{214}Pb decae en ^{214}Bi con una vida media de 26.8 min. En los mismos ejes, elabore las gráficas de $N_1(t)$ para el ^{218}Po y de $N_2(t)$ para el ^{214}Pb. Sea $N_{10} = 1\ 000$ núcleos, y escoja valores de t desde 0 hasta 36 min en intervalos de 2 minutos. La curva para el ^{214}Pb al principio asciende hasta un máximo y luego empieza a decaer. ¿En qué instante t_m el número de núcleos de ^{214}Pb es máximo? d) Aplique la condición para el máximo $\frac{dN_2}{dt} = 0$, y obtenga una fórmula simbólica para t_m en términos de λ_1 y λ_2. ¿El valor obtenido en el inciso d) coincide con esta fórmula?

59. Se encontró que cierto artefacto africano tiene una actividad de carbono 14 igual a (0.12 ± 0.01) Bq por gramo de carbono. Suponga que la incertidumbre en la vida media del ^{14}C (5 730 años) y en la actividad del carbono atmosférico (0.25 Bq por gramo) es despreciable. ¿En qué intervalo se encuentra la antigüedad del objeto?

60. Como parte de su descubrimiento del neutrón en 1932, James Chadwick determinó la masa de la partícula recientemente identificada al dirigir un haz de neutrones rápidos, todos con la misma velocidad, hacia dos blancos distintos y midiendo las velocidades de retroceso máximas de los núcleos blanco. Las velocidades máximas se presentan cuando ocurre un choque frontal elástico entre un neutrón y un núcleo blanco estacionario. a) Represente las masas y las velocidades finales de los dos núcleos blanco como m_1, v_1, m_2 y v_2, y suponga que es válida la mecánica newtoniana. Demuestre que la masa del neutrón puede calcularse a partir de la ecuación

$$m_n = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{v_2 - v_1}$$

d) Chadwick dirigió un haz de neutrones (producidos a partir de una reacción nuclear) hacia parafina con hidrógeno. Se encontró que la velocidad máxima de los protones expulsados era de 3.3×10^7 m/s. Debido a que la velocidad de los neutrones no puede determinarse en forma directa, se realizó un segundo experimento usando neutrones de la misma fuente y núcleos de hidrógeno como blanco. Se encontró que la velocidad de retroceso máxima de los núcleos de hidrógeno era de 4.7×10^6 m/s, y se consideró que las masas de un protón y un núcleo de hidrógeno eran iguales a 1 u y 4 u, respectivamente. ¿Cuál era el valor de Chadwick para la masa del neutrón?

61. Una muestra de roca contiene trazas de ^{238}U, ^{235}U, ^{232}Th, ^{208}Pb, ^{207}Pb y ^{206}Pb. Un análisis cuidadoso muestra que la razón de la cantidad de ^{238}U a ^{206}Pb es 1.164. a) Suponiendo que, de inicio, la roca no contenía plomo determine su antigüedad. b) ¿Cuáles deben ser las razones de ^{235}U a ^{207}Pb y de ^{232}Th a ^{208}Pb para que produzcan la misma antigüedad de la roca? Ignore las minúsculas cantidades de los productos intermedios de decaimiento en las cadenas de decaimiento. Observe que esta forma de fechamiento múltiple proporciona fechas geológicas confiables.

14

Aplicaciones de la física nuclear

Contenido del capítulo

Este capítulo se ocupa de las reacciones nucleares en que chocan partículas y núcleos y cambian en otros núcleos y partículas. También se consideran las dos formas mediante las cuales es posible obtenerse energía a partir de las reacciones nucleares: *fisión*, donde un gran núcleo se separa (o fisiona) en dos núcleos más pequeños, y *fusión*, donde dos núcleos pequeños se unen para formar uno más grande. En cualquier caso, se produce la liberación de energía que puede usarse destructivamente como en las bombas o constructivamente para la producción de energía eléctrica. Por último, se analizan la interacción de la radiación con la materia y varios dispositivos para detectar radiación.

14.1 REACCIONES NUCLEARES

Es posible modificar la estructura de los núcleos al bombardearlos con partículas energéticas. Tales colisiones que cambian la identidad de los núcleos blanco se denominan **reacciones nucleares.** El primero en observarlas fue Rutherford en 1919, usando como partículas de bombardeo fuentes radiactivas que existen en la naturaleza. Desde entonces se han observado miles de reacciones nucleares, en especial después del desarrollo de los aceleradores de partículas cargadas en la década de 1930. Con la tecnología actual en los

aceleradores de partículas es posible proporcionar a las partículas energías de 1 000 GeV = 1 TeV o más. Estas partículas de alta energía se utilizan para crear nuevas partículas cuyas propiedades ayudan a resolver el misterio del núcleo.

Considere una reacción en que un núcleo X se bombardea con una partícula a, resultando un núcleo Y y una partícula b:

Reacción nuclear

$$a + X \longrightarrow Y + b \qquad (14.1)$$

Algunas veces esta reacción se escribe de una manera más breve como

$$X(a, b)Y$$

Por ejemplo, considere la reacción $^{7}Li(p, \alpha)^{4}He$, o bien,

$$^{1}_{1}H + ^{7}_{3}Li \longrightarrow ^{4}_{2}He + ^{4}_{2}He$$

Cockroft y Walton fueron los primeros en observar esta reacción en 1932, usando protones acelerados a 600 keV en un acelerador que diseñaron y construyeron. Una reacción nuclear como ésta, y de hecho cualquier reacción, sólo puede ocurrir si satisface ciertas *leyes de conservación*. Las leyes de conservación para las reacciones nucleares son:

- *Conservación del número de masa, A.* El número total de nucleones debe ser el mismo antes y después de la reacción. Para la reacción que está analizándose, $A_{antes} = 1 + 7 = A_{después} = 4 + 4$.
- *Conservación de la carga, q.* Aquí las partículas nucleares cargadas son protones y $q_{antes} = 1 + 3 = q_{después} = 2 + 2$.
- *Conservación de la energía, momento lineal y momento angular.* Estas cantidades se conservan debido a que una reacción nuclear sólo involucra fuerzas internas entre un núcleo blanco y un núcleo proyectil, y no hay fuerzas externas que alteren estos principios de conservación.

A continuación se aplicará la conservación de la energía a una reacción de la forma de la ecuación 14.1 para calcular la energía cinética total liberada (o absorbida) en la reacción, que se denomina **energía de reacción,** Q. Suponga que el núcleo blanco X originalmente está en reposo, que la partícula proyectil a tiene una energía cinética K_a, y que los productos de la reacción b y Y tienen energías cinéticas K_b y K_Y. Conservando la energía,

$$M_X c^2 + K_a + M_a c^2 = M_Y c^2 + K_Y + M_b c^2 + K_b$$

Debido a que la energía cinética total liberada en la reacción, Q, es igual a la diferencia entre la energía cinética de las partículas finales y la de la partícula inicial, se encuentra

Una reacción de Q

$$Q = (K_Y + K_b) - K_a = (M_X + M_a - M_Y - M_b)c^2 \qquad (14.2)$$

Una reacción para la cual Q es positiva transforma la masa nuclear en energía cinética de los productos Y y b y se denomina **reacción exotérmica.** Para que ocurra una reacción en la cual Q es negativa, de entrada se requiere una energía cinética mínima de la partícula proyectil. Una reacción así se denomina **endotérmica.**

Para que se presente una reacción endotérmica, la partícula incidente debe poseer una energía cinética mínima denominada **energía crítica,** K_{cr}. Debido a que K_{cr} debe no sólo suministrar $|Q|$, la masa-energía en exceso de los productos, sino también algo de energía cinética a los productos a fin de conservar la cantidad de movimiento, K_{cr} es mayor que $|Q|$.

Tabla 14.1 Valores Q de reacciones nucleares que implican núcleos ligeros

Reacción[a]	Valor Q medido (MeV)
$^{2}H(n, \gamma)^{3}H$	6.257 ± 0.004
$^{2}H(d, p)^{3}H$	4.032 ± 0.004
$^{6}Li(p, \alpha)^{3}H$	4.016 ± 0.005
$^{6}Li(d, p)^{7}Li$	5.020 ± 0.006
$^{7}Li(p, n)^{7}Be$	-1.645 ± 0.001
$^{7}Li(p, \alpha)^{4}He$	17.337 ± 0.007
$^{9}Be(n, \gamma)^{10}Be$	6.810 ± 0.006
$^{9}Be(\gamma, n)^{8}Be$	-1.666 ± 0.002
$^{9}Be(d, p)^{10}Be$	4.585 ± 0.005
$^{9}Be(p, \alpha)^{6}Li$	2.132 ± 0.006
$^{10}B(n, \alpha)^{7}Li$	2.793 ± 0.003
$^{10}B(p, \alpha)^{7}Be$	1.148 ± 0.003
$^{12}C(n, \gamma)^{13}C$	4.948 ± 0.004
$^{13}C(p, n)^{13}N$	-3.003 ± 0.002
$^{14}N(n, p)^{14}C$	0.627 ± 0.001
$^{14}N(n, \gamma)^{15}N$	10.833 ± 0.007
$^{18}O(p, n)^{18}F$	-2.453 ± 0.002
$^{19}F(p, \alpha)^{16}O$	-8.124 ± 0.007

[a]Los símbolos n, p, d, α y γ denotan al neutrón, protón, deuterón, partícula alfa y fotón, respectivamente. De C. W. Li, W. Whaling, W. A. Fowler y C. C. Lauritsen, *Phys. Rev.*, 85:512, 1951.

Para reacciones de baja energía, donde las energías cinéticas de todas las partículas interactuantes son pequeñas en comparación con sus energías en reposo, es posible aplicar las expresiones no relativistas $K = \frac{1}{2}mv^2$ y $p = mv$ para encontrar la energía crítica. Se deja como problema (problema 9) demostrar que cuando en una reacción con Q negativa de baja energía se conservan la cantidad de movimiento y la energía, la energía crítica es

$$K_{cr} = -Q\left(1 + \frac{M_a}{M_X}\right) \tag{14.3}$$

Por último, en la tabla 14.1 se ha incluido una lista selecta de valores Q medidos para reacciones que implican núcleos ligeros.

EJEMPLO 14.1

a) Calcule el valor Q para la reacción observada por Cockcroft y Walton.

Solución a) La reacción es

$$^{1}_{1}H + ^{7}_{3}Li \longrightarrow ^{4}_{2}He + ^{4}_{2}He$$

Usando $Q = (M_{Li} + M_H - 2M_{He})c^2$ y sustituyendo los valores de masa atómica del apéndice B, se encuentra

$$Q = (7.016\,003\text{ u} + 1.007\,825\text{ u} - 2(4.002\,603\text{ u}))(931.50\text{ MeV/u}) = 17.3\text{ MeV}$$

b) Encuentre la energía cinética de los productos si las partículas incidentes son protones a 600 keV.

Solución b) Como $Q = K_{\text{productos}} - K_{\text{partícula incidente}}$,

$$K_{\text{productos}} = Q + K_{\text{partícula incidente}} = 17.3\text{ MeV} + 0.6\text{ MeV} = 17.9\text{ MeV}$$

Lo anterior significa que las dos partículas alfa comparten 17.9 MeV de energía cinética.

Suponga que N_0 partículas inciden sobre una lámina de grosor dx, y que dN es el número de partículas que interactúan con los núcleos blanco (figura 14.2). La razón del número de partículas interactuantes al número de partículas incidentes, dN/N, es igual a la razón de la sección transversal total del blanco, $nA\sigma\, dx$, al área total de la lámina, A. Es decir,

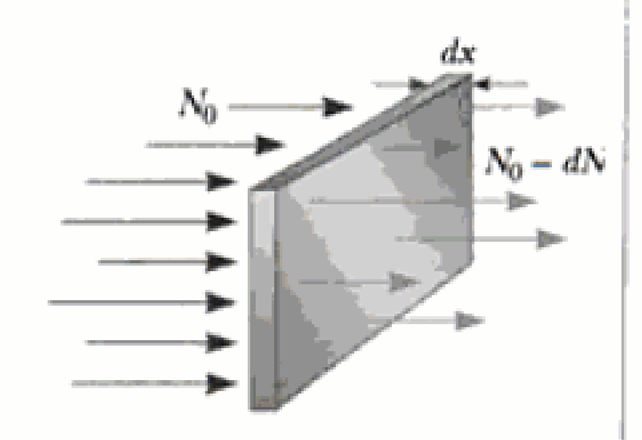


Figura 14.2 Si N_0 es el número de partículas que inciden sobre un blanco de grosor dr en algún intervalo de tiempo, el número que sale del blanco es $N_0 - dN$.

$$-\frac{dN}{N} = \frac{nA\sigma\, dx}{A} = n\sigma\, dx$$

donde el signo menos indica que las partículas están siendo removidas del haz. Al integrar esta expresión y tomar $N = N_0$ en $x = 0$,

$$\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = -n\sigma \int_0^x dx$$

$$\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -n\sigma x$$

$$N = N_0 e^{-n\sigma x} \qquad (14.5)$$

Número de partículas transmitidas a través de un objetivo de grosor x

Es decir, si N_0 es el número de partículas incidentes, el número que sale de la lámina, N, decrece exponencialmente con el grosor del blanco.

Las secciones transversales nucleares, cuyas dimensiones son de área, por lo común son del orden del cuadrado del radio nuclear, es decir aproximadamente 10^{-28} m^2. Por esta razón, es típico utilizar la unidad de 10^{-28} m^2 para medir las secciones transversales nucleares. Esta pequeña unidad se denomina, de manera bastante extraña, **barn** (b)[1] y se define como

El barn

$$1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2 \qquad (14.6)$$

En realidad, el concepto de sección transversal en física nuclear y atómica tiene poco que ver con la verdadera área geométrica de núcleos blanco. El modelo utilizado simplemente conviene para describir la probabilidad de que ocurra cualquier reacción. De hecho, las secciones transversales varían con la reacción específica considerada y con la energía cinética de la partícula incidente mucho más que varias veces el área geométrica del núcleo blanco. Por ejemplo, la sección transversal para que un antineutrino interactúe con un protón a través de la débil interacción nuclear es de sólo alrededor de 10^{-19} b en la reacción

$$\bar{\nu} + \text{p} \longrightarrow \text{e}^+ + \text{n} \qquad (\sigma = 10^{-19}\text{ b})$$

Las secciones transversales para dispersión inelástica de neutrones con yodo y xenón a través de la intensa interacción nuclear, sin embargo, miden alrededor de 4 barns en las siguientes reacciones:

$$\text{n} + {}^{127}\text{I} \longrightarrow {}^{127}\text{I}^* + \text{n} \qquad (\sigma = 4\text{ b})$$

$$\text{n} + {}^{129}\text{Xe} \longrightarrow {}^{129}\text{Xe}^* + \text{n} \qquad (\sigma = 4\text{ b})$$

(Una reacción de dispersión inelástica es aquella en la cual la partícula incidente pierde energía al chocar con el núcleo blanco, saliendo de la reacción con menos energía cinética pero dejando al blanco en un estado excitado, aquí denotado por el asterisco.)

[1] El "barn" ("granero" en inglés) fue introducido por los físicos estadounidenses M. G. Holloway y C. P. Baker en 1942 en un giro humorístico. Sirvió como una palabra en código en el contexto del trabajo bélico sobre las probabilidades de reacción y fue idóneo porque una sección transversal de 10^{-28} m^2 en realidad es "tan grande como el lado ancho de un granero" para procesos nucleares.

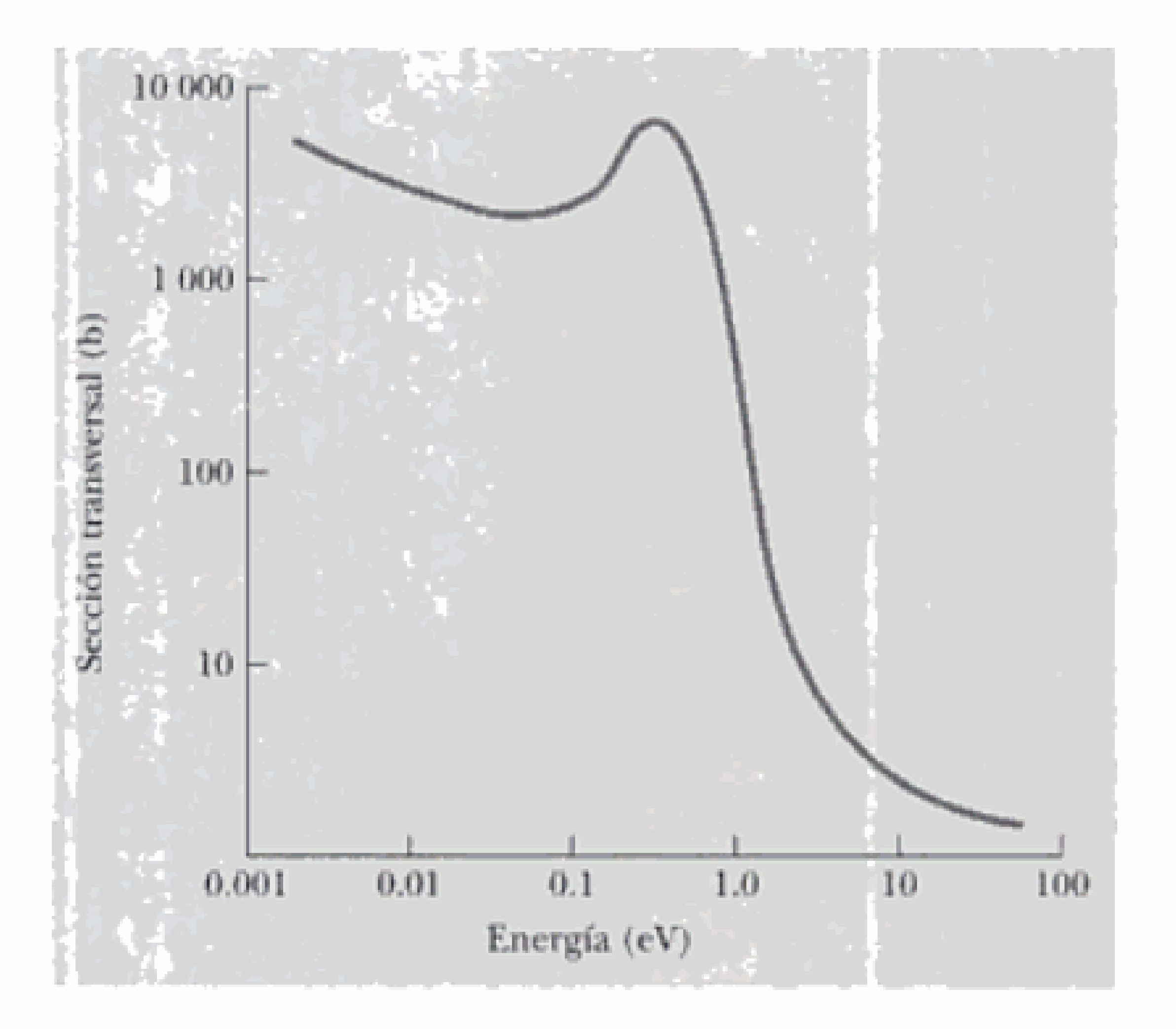


Figura 14.3 Sección transversal de la captura de neutrones para el cadmio. (*Reproducida con permiso de Goldsmith, et al.*, Rev. Mod. Phys., *19:261, 1947. Copyright © 1947 de la American Physical Society.*)

Por último, un ejemplo de reacción nuclear con una gran sección transversal (10^4), así como con una sección transversal bastante dependiente de la energía, lo constituye la reacción de captura de neutrones

$$n + {}^{113}\text{Cd} \longrightarrow {}^{114}\text{Cd} + \gamma \qquad (\sigma = 10^4 \text{ b})$$

En esta reacción, que tiene una alta probabilidad de ocurrir sólo para neutrones de baja energía, el blanco de cadmio incorpora un neutrón extra en su núcleo, pasa a un estado excitado, y emite su exceso de energía por decaimiento gamma. En la figura 14.3 se muestra la intensa dependencia de la sección transversal con respecto a la energía del neutrón incidente en este caso.

14.3 INTERACCIONES QUE INVOLUCRAN NEUTRONES

A fin de comprender el proceso de fisión nuclear y el funcionamiento físico del reactor nuclear, primero es necesario entender la forma en que los neutrones interactúan con los núcleos. Como ya se mencionó, debido a la neutralidad de su carga, los neutrones no están sujetos a las fuerzas de Coulomb. Debido a que los neutrones interactúan muy débilmente con los electrones, para los neutrones la materia parece bastante transparente. En general, se encuentra que las secciones transversales típicas para reacciones inducidas por neutrones aumentan cuando se incrementa la energía del neutrón. Los neutrones libres experimentan decaimiento beta con una vida media aproximada de 10 min. Por otra parte, los neutrones en la materia suelen ser absorbidos por los núcleos antes de decaer.

Cuando un neutrón rápido (uno cuya energía es mayor que aproximadamente 1 MeV) se desplaza a través de la materia, experimenta eventos de dispersión con los núcleos. En cada uno de estos eventos, el neutrón cede algo de su energía cinética a un núcleo. El neutrón continúa experimentando colisiones hasta que su energía es del orden de la energía térmica $k_B T$, donde k_B es la constante de Boltzmann y T es la temperatura absoluta. Un neutrón con esta energía se denomina **neutrón térmico.** A esta baja energía, hay una alta probabilidad de que el neutrón sea capturado por un núcleo, como puede verse para el caso del Cd, que se muestra en la figura 14.3. Este proceso de **captura de neutrones** puede escribirse como

14.4 FISIÓN NUCLEAR

La **fisión nuclear** ocurre cuando un núcleo muy pesado como ^{235}U se separa, o fisiona, en dos partículas de masa comparables. En tal reacción, **la masa total de las partículas producto es menor que la masa original.** La fisión comienza con la captura de un neutrón térmico por un núcleo pesado e implica la liberación de aproximadamente 200 MeV por fisión. Esta liberación de energía se debe a que los núcleos más pequeños, producto de la fisión, están más ligados, por aproximadamente 1 MeV por nucleón, que el núcleo pesado original.

El proceso de fisión nuclear fue observado por primera vez por Otto Hahn (1879-1968, químico alemán), Lise Meitner (1878-1968, física austriaca) y Fritz Strassmann (1902-1980, químico alemán), al seguir algunos estudios básicos de Fermi relacionados con la interacción de neutrones térmicos y el uranio. Después de bombardear uranio ($Z = 92$) con neutrones, Hahn y Strassmann realizaron un análisis químico y descubrieron entre los productos dos elementos de masa mediana, bario y lantano. Poco después, Lise Meitner y su sobrino Otto Frisch (1904-1979, físico germano-británico) explicaron lo que había ocurrido y acuñaron el término *fisión*. El núcleo de uranio pudo separarse en fragmentos casi iguales después de absorber un neutrón. Las mediciones demostraron que en cada evento de fisión se liberaron alrededor de 200 MeV de energía.

La fisión de ^{235}U por neutrones térmicos puede representarse por

Fisión del ^{235}U

$$^{1}_{0}n + ^{235}_{92}U \longrightarrow ^{236}_{92}U^* \longrightarrow X + Y + \text{neutrones} \qquad (14.8)$$

donde $^{236}U^*$ es un estado excitado intermedio que sólo dura aproximadamente 10^{-12} s antes de separarse en X y Y. Los núcleos resultantes X y Y se denominan **fragmentos de fisión.** Hay muchas combinaciones de X y Y que satisfacen los requerimientos de conservación de masa-energía, carga y número de nucleones. En la figura 14.4 se muestra la distribución de masa de los fragmentos en







a) Lise Meitner

b) Otto Frisch

Estando de vacaciones en los Alpes, Meitner y su sobrino se dieron cuenta de que el gran núcleo del uranio se había separado en núcleos más pequeños con la liberación de enormes cantidades de energía. (*Foto de Emilio Segrè, cortesía de AIP Emilio Segrè Visual Archives, Segrè Collection.*)

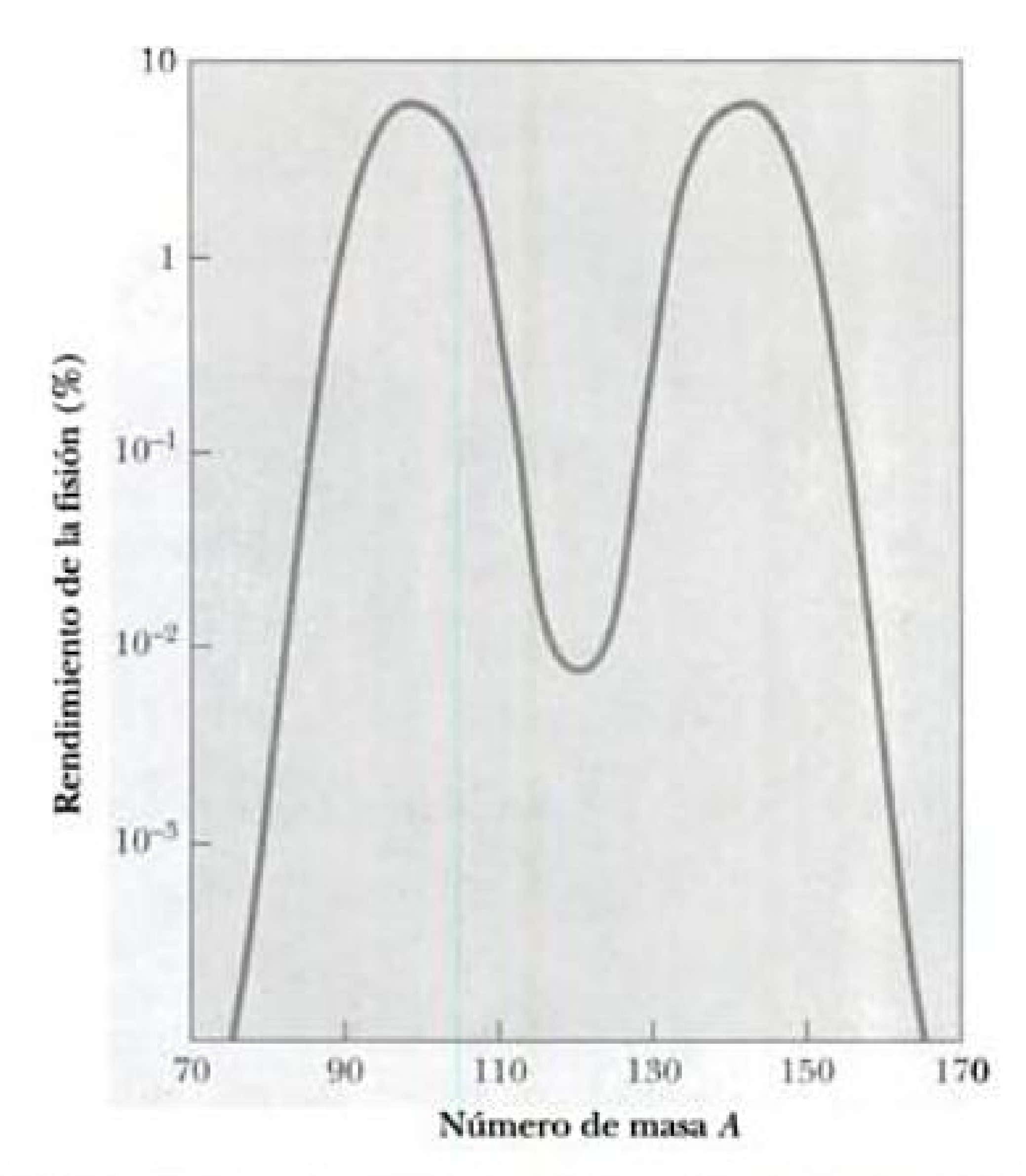


Figura 14.4 Distribución de los productos de fisión contra el número de masa para la fisión de ^{235}U bombardeado con neutrones lentos. Observe que la escala de la ordenada es logarítmica.

la fisión de ^{235}U. El proceso resulta en la producción de varios neutrones, típicamente dos o tres. En promedio, por evento se liberan alrededor de 2.5 neutrones. Una reacción típica de este tipo es

$$ {}^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}U \longrightarrow {}^{141}_{56}Ba + {}^{92}_{36}Kr + 3{}^{1}_{0}n \qquad (14.9) $$

De los aproximadamente 200 MeV liberados en esta reacción, la mayor parte se va en energía cinética de los fragmentos pesados bario y kriptón.

La ruptura de los núcleos de uranio puede compararse a lo que ocurre con una gota de agua cuando se le agrega energía en exceso. Todos los átomos en la gota poseen energía, pero no la suficiente para separar la gota. No obstante, si se agrega suficiente energía para poner a vibrar la gota, ésta experimenta elongación y compresión hasta que la amplitud de vibración se vuelve lo suficientemente grande para hacer que la gota se rompa. En el núcleo de uranio ocurre un proceso semejante. En la figura 14.5 se muestran varias etapas del núcleo como resultado de la captura de un neutrón. La secuencia de eventos para el ^{235}U puede describirse como sigue:

1. El núcleo ^{235}U captura un neutrón térmico (de movimiento lento).
2. Esta captura resulta en la formación de $^{236}U^*$, y la energía en exceso de este núcleo provoca que experimente violentas oscilaciones.
3. El núcleo de $^{236}U^*$ se distorsiona bastante, y la fuerza de repulsión entre protones en las dos mitades de la forma de mancuerna tiende a incrementar la distorsión.
4. El núcleo se separa en dos fragmentos, emitiendo varios neutrones en el proceso.

Como puede verse en la figura 14.4, los eventos de fisión más probables corresponden a fragmentos con números de masa $A \approx 140$ y $A \approx 95$. Estos fragmentos, que comparten los protones y neutrones del núcleo padre caen am-

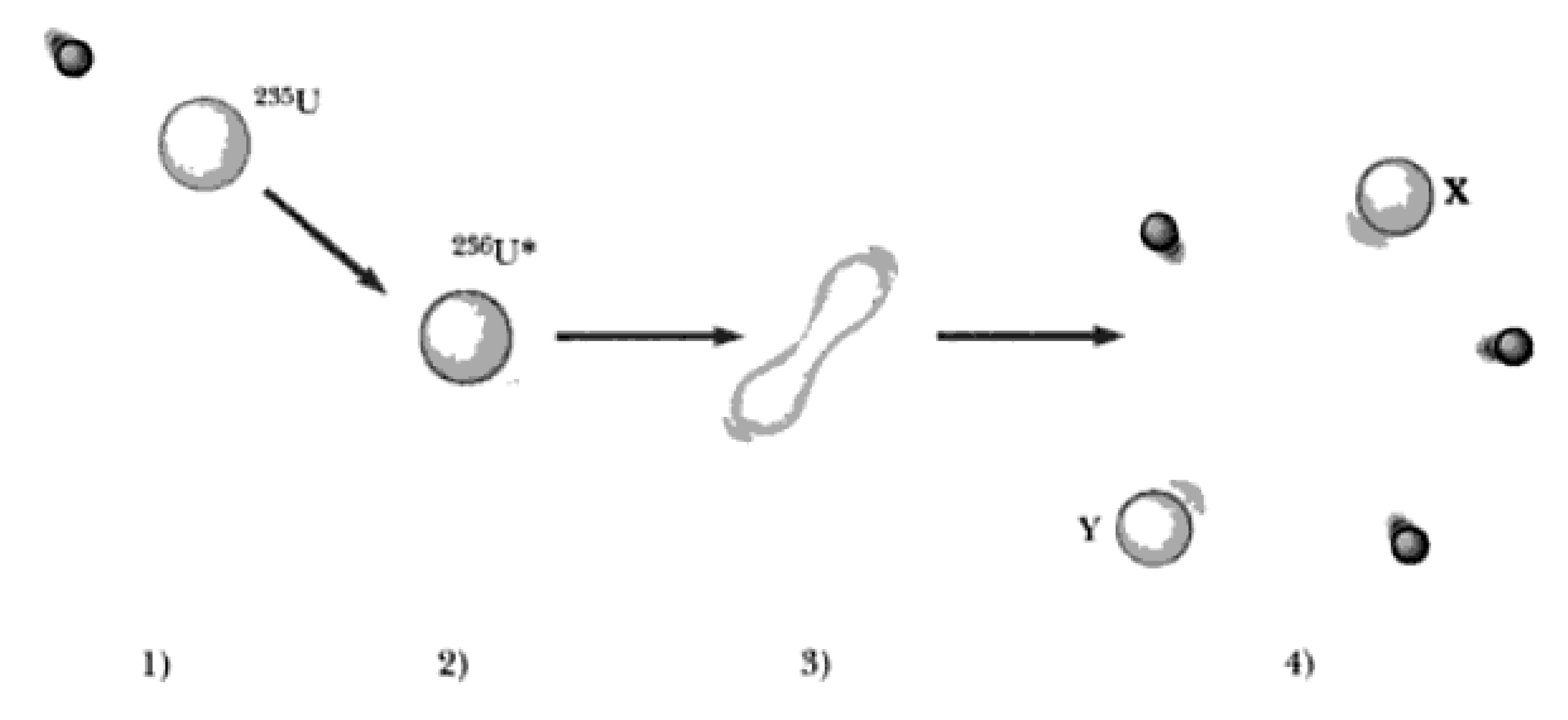


Figura 14.5 Etapas en un evento de fisión nuclear según es descrito por el modelo de la gota líquida del núcleo.

bos en el lado rico en neutrones de la línea de estabilidad en la figura 13.4 (capítulo 13). Como los fragmentos que tienen un gran número de neutrones son inestables, los fragmentos ricos en neutrones liberan casi de forma instantánea dos o tres neutrones. Los fragmentos restantes siguen siendo ricos en neutrones y proceden a decaer a núcleos más estables a través de una sucesión de decaimientos beta. En el proceso de tales decaimientos, los núcleos en estados excitados también emiten rayos gamma.

A continuación se estimará la energía de desintegración Q, liberada en un proceso típico de fisión. De la figura 13.10 se observa que la energía de enlace por nucleón para núcleos pesados ($A \approx 240$) es aproximadamente igual a 7.6 MeV, mientras en el intervalo de masa intermedia, la energía de enlace por nucleón es aproximadamente igual a 8.5 MeV. Si el número de masa del núcleo padre se toma como $A = 240$, se observa que la energía liberada por nucleón se estima como

$$Q = (240 \text{ nucleones})\left(8.5\,\frac{\text{MeV}}{\text{nucleón}} - 7.6\,\frac{\text{MeV}}{\text{nucleón}}\right) = 200 \text{ MeV}$$

Alrededor del 85% de esta energía aparece en forma de energía cinética en los fragmentos pesados. Esta energía es muy grande en comparación con la energía liberada en procesos químicos. Por ejemplo, la energía liberada en la combustión de una molécula de octano usada en gasolina ¡es alrededor de una millonésima parte de la energía liberada en un simple evento de fisión de uranio!

EJEMPLO 14.3 Fisión del uranio

Además de las reacciones bario-lantano observadas por Meitner y Frisch y la reacción de bario-kriptón de la ecuación 14.9, otras dos formas en que el ^{235}U puede fisionarse al ser bombardeado con un neutrón son 1) al formar ^{140}Xe y ^{94}Sr y 2) al formar ^{132}Sn y ^{101}Mo. En cada caso también se liberan neutrones. Encuentre el número de neutrones liberado en cada evento.

Solución Al balancear los números de masa y los números atómicos, se encuentra que estas reacciones pueden escribirse como

$$^{1}_{0}n + ^{235}_{92}U \longrightarrow ^{140}_{54}Xe + ^{94}_{38}Sr + 2(^{1}_{0}n)$$
$$^{1}_{0}n + ^{235}_{92}U \longrightarrow ^{132}_{50}Sn + ^{101}_{42}Mo + 3(^{1}_{0}n)$$

Así, en la primera reacción se liberan dos neutrones y en la segunda, tres.

EJEMPLO 14.4 Energía liberada en la fisión de ^{235}U

Calcule la energía total liberada si 1 kg de ^{235}U experimenta fisión, tomando la energía de desintegración por evento como Q = 208 MeV (un valor más preciso que la estimación proporcionada antes).

Solución Es necesario conocer el número de núcleos que hay en un kilogramo de uranio. Como $A = 235$, el número de núcleos es

$$N = \frac{6.02 \times 10^{23} \text{ núcleos/mol}}{235 \text{ g/mol}} (1 \times 10^3 \text{ g})$$
$$= 2.56 \times 10^{24} \text{ núcleos}$$

Por tanto, la energía de desintegración es

$$E = NQ = (2.56 \times 10^{24} \text{ núcleos})\left(208 \frac{\text{MeV}}{\text{núcleos}}\right)$$
$$= 5.32 \times 10^{26} \text{ MeV}$$

Debido a que 1 MeV es equivalente a 4.14×10^{-20} kWh, se encuentra que $E = 2.37 \times 10^7$ kWh. Si esta cantidad de energía se liberase repentinamente, ¡equivaldría a detonar 20 000 toneladas de TNT!

EJEMPLO 14.5 Mecanismo aproximado del proceso de fisión

Considere la reacción de fisión $^{235}_{92}\text{U} + \text{n} \rightarrow {}^{141}_{56}\text{Ba} + {}^{92}_{36}\text{Kr} + 2{}^{1}_{0}\text{n}$. Demuestre que el modelo del proceso de fisión en el cual un núcleo excitado de $^{235}_{92}$U se alarga lo suficiente para superar las fuerzas de atracción nucleares y se separa en dos fragmentos cargados, puede usarse para calcular la energía liberada en este proceso de fisión. En este modelo se supone que el neutrón incidente proporciona unos cuantos MeV de energía de excitación para separar los núcleos de Ba y Kr dentro del núcleo de uranio, de modo que los dos fragmentos $^{141}_{56}$Ba y $^{92}_{36}$Kr se separan por repulsión de Coulomb. También se ignora la pequeña cantidad de energía cinética (varios MeV) que se llevan los neutrones producidos en la reacción.

Solución Primero se calcula la separación, r, de los núcleos de Ba y Kr a la que la fuerza entre ambos se anula. Esto es $r \cong r_{\text{Ba}} + r_{\text{Kr}}$, donde r_{Ba} y r_{Kr} son los radios nucleares dados por la ecuación 13.1. Así,

$$r_{\text{Ba}} = (1.2 \times 10^{-15} \text{ m})(141)^{1/3} = 6.2 \times 10^{-15} \text{ m}$$
$$r_{\text{Kr}} = (1.2 \times 10^{-15} \text{ m})(92)^{1/3} = 5.4 \times 10^{-15} \text{ m}$$
$$r \cong 12 \times 10^{-15} \text{ m}$$

A continuación se calcula la energía potencial de Coulomb para dos cargas de $Z_1 = 56$ y $Z_2 = 36$ separadas por una distancia de 12 fm. La energía potencial de los dos núcleos al borde de la separación es

$$U = \frac{k(Z_1 e)(Z_2 e)}{r} = \frac{(1.440 \text{ eV}\cdot\text{nm})(56)(36)}{12 \times 10^{-15} \text{ m}}$$
$$= 240 \text{ MeV}$$

Cuando los dos fragmentos se separan, esta energía potencial se convierte en una cantidad de energía cinética consistente con la energía total liberada de aproximadamente 200 MeV. Esto muestra que el simple mecanismo de fisión aquí sugerido es plausible.

14.5 REACTORES NUCLEARES

En la última sección se vio que cuando se fisiona el ^{234}U, se emite un promedio de 2.5 neutrones por evento. A su vez, estos neutrones pueden activar la fisión de otros núcleos, con la posibilidad de generar una reacción en cadena (figura 14.6). Cálculos muestran que si la reacción en cadena no se controla (es decir, si no procede lentamente), puede resultar en una explosión violenta, con la liberación de una enorme cantidad de energía. Por ejemplo, si se liberase la energía de 1 kg de ^{235}U, ¡equivaldría a detonar alrededor de 20 000 toneladas de TNT! Este, por supuesto, es el principio detrás de la primera bomba nuclear, una reacción de fisión no controlada.

Un reactor nuclear es un sistema diseñado para mantener lo que se denomina **reacción en cadena autosostenida.** Este importante proceso fue logrado por primera vez en 1942 por Fermi en la Universidad de Chicago, con uranio natural como combustible (figura 14.7). La mayor parte de los reactores actualmente en operación también utilizan uranio como combustible. El uranio natural contiene sólo alrededor de 0.7% del isótopo ^{235}U, donde el 99.3% restante es ^{238}U. Este hecho es importante para la operación de un reactor, ya que el ^{238}U casi nunca se fisiona. En vez de ello, tiende a absorber neutrones, produciendo neptunio y plutonio. Por esta razón, los combustibles para reac-

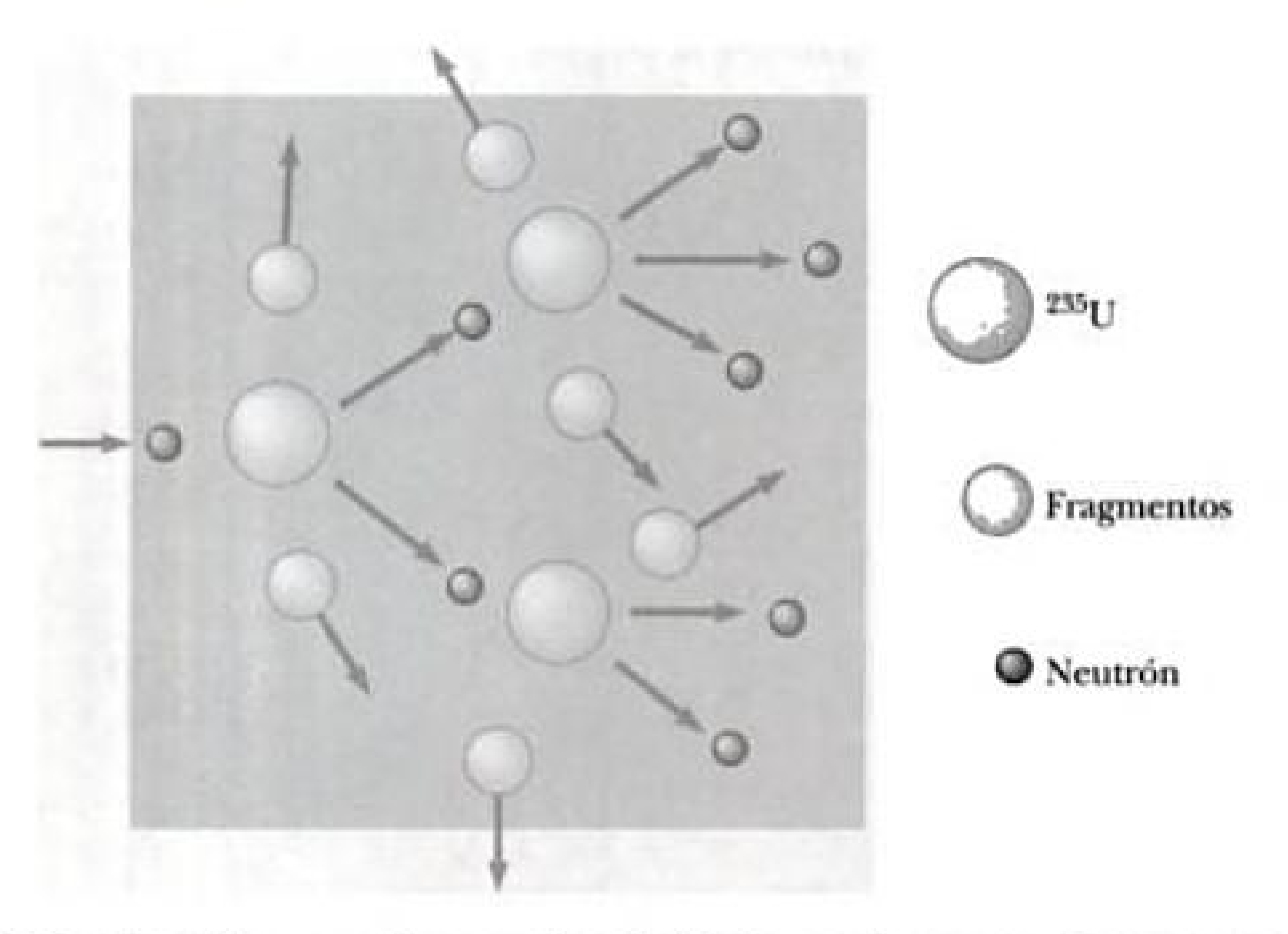


Figura 14.6 Reacción en cadena nuclear iniciada por la captura de un neutrón. (Se producen muchos pares de isótopos diferentes.)

tores deben enriquecerse artificialmente a fin de que contengan por lo menos un pequeño porcentaje de ^{235}U.

Reacción en cadena

Para lograr una reacción en cadena autosostenida, en promedio uno de los neutrones emitidos en la fisión de ^{235}U debe ser capturado por otro núcleo de ^{235}U y hacer que experimente fisión. Un parámetro de utilidad para describir el nivel de operación del reactor es la **constante de reproducción** K, definida como el número medio de neutrones de cada evento de fisión que realmente provocan otro evento de fisión. Como se ha visto, K puede tener un valor má-

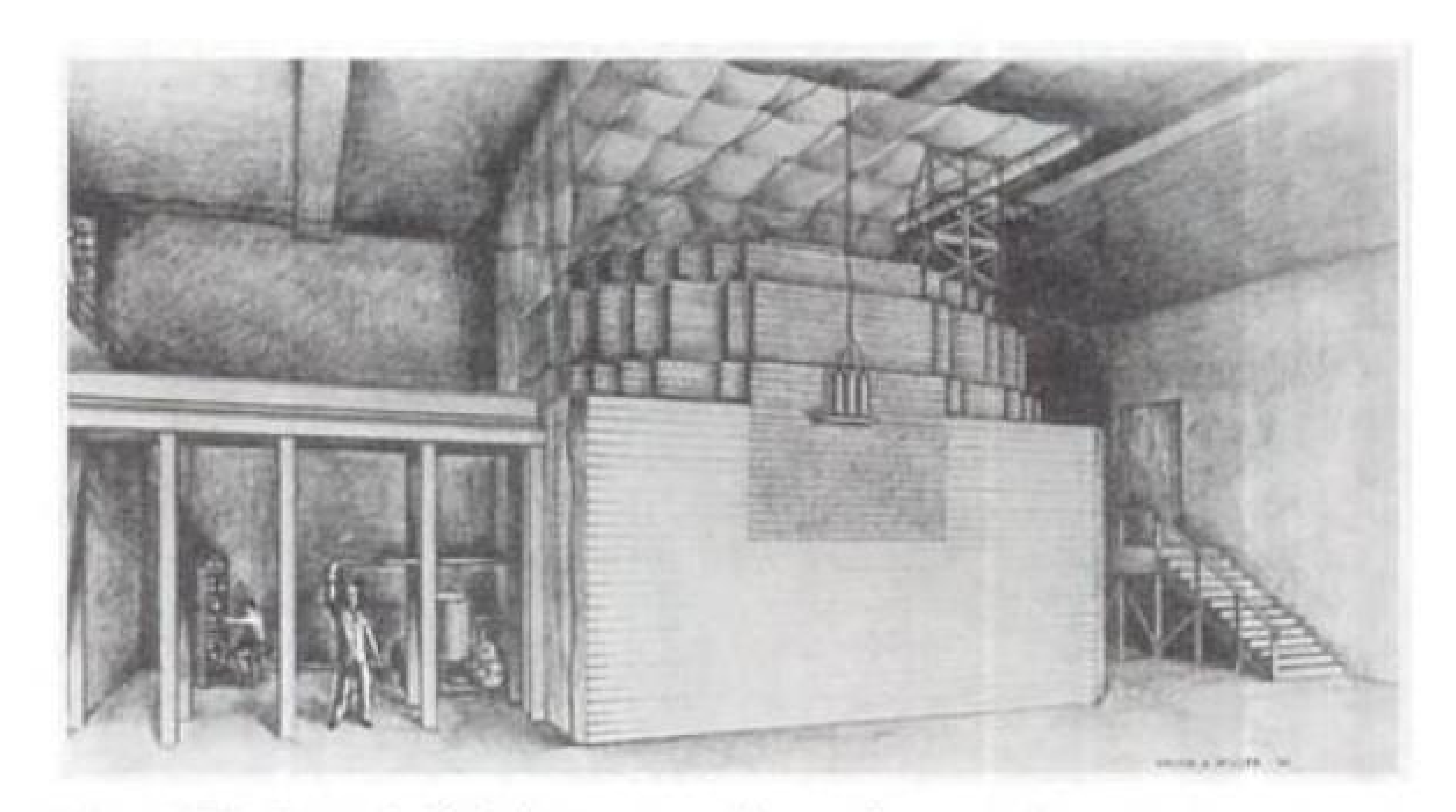


Figura 14.7 Bosquejo del primer reactor del mundo, que estaba compuesto por capas de grafito salpicadas de uranio. (Debido a la confidencialidad en tiempos de guerra, no hay fotos del reactor terminado.) La primera reacción en cadena autosostenida se logró el 2 de diciembre de 1942. Inmediatamente se informó por teléfono a Washington, D.C., sobre el éxito de la empresa, en esta forma de mensaje codificado: "El navegante italiano llegó al nuevo mundo y encontró muy amigables a los nativos". El evento histórico se llevó a cabo en un laboratorio improvisado en la cancha de tenis bajo los vestidores del Campo Stagg de la Universidad de Chicago, y el navegante italiano que dirigía el trabajo era Fermi.

ximo de 2.5 en la fisión del uranio. Sin embargo, en la práctica, K es menor que eso debido a varios factores que serán analizados.

Constante de reproducción

Una reacción en cadena autosostenida se logra cuando $K = 1$. En esta condición se dice que el reactor es **crítico.** Cuando $K < 1$, el reactor es subcrítico y la reacción se extingue. Cuando K es sustancialmente mayor que la unidad, se dice que el reactor es supercrítico y ocurre una reacción **fuera de control.** En un reactor operado por una compañía de servicio público para suministrar energía eléctrica, es necesario mantener un valor de K ligeramente mayor que la unidad.

En la figura 14.8 se muestran los componentes básicos del núcleo de un reactor nuclear. Los elementos combustibles consisten en uranio enriquecido. A continuación se describirá la función de las partes restantes del reactor y algunos aspectos de su diseño.

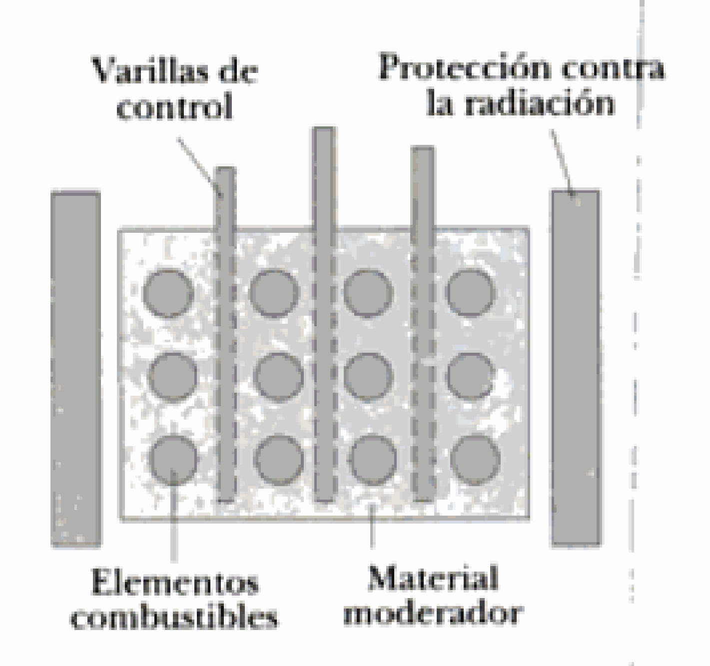


Figura 14.8 Sección transversal del núcleo de un reactor que muestra las varillas de control, los elementos de combustible y el material moderador rodeado por una protección contra la radiación.

Fuga de neutrones

En cualquier reactor, una fracción de neutrones producidos por fisión se fugan del núcleo antes de inducir otros eventos de fisión. Si la fracción que se fuga es demasiado grande, el reactor no opera. El porcentaje de pérdida es grande si el reactor es muy pequeño debido a que la fuga es una función de la razón del área superficial al volumen. En consecuencia, una característica crítica del diseño de un reactor es elegir la razón área superficial-volumen correcta de modo que sea posible obtener una reacción sostenida.

Regulación de las energías de los neutrones

Recuerde que los neutrones liberados en eventos de fisión son muy energéticos, y que sus energías cinéticas son aproximadamente iguales a 2 MeV. Es necesario aminorar la velocidad de estos neutrones a energías térmicas para permitir que sean capturados y produzcan la fisión de otros núcleos de ^{235}U, porque la probabilidad de fisión inducida por neutrones aumenta con la disminución de energía, como se muestra en la figura 14.9. Se disminuye la velocidad de los neutrones energéticos utilizando una sustancia moderadora que rodea al combustible, como se muestra en la figura 14.8.

Captura de neutrones

En el proceso de disminución de su velocidad, los neutrones pueden ser capturados por núcleos que no se fisionan. El evento más común de este tipo es la captura de neutrones por ^{238}U, que constituye alrededor del 98% del uranio en los elementos combustibles. La probabilidad de captura de un neutrón por ^{238}U es muy alta cuando los neutrones poseen energías cinéticas altas y muy baja cuando las energías cinéticas de los neutrones son bajas. Así, la disminución de la velocidad de los neutrones por los moderadores sirve al objetivo secundario de hacer que estén disponibles para la reacción con ^{235}U y disminuir sus posibilidades de ser capturados por ^{238}U.

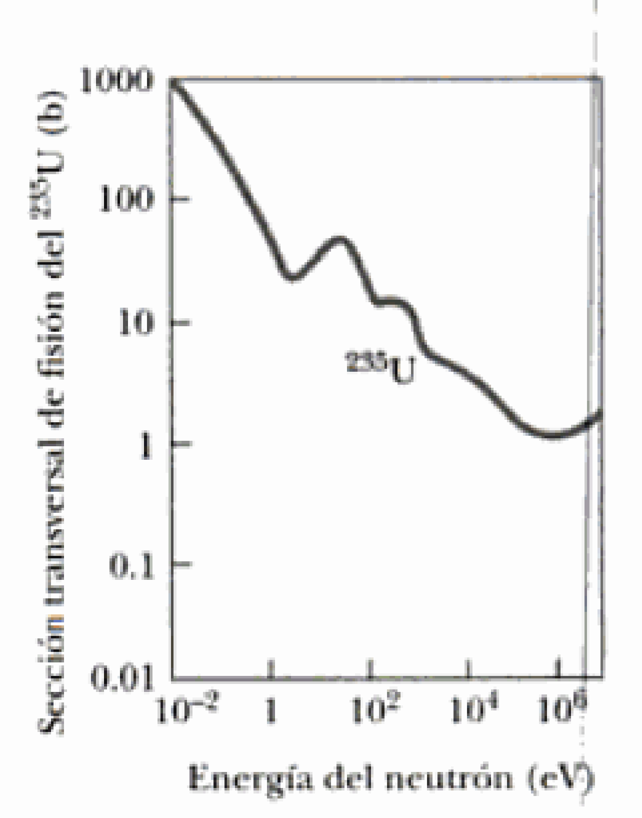


Figura 14.9 Sección transversal para fisión inducida de ^{235}U por un neutrón. La sección transversal media para neutrones a temperatura ambiente es alrededor de 500 b.

Control del nivel de potencia

Es posible que un reactor alcance la etapa crítica ($K = 1$) después que se minimizan todas las pérdidas de neutrones que acaban de describirse. Sin embargo, para mantener un valor de K próximo a la unidad se requiere un método de control. Si K subiera por arriba de este valor, el calor producido en la reacción de fuga fundiría el reactor. Para controlar el nivel de potencia, en el núcleo del reactor se insertan varillas de control (consulte la figura 14.8). Estas varillas están hechas de materiales como cadmio, que absorben a los neutrones de manera efi-

Institute sugieren que más de 2 500 fallecimientos pueden atribuirse al accidente de Chernobyl. En el periodo 1986-1997 aumentó 10 veces el número de infantes que contrajeron cáncer en la tiroides debido a la ingesta de yodo radiactivo en la leche proveniente de vacas que se alimentaron de pasto contaminado. Una de las conclusiones en una conferencia internacional que estudió el accidente en Ucrania fue que las causas más importantes del accidente de Chernobyl fue la coincidencia de varias deficiencias en el diseño del reactor y a la violación de los procedimientos de seguridad. La mayor parte de estas deficiencias ya se han abordado en plantas de diseño semejante en Rusia y países vecinos de la ex Unión Soviética.

Los reactores comerciales logran seguridad mediante un diseño cuidadoso, un protocolo de operación riguroso y un entrenamiento exhaustivo a los operadores para responder en casos de emergencia. Los reactores representan un peligro sólo cuando no se cumplen estos requisitos. La exposición a la radiación y los peligros potenciales a la salud asociados con tal exposición se controlan mediante tres capas de contención. El combustible y los productos radiactivos de la fisión están contenidos dentro del recipiente del reactor. Si este recipiente se rompe, la construcción del reactor reacciona como una segunda estructura de contención para evitar que el material radiactivo contamine el entorno. Por último, las instalaciones del reactor deben estar en un sitio alejado para proteger al público en general de que se expongan al escape de radiación por la construcción del reactor.

Una preocupación continua sobre los reactores de fisión nuclear es la disposición segura de material radiactivo cuando se sustituye el núcleo del reactor. Aun cuando el uranio y el plutonio estén separados y sean reciclados, el material residual remanente contiene isótopos altamente radiactivos de larga duración que deben almacenarse durante mucho tiempo para que no haya ninguna posibilidad de contaminación ambiental. Hoy día, parece que la mejor solución es sellar los desechos radiactivos en recipientes a prueba de agua y enterrarlos en profundas minas de sal.

El transporte del combustible del reactor y los desechos de éste plantean riesgos adicionales de seguridad. Accidentes durante el transporte de combustible podrían exponer al público a niveles de radiación dañinos. Para minimizar estos riesgos, el Departamento de Energía estadounidense requiere rigurosas pruebas en de todos los recipientes utilizados para transportar material nuclear. Los fabricantes de estos recipientes deben demostrar que sus productos no se romperán incluso en colisiones a alta velocidad.

A pesar de estos riesgos, hay ventajas en el uso de la energía nuclear que pueden contrastarse contra los riesgos. Por ejemplo, las plantas de energía nuclear no contaminan y no producen el efecto invernadero que generan las plantas de combustibles fósiles, y se pronostica que la oferta de uranio en la Tierra será más duradera que la de los combustibles fósiles. Para cada fuente de energía, sea nuclear, hidroeléctrica, de combustibles fósiles, eólica o solar, los riesgos deben ponderarse contra los beneficios y la disponibilidad regional de la fuente de energía. Así, el uso reflexivo de una variedad de fuentes de energía y un énfasis aún más fuerte sobre los métodos de conservación de la energía parecen componentes lógicos de una política energética sensible.

14.6 FUSIÓN NUCLEAR

En el capítulo 13 se encontró que la energía de enlace de núcleos ligeros (aquellos cuyo número de masa es menor que 20) es mucho menor que la energía de enlace de núcleos pesados. Esto sugiere un proceso inverso al de la fisión, denominado **fusión nuclear.** La fusión ocurre cuando dos núcleos ligeros se combinan para formar un núcleo más pesado. Debido a que la masa del núcleo final es menor que las masas en reposo combinadas de los núcleos originales,

ocurre una pérdida de masa, acompañada por una liberación de energía. A continuación se presentan algunos ejemplos de tales reacciones de fusión con liberación de energía que ocurren en el Sol:

$$
\begin{aligned}
{}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} &\longrightarrow {}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{0}_{1}\mathrm{e}^{+} + \nu \\
{}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} &\longrightarrow {}^{3}_{2}\mathrm{He} + \gamma
\end{aligned}
\qquad (14.10)
$$

La segunda reacción es seguida por alguna de las siguientes:

$$
\begin{aligned}
{}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{3}_{2}\mathrm{H} &\longrightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{0}_{1}\mathrm{e}^{+} + \nu \\
{}^{3}_{2}\mathrm{He} + {}^{3}_{2}\mathrm{He} &\longrightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{1}_{1}\mathrm{H}
\end{aligned}
$$

Éstas son las reacciones básicas en lo que se denomina **ciclo protón-protón,** el cual se considera uno de los ciclos básicos en los que se genera energía en el Sol y otras estrellas que poseen hidrógeno en abundancia. La mayor parte de la producción de energía se lleva a cabo en el interior del Sol, donde la temperatura es aproximadamente igual a 1.5×10^7 K. Como se verá más tarde, estas temperaturas tan elevadas son necesarias para activar las reacciones denominadas **reacciones de fusión termonuclear.** La bomba de hidrógeno (de fusión), que fue la primera en explotar en 1952, constituye un ejemplo de reacción de fusión termonuclear no controlada. Todas las reacciones en el ciclo protón-protón son exotérmicas; es decir, implican una liberación de energía. Una vista general del ciclo protón-protón muestra que cuatro protones se combinan para formar una partícula alfa y dos positrones, con la liberación de 25 MeV de energía.

Reacciones termonucleares

Reacciones de fusión

La enorme cantidad de energía liberada en las reacciones de fusión sugiere la posibilidad de utilizar esta energía para fines de provecho aquí en la Tierra. Actualmente se está dedicando bastante esfuerzo para desarrollar un reactor termonuclear sostenido y controlable: un reactor de potencia por fusión. A menudo, a la fusión controlada se le denomina la más poderosa fuente de energía debido a la disponibilidad de su fuente de combustible: agua. Por ejemplo, si se utilizara deuterio como combustible, 0.12 g de éste podrían extraerse de 1 gal de agua a un costo aproximado de 4 centavos (de dólar). Estas tarifas harían casi insignificantes los costos de combustible incluso de un reactor ineficiente. Una ventaja adicional de los reactores de fusión es que, comparativamente, se forman pocos subproductos radiactivos. Para el ciclo protón-protón antes descrito en esta sección, el producto final de la fusión de núcleos de hidrógeno es seguro, es helio no radiactivo. Desafortunadamente, aún no existe un reactor termonuclear capaz de proporcionar una salida neta de potencia en intervalos de tiempo razonables, aun cuando se ha investigado desde la década de 1950. Antes de construir un dispositivo exitoso es necesario resolver muchas dificultades.

Se ha visto que la energía del Sol se basa, en parte, en un conjunto de reacciones en las que el hidrógeno se transforma en helio. No obstante, la interacción protón-protón no es idónea para su uso en un reactor de fusión, ya que esta reacción requiere presiones y densidades muy elevadas. El proceso funciona en el Sol sólo debido a la extremadamente alta densidad de los protones en el interior del Sol.

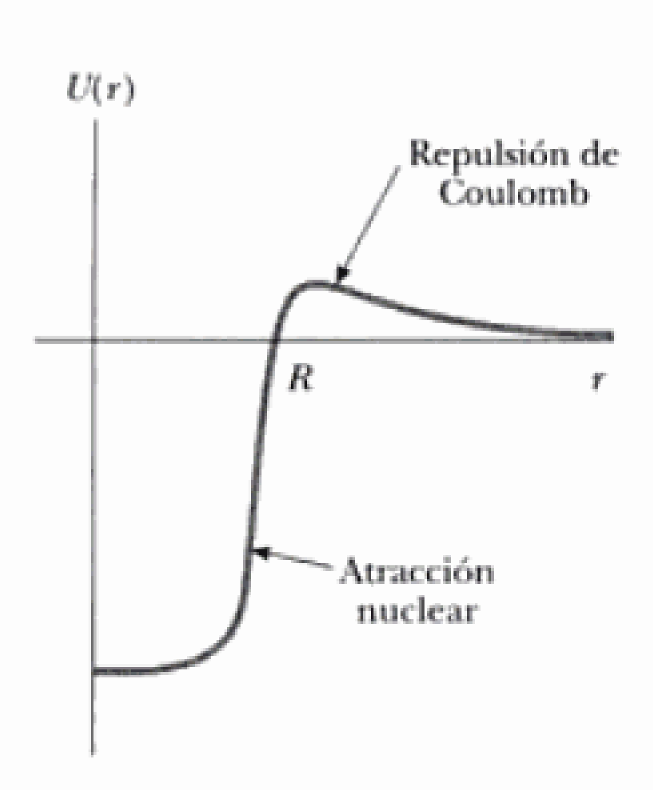


Figura 14.11 Energía potencial como una función de la separación entre los dos deuterones. La fuerza de repulsión de Coulomb domina a largo alcance, mientras que la fuerza de atracción nuclear domina a corto alcance, donde R es del orden de varios fermis.

Las reacciones de fusión que parecen más promisorias para un reactor terrestre de potencia por fusión implican deuterio (${}^{2}_{1}\mathrm{H}$) y tritio (${}^{3}_{1}\mathrm{H}$):

$$
\begin{aligned}
{}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} &\longrightarrow {}^{3}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \qquad Q = 3.27\ \mathrm{MeV} \\
{}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} &\longrightarrow {}^{3}_{1}\mathrm{H} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \qquad Q = 4.03\ \mathrm{MeV} \\
{}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{3}_{1}\mathrm{H} &\longrightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \qquad Q = 17.59\ \mathrm{MeV}
\end{aligned}
\qquad (14.11)
$$

Como ya se observó, el deuterio existe en cantidades casi ilimitadas en lagos y océanos y cuesta muy poco extraerlo. El tritio, sin embargo, es radiactivo ($T_{1/2}$ = 12.3 años) y a través de emisión beta decae en ^{3}He. Como resultado, el tritio no existe naturalmente en grandes cantidades y debe producirse en forma artificial.

Uno de los problemas más importantes en la obtención de energía de cualquier reacción de fusión consiste en superar la fuerza de repulsión de Coulomb entre dos núcleos cargados antes de que éstos pueden fusionarse. La energía potencial como una función de la separación de partículas de dos deuterones (cada uno con carga $+e$) se muestra en la figura 14.11. La energía potencial es positiva en la región $r > R$, donde domina la fuerza de repulsión de Coulomb, y negativa en la región $r < R$, donde domina la intensa fuerza nuclear. El problema fundamental, entonces, es proporcionar suficiente energía a los dos núcleos para superar esta barrera de potencial de repulsión. Esto puede lograrse calentando el combustible a temperaturas extremadamente elevadas (alrededor de 10^8 K, lo que es mucho más alto que la temperatura del Sol). A estas temperaturas tan intensas, los átomos se ionizan y el sistema consta de una colección de electrones y núcleos, comúnmente denominada **plasma.**

Para superar la gran barrera de Coulomb se requieren altas temperaturas

EJEMPLO 14.6 Fusión de dos deuterones

La separación entre dos deuterones debe ser alrededor de 1×10^{-14} m para que la fuerza de atracción nuclear supere la fuerza de repulsión de Coulomb. a) Calcule la altura de la barrera de potencial debida a la fuerza de repulsión.

Solución La energía potencial asociada con dos cargas separadas por una distancia r es

$$U = k\frac{q_1 q_2}{r}$$

donde k es la constante de Coulomb. Para el caso de dos deuterones, $q_1 = q_2 = +e$, de modo que

$$U = k\frac{e^2}{r} = \left(8.99 \times 10^9 \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\right)\frac{(1.60 \times 10^{-19}\text{ C})^2}{1 \times 10^{-14}\text{ m}}$$
$$= 2.3 \times 10^{-14}\text{ J} = 0.14\text{ MeV}$$

b) Estime la temperatura efectiva necesaria para que un deuterón supere la barrera de potencial, suponiendo una energía de $\frac{3}{2}k_BT$ por deuterón (donde k_B es la constante de Boltzmann).

Solución Debido a que la energía de Coulomb del par de deuterones es 0.14 MeV, la energía de Coulomb por deuterón es 0.07 MeV = 1.1×10^{-14} J. Al igualar esto con la energía térmica promedio por deuterón se obtiene

$$\tfrac{3}{2}k_BT = 1.1 \times 10^{-14}\text{ J}$$

donde k_B es igual a 1.38×10^{-23} J/K. Al despejar T se obtiene

$$T = \frac{2 \times (1.1 \times 10^{-14}\text{ J})}{3 \times (1.38 \times 10^{-23}\text{ J/K})} = 5.3 \times 10^8\text{ K}$$

El ejemplo 14.6 sugiere que los deuterones deben calentarse hasta aproximadamente 5×10^8 K para alcanzar la fusión. Esta estimación de la temperatura necesaria es demasiado alta, sin embargo, ya que las partículas en el plasma poseen una distribución de velocidades de Maxwell, algunas reacciones de fusión son ocasionadas por partículas en la "cola" de alta energía de esta distribución. Además, incluso las partículas sin suficiente energía para superar la barrera poseen alguna probabilidad de perforar un túnel a través de la barrera. Una vez que estos efectos se toman en cuenta, para fusionar los deuterones parece adecuada una temperatura de "sólo" 4×10^8 K.

La temperatura a que la velocidad de generación de potencia excede la velocidad de pérdida (debido a mecanismos como pérdidas por radiación) se denomina **temperatura de ignición crítica.** Esta temperatura para la reacción deuterio-deuterio (D–D) es igual a 4×10^8 K. Según la expresión $E \cong k_BT$, esta temperatura es equivalente a aproximadamente 35 keV. Resulta que la temperatura de ignición crítica para la reacción deuterio-tritio (D–T) es aproximadamente igual a 4.5×10^7 K, o sólo 4 keV. La figura 14.12

Temperatura de ignición crítica

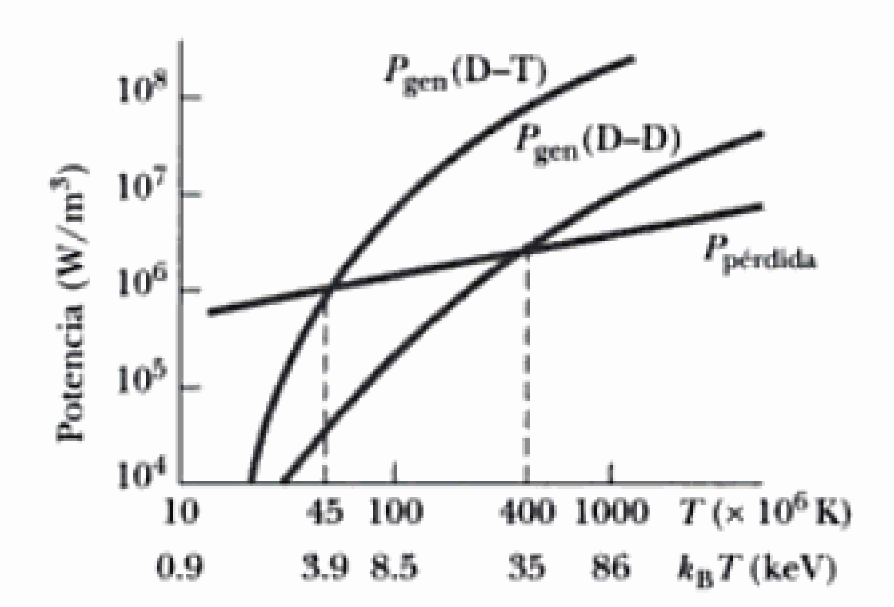


Figura 14.12 Potencia generada (o pérdida) contra la temperatura para las reacciones de fusión deuterio-deuterio y deuterio-tritio. Cuando la velocidad de generación P_{gen} excede la velocidad de pérdida, $P_{pérdida}$, ocurre ignición.

es una gráfica de la potencia generada por fusión, P_{gen}, contra la temperatura para las dos reacciones. La línea recta representa la pérdida de potencia contra la temperatura, mediante el mecanismo de radiación denominado **bremsstrahlung.** Éste es el mecanismo más importante de pérdida de energía, donde la radiación (principalmente rayos X) es emitida como resultado de colisiones electrón-ion dentro del plasma.[2] Las intersecciones de la línea $P_{pérdida}$ con las curvas P_{gen} proporcionan las temperaturas de ignición críticas.

Tiempo de confinamiento

Además de los requisitos de alta temperatura, hay otros dos parámetros que determinan si un reactor termonuclear será exitoso: la **densidad iónica,** n, y el **tiempo de confinamiento,** τ. **El tiempo de confinamiento es el periodo durante el cual los iones interactuantes se mantienen a una temperatura igual o mayor que la temperatura de ignición.** El físico británico J. D. Lawson ha demostrado que la densidad iónica y el tiempo de confinamiento deben ser ambos suficientemente grandes para asegurar que se libere más energía de fusión que la necesaria para calentar el plasma. En particular, el **criterio de Lawson** establece que una salida neta de energía es posible en las siguientes condiciones:

Criterio de Lawson

$$n\tau \geq 10^{14}\ \mathrm{s/cm^3} \qquad (\mathrm{D-T})$$
$$n\tau \geq 10^{16}\ \mathrm{s/cm^3} \qquad (\mathrm{D-D}) \qquad (14.12)$$

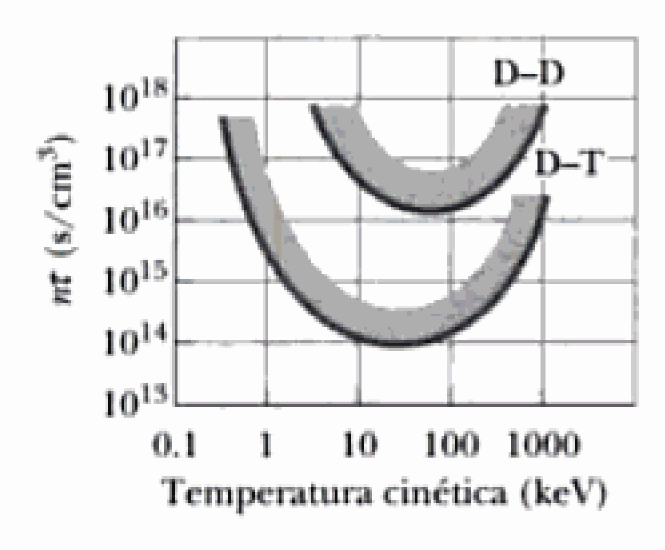


Figura 14.13 Número de Lawson $n\tau$ al cual es posible la salida de energía neta contra la temperatura para las reacciones de fusión D-D y D-T. Las regiones por arriba de las curvas representan condiciones favorables para la fusión.

La figura 14.13 es una gráfica de $n\tau$ contra la denominada **temperatura cinética,** $k_B T$, para las reacciones D–T y D–D.

Lawson llegó a establecer su criterio mediante la comparación de la energía necesaria para calentar el plasma con la energía generada en el proceso de fusión. La energía E_h necesaria para calentar el plasma es proporcional a la densidad de iones n; es decir, $E_h = D_1 n$. La energía generada en el proceso de fusión, E_{gen}, es proporcional a $n^2\tau$, o $E_{gen} = D_2 n^2 \tau$. Esto puede comprenderse al entender que la energía de fusión liberada es proporcional tanto a la velocidad de colisión de los iones interactuantes, n^2, como al tiempo de confinamiento, τ. Se produce energía neta cuando la energía generada por la fusión, E_{gen}, excede a E_h. Cuando las constantes D_1 y D_2 se calculan pa-

[2]La radiación por ciclotrón es otro mecanismo de pérdida; es especialmente importante en el caso de la reacción D-D.

ra reacciones diferentes, la condición de que $E_{gen} \geq E_h$ conduce al criterio de Lawson.[3]

En resumen, los tres requisitos básicos de un reactor de potencia termonuclear son:

Requerimientos para un reactor de fusión nuclear

- La temperatura del plasma debe ser muy elevada: alrededor de 4.5×10^7 K para la reacción D–T y alrededor de 4.5×10^8 K para la reacción D–D.
- La densidad iónica debe ser alta. Se requiere una elevada densidad de núcleos interactuantes para incrementar la velocidad de las colisiones entre las partículas.
- El tiempo de confinamiento del plasma debe ser largo. Para satisfacer el criterio de Lawson, el producto $n\tau$ debe ser grande. Para un valor dado de n, la probabilidad de fusión entre dos partículas se incrementa cuando aumenta τ.

Los esfuerzos actuales están dirigidos a satisfacer el criterio de Lawson a temperaturas superiores a la temperatura de ignición crítica. Aunque ya se han alcanzado las densidades mínimas de plasma, el problema del tiempo de confinamiento es más difícil. ¿Cómo es posible confinar un plasma a 10^8 K durante 1 s? Actualmente se investigan dos técnicas básicas para confinar plasmas: confinamiento en un campo magnético y confinamiento inercial.

Confinamiento en un campo magnético

Muchos experimentos con plasma relacionados con la fusión utilizan **confinamiento de campo magnético** para contener el plasma cargado. En la figura 14.14a se muestra un dispositivo denominado **tokamak,** creado por vez primera en Rusia. Para confinar y estabilizar el plasma se utiliza una combinación de dos campos magnéticos: 1) un intenso campo toroidal, producido por la corriente en los devanados y 2) un campo "poloidal" más débil, producido por la corriente toroidal. Esta corriente calienta el plasma además de confinarlo. Las líneas helicoidales del campo describen una espiral alrededor del plasma y evitan que éste entre en contacto con las paredes de la cámara de vacío. Si el plasma entra en contacto con las paredes, su temperatura se reduce y las pesadas impurezas crepitantes provenientes de las paredes las "envenenan" y generan grandes pérdidas de potencia. Uno de los avances más importantes de la década de 1980 se logró en el campo del calentamiento auxiliar para alcanzar temperaturas de ignición. Experimentos han demostrado que inyectar un haz de partículas energéticas neutras en el plasma es un método muy eficiente para calentar el plasma hasta temperaturas de ignición (de 5 a 10 keV). Para plasmas del tamaño de un reactor quizá sea necesario calentamiento a radiofrecuencia. En la figura 14.14b se muestra un corte del reactor de prueba de fusión Tokamak (RPFT) de Princeton. Cuando estaba en operación, el RPFT reportaba temperaturas iónicas centrales de 510 millones de grados Celsius, más de 30 veces más caliente que el centro del Sol. Los valores $n\tau$ del RPFT para la reacción D–T estaban bastante arriba de 10^{13} s/cm^3 y próximos al valor requerido por el criterio de Lawson. A fines de la década de 1990, tokamaks en Inglaterra y Japón reportaban velocidades de reacción de 10^{18} fusiones D–T por segundo y valores $n\tau$ de 5×10^{13} s/cm^3 a temperaturas de 30 keV. Mediciones directas demostraron que la energía de salida excedía ligeramente la energía de entrada del plasma durante lapsos breves.

[3] Observe que el criterio de Lawson desprecia la energía necesaria para establecer el intenso campo magnético que se utiliza para confinar el plasma caliente. Se espera que esta energía sea aproximadamente 20 veces mayor que la energía necesaria para calentar el plasma. En consecuencia, es necesario contar con un sistema de recuperación de energía magnética o utilizar imanes superconductores.

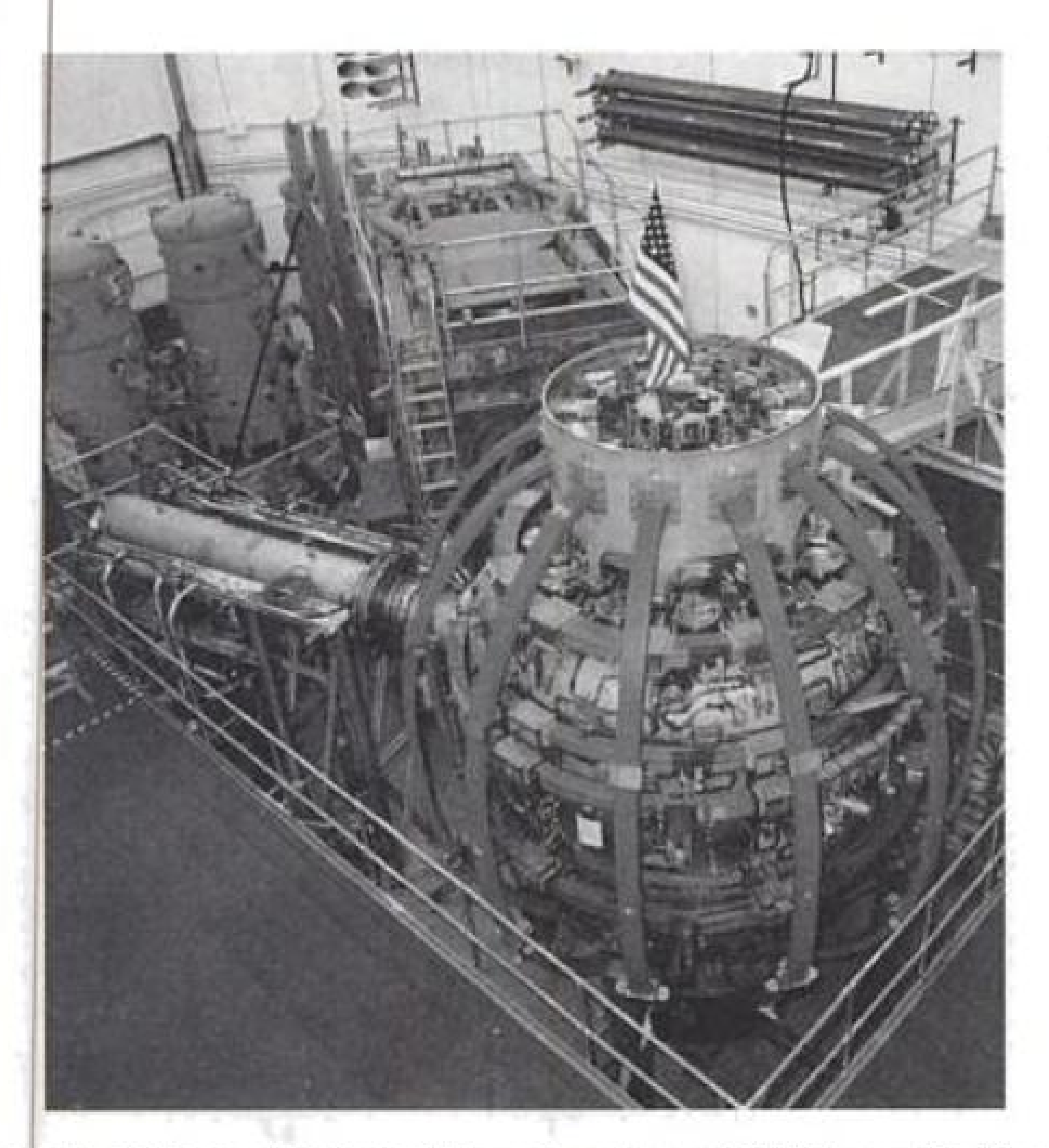


Figura 14.15 El National Spherical Torus Experiment (NSTX), que inició sus operaciones en marzo de 1999. (*Cortesía del Princeton Plasma Physics Laboratory, Universidad de Princeton.*)

Un esfuerzo internacional conjunto que implica a Canadá, Europa, Japón y Rusia está llevándose a cabo para construir un reactor de fusión denominado ITER (International Termonuclear Experimental Reactor). China y Estados Unidos comenzaron a participar en actividades del programa desde 2003. La instalación se hará cargo de las cuestiones tecnológicas y científicas restantes concernientes a la factibilidad de potencia de fusión. El diseño ya está terminado, y están en negociación el sitio y la construcción. Si el dispositivo planificado funciona como se espera, el número de Lawson para el ITER será aproximadamente seis veces mayor que el del actual poseedor del récord, el tokamak JT-60U en Japón. El ITER producirá 1.5 GW de potencia, y el contenido de energía de las partículas alfa en el interior del reactor será tan intenso que sustentarán la reacción de fusión, permitiendo que las fuentes de energía auxiliares estén apagadas una vez que se inicie la reacción.

Confinamiento inercial

La segunda técnica para confinar el plasma, denominada **confinamiento inercial**, utiliza un objetivo D–T que posee una densidad de partículas muy elevada, de 5×10^{25} partículas/cm^3, o una densidad de masa aproximada de 200 g/cm^3. En este esquema, el tiempo de confinamiento es muy breve (típicamente de 10^{-11} a 10^{-9} s) y así, debido a su propia inercia, las partículas no tienen ninguna posibilidad de moverse notoriamente de sus posiciones iniciales. Así, el criterio de Lawson puede satisfacerse mediante la combinación de una elevada densidad de partículas y un tiempo de confinamiento breve.

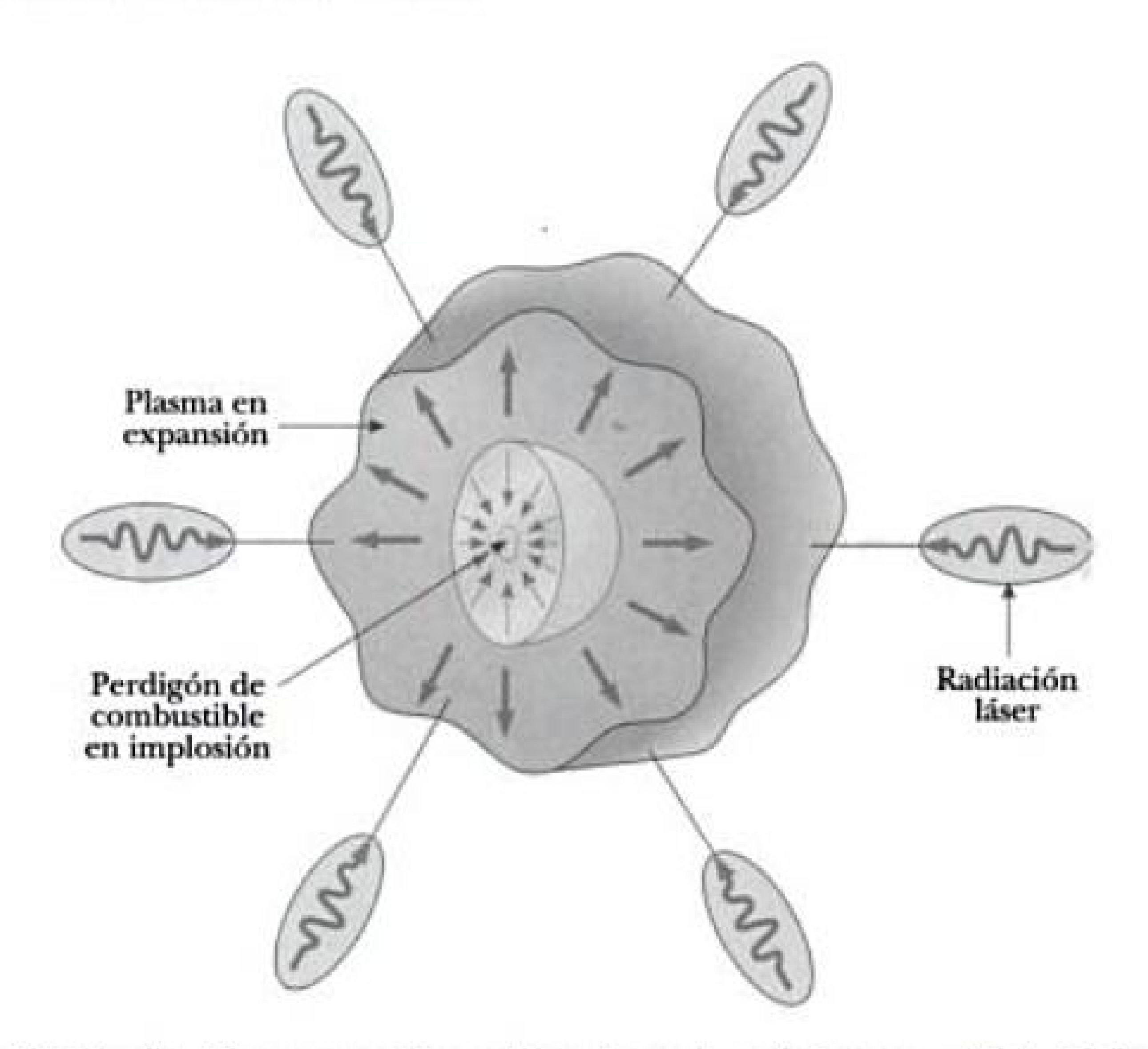


Figura 14.16 En el esquema de confinamiento inercial, un perdigón de D–T se fusiona al ser golpeado simétrica y simultáneamente por varios haces de láser de alta intensidad.

La forma más común de confinamiento inercial es la fusión láser. Un pequeño perdigón D–T de alrededor de 1 mm de diámetro es golpeado en forma simultánea por varios haces láser enfocados, simétricamente incidentes y de alta energía, lo que resulta en un gran pulso de energía de entrada que provoca que la superficie del perdigón se evapore (figura 14.16). Las partículas que escapan producen una fuerza de reacción sobre el núcleo del perdigón, resultando en una intensa onda de choque que se desplaza hacia adentro. Esta onda incrementa la presión y la densidad del núcleo y produce un aumento correspondiente en la temperatura. Cuando la temperatura del núcleo alcanza la temperatura de ignición, reacciones de fusión ocasionan que explote el perdigón. El proceso puede considerarse como la explosión de una bomba de hidrógeno en miniatura.

Dos de los laboratorios más importantes en Estados Unidos son la instalación Omega en la Universidad de Rochester y la instalación Nova en el Lawrence Livermore National Laboratory en California. En ambos se utilizan rayos láser de cristal de neodimio. La instalación Omega enfoca 60 haces de láser sobre una cámara objetivo aproximadamente de 3 m de diámetro. En la figura 14.17a se muestra el objetivo en Omega, y en la 14.17b, los pequeños perdigones esféricos D–T que se utilizan. Nova, que opera a niveles superiores de potencia de entrada que Omega, es capaz de inyectar en 1 ns una potencia de 200 kJ en un perdigón D–T de 0.5 mm de diámetro. Con estas elevadas potencias de entrada, Nova ha alcanzado $n\tau \approx 5 \times 10^{14}$ s/cm^3 y temperaturas iónicas de 5 keV, valores próximos a los necesarios para ignición D–T.

Diseño de un reactor de fusión

En el reactor de fusión D–T

$${}^{2}_{1}\text{H} + {}^{3}_{1}\text{H} \longrightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{1}_{0}\text{n} \qquad Q = 17.6 \text{ MeV}$$

Absorción de rayos gamma

- A bajas energías del fotón (menores que alrededor de 0.5 MeV), el proceso predominante que remueve fotones de un haz es el efecto fotoeléctrico, donde un fotón es absorbido y transfiere toda su energía a un electrón.
- A energías intermedias del fotón, el proceso predominante es la dispersión de Compton, donde el fotón transfiere algo de su energía a un electrón. En el capítulo 3 se analizaron el efecto fotoeléctrico y la dispersión de Compton.
- A altas energías, el proceso predominante es la **producción de pares,** donde se crea el par electrón-positrón cuando el fotón pasa cerca de un núcleo en el medio. Debido a que la energía en reposo del par electrón-positrón es $2m_ec^2 = 1.02$ MeV (el doble de la energía en reposo del electrón), el fotón del rayo gamma debe poseer por lo menos esta energía para producir un par. La producción de pares se analizará con más detalle en el capítulo 15.

Si un haz de fotones incide sobre un medio, su intensidad decrece exponencialmente con el aumento en la profundidad de penetración en el medio. Esta reducción en intensidad se denomina **atenuación** del haz. Así como en el caso de los neutrones (ecuación 14.5), la intensidad en un medio varía según la relación

Absorción de fotones en un medio

$$I(x) = I_0e^{-\mu x} \tag{14.13}$$

donde I_0 es la intensidad del fotón incidente (medida en fotones/$\text{m}^2 \cdot \text{s}$), x es la distancia que recorre el haz en el medio, $I(x)$ es la intensidad del haz una vez que ha recorrido una distancia x, y μ es un parámetro denominado **coeficiente de absorción lineal** del medio. Este coeficiente depende de la energía del fotón, así como de las propiedades del medio. La variación de μ con la energía se muestra en la figura 14.21 para rayos gamma en el plomo y en las tablas 14.2 y 14.3 para rayos X y rayos gamma en varios medios.

Coeficiente de absorción lineal

Tabla 14.2 Coeficientes de absorción lineal de rayos X en varios medios

	Coeficiente de absorción lineal (cm^{-1})				
λ (pm)	**Aire**	**Agua**	**Aluminio**	**Cobre**	**Plomo**
10		0.16	0.43	3.2	43
20		0.18	0.76	13	55
30		0.29	1.3	38	158
40		0.44	3.0	87	350
50	8.6×10^{-4}	0.66	5.4	170	610
60	1.3×10^{-3}	1.0	9.2	286	1000
70	1.95×10^{-3}	1.5	14	430	1600
80	2.73×10^{-3}	2.1	20	625	
90	3.64×10^{-3}	2.8	30	875	
100	4.94×10^{-3}	3.8	41	1200	
150	1.56×10^{-2}	12	124		
200	3.64×10^{-2}	28	275		
250	6.63×10^{-2}	51	524		

ma de desplazamientos atómicos, que a menudo resultan en importantes modificaciones en las propiedades del metal. Los materiales también pueden dañarse por radiaciones ionizantes, como los rayos gamma y los rayos X. Por ejemplo, los defectos denominados centros de color pueden producirse en cristales de aluro de álcali al radiar los cristales con rayos X. Un centro de color que se ha estudiado con bastante detalle fue identificado como un electrón atrapado en un lugar vacío del ion Cl^-.

El daño por radiación en organismos biológicos se debe principalmente a los efectos de ionización en las células. La operación normal de una célula puede alterarse cuando se forman iones o radicales altamente reactivos como resultado de la radiación ionizante. Por ejemplo, los radicales hidrógeno y oxidrilo producidos a partir de moléculas de agua pueden inducir reacciones químicas capaces de romper los enlaces en proteínas y otras moléculas vitales. Además, la radiación ionizante puede afectar directamente a moléculas vitales al remover electrones de sus estructuras. Grandes dosis de radiación son especialmente peligrosas, porque dañar a un gran número de moléculas en una célula puede matarla. Aunque la muerte de una sola célula no suele ser un problema, la muerte de muchas puede dañar irreversiblemente al organismo. Las células que se dividen rápidamente, como las del tracto digestivo, los órganos reproductores y los folículos del cabello, son particularmente susceptibles. También, las células que sobreviven a la radiación pueden volverse defectuosas. Estas células pueden producir más células defectuosas cuando se dividen, conduciendo al cáncer.

En sistemas biológicos, es común separar al daño por radiación en dos categorías: somático y genético. El **daño somático** es el daño asociado con cualquier célula del cuerpo excepto las células reproductivas. A altas dosis de radiación, este daño puede producir cáncer o modificar gravemente las características de organismos específicos. El **daño genético** afecta sólo a las células reproductivas. El daño en los genes de las células reproductivas puede ocasionar una descendencia defectuosa. Resulta evidente que es necesario preocuparse sobre los efectos de tratamientos de diagnóstico como los rayos X y otras formas de exposición a la radiación.

Para cuantificar la cantidad, o dosis, de cualquier radiación que interactúa con una sustancia se utilizan varias unidades.

El **roentgen** (R) es la cantidad de radiación ionizante que produce una carga eléctrica de 3.33×10^{-10} C en 1 cm^3 de aire en condiciones normales.

El roentgen

De manera equivalente, el roentgen es la cantidad de radiación que deposita una energía de 8.76×10^{-3} J en 1 kg de aire. Para la mayoría de las aplicaciones, el roentgen se ha sustituido por el rad (acrónimo de **r**adiation **a**bsorbed **d**ose):

Un **rad** es la cantidad de radiación que incrementa la energía de 1 kg de material absorbente por 1×10^{-2} J.

El rad

Aunque el rad es una unidad física perfectamente aceptable, no es la mejor unidad para medir el grado de daño biológico producido por radiación, ya que el daño depende no sólo de la dosis sino también del tipo de radiación. Por ejemplo, una dosis dada de partículas alfa provoca alrededor de 10 veces más daño biológico que una dosis igual de rayos X. El factor RBE (**r**elative **b**iological

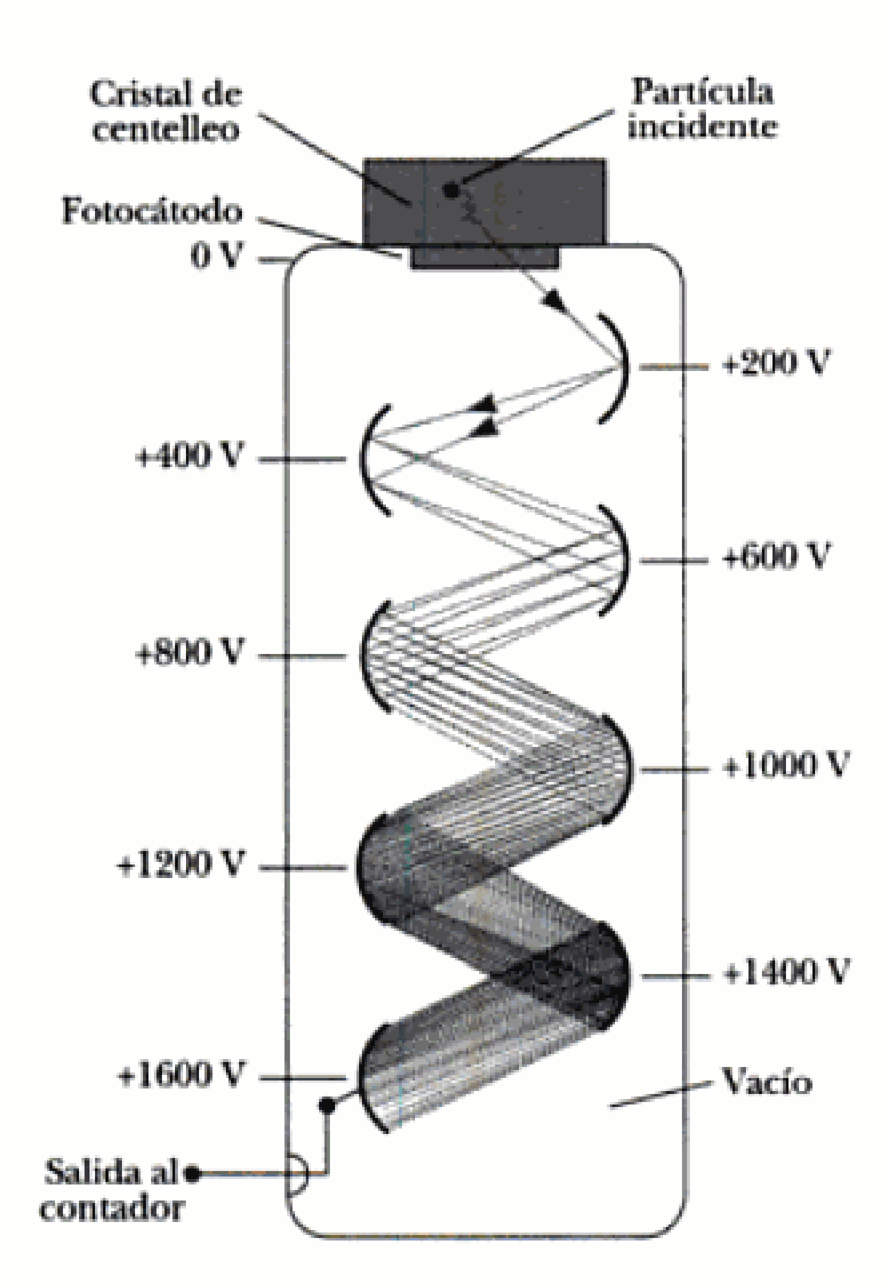


Figura 14.24 Diagrama de un contador de centelleo conectado a un tubo fotomultiplicador.

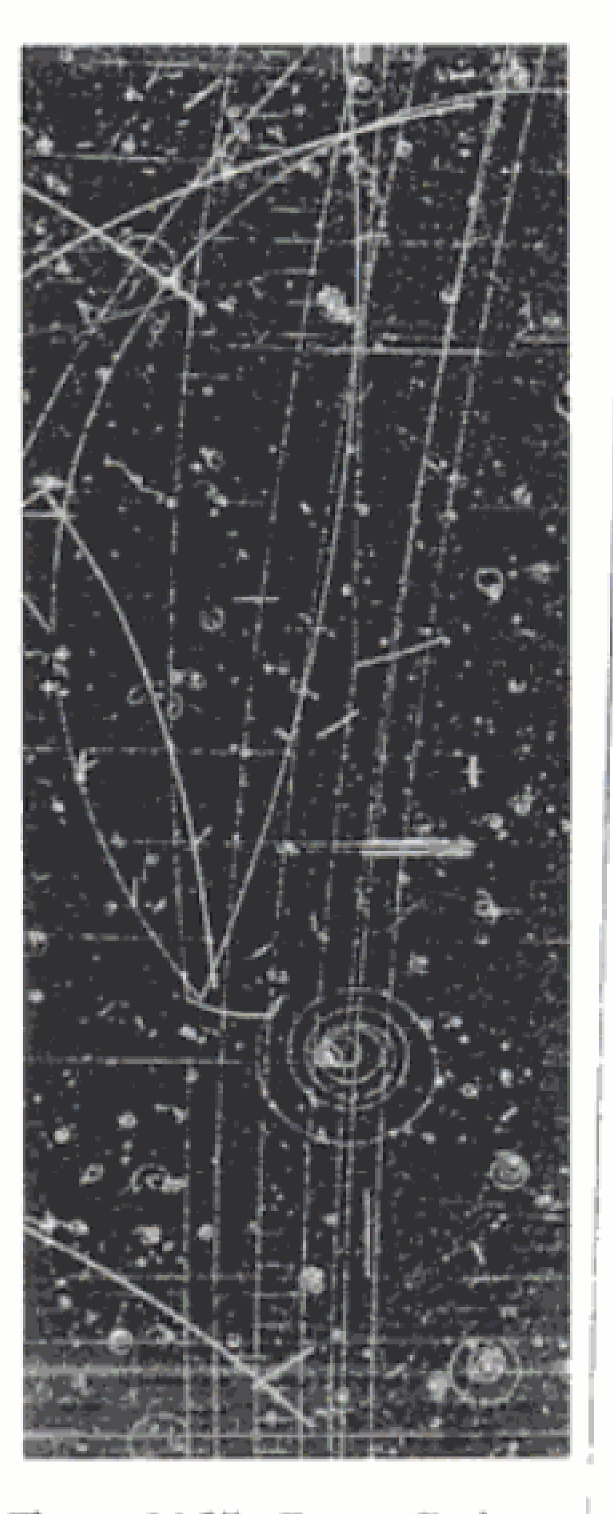


Figura 14.25 Fotografía de una cámara de burbujas que muestra rastros de partículas subatómicas. (*Cortesía del Lawrence Radiation Laboratory, Universidad de California en Berkeley.*)

energía no puede medirse en los pequeños detectores mencionados. En vez de ello, la energía y la cantidad de movimiento de estas partículas energéticas se encuentran a partir de la curvatura de la trayectoria de la partícula en un campo magnético conocido; de ahí la necesidad de detectores de traza.

El detector de traza más simple que hay es la **emulsión fotográfica.** Una partícula cargada ioniza los átomos en una capa de emulsión. La trayectoria de la partícula corresponde a una familia de puntos en los que han ocurrido cambios químicos en la emulsión. Al revelar la emulsión, se hace visible la trayectoria de la partícula.

Emulsión fotográfica

La **cámara de niebla** contiene un vapor que ha sido superenfriado justo debajo de su punto de condensación normal. Una partícula energética que pasa a través de la cámara ioniza el vapor a lo largo de su trayectoria. Estos iones sirven como centros para condensar el vapor superfrío. El rastro puede verse a simple vista y fotografiarse. Para determinar la carga de las partículas, así como su cantidad de movimiento y energía puede aplicarse un campo magnético.

Cámara de niebla

Un aparato denominado **cámara de burbujas,** inventado en 1952 por Donald A. Glaser, utiliza un líquido (casi siempre hidrógeno líquido) que se mantiene cerca de su punto de ebullición. Los iones producidos por partículas cargadas incidentes dejan rastros de burbujas, que pueden fotografiarse (figura 14.25). Debido a que la densidad del medio detector de una cámara de burbujas es mucho mayor que la densidad del gas en una cámara de niebla, la cámara de burbujas posee una sensibilidad mucho mayor.

Cámara de burbujas

Una **cámara de chispas** es un aparato contador que consta de un arreglo de placas conductoras y es capaz de registrar un rastro tridimensional. Las placas con número par están conectadas a tierra, y las de número impar se mantienen a un potencial elevado (alrededor de 10 kV). Los espacios entre las placas contienen un gas noble a presión atmosférica. Cuando una partícula cargada

Cámara de chispas

pasa por la cámara, el gas se ioniza, dando lugar a una gran fuente de corriente y una serie visible de chispas a lo largo de la trayectoria de la partícula. Estas trayectorias pueden fotografiarse o detectarse electrónicamente y enviarse a una computadora para reconstruir la trayectoria y determinar la masa, cantidad de movimiento y energía de la partícula.

Cámara de cables

Las **cámaras de cables** o **de arrastre** son semejantes a las cámaras de chispas en cuanto a su capacidad para registrar trazas tridimensionales y proporcionar una rápida lectura electrónica a una computadora para efectos de reconstrucción y exhibición de la trayectoria. Una cámara de cables consta de cables bastante próximos entre sí que colectan los electrones que se crean por el paso de una partícula ionizada. Una segunda malla, cuyos cables son perpendiculares a los de la primera, permite determinar la posición xy de la partícula en el plano de los dos conjuntos de cables. Por último, varias de estas mallas de localización xy dispuestas de manera paralela entre sí a lo largo del eje z pueden utilizarse para determinar la trayectoria de la partícula en tres dimensiones.

Detectores de neutrones

Los **detectores de neutrones** son algo más difíciles de construir que los detectores de partículas cargadas, ya que los neutrones no interactúan eléctricamente con los átomos al pasar a través de la materia. Los neutrones rápidos, no obstante, pueden detectarse llenando una cámara de iones con hidrógeno gaseoso y detectando la ionización producida por los protones en retroceso a alta velocidad producidos por las colisiones neutrón-protón. Los neutrones lentos con energías menores que 1 MeV no transfieren suficiente energía a los protones para ser detectados de esta forma, aunque es posible detectarlos con una cámara de iones llena de BF_3 gaseoso. En este caso, los núcleos de boro decaen en un proceso lento de captura de electrones, emitiendo partículas alfa bastante ionizantes que son detectadas fácilmente en la cámara de iones.

14.10 USOS DE LA RADIACIÓN

Las aplicaciones de la física nuclear están bastante extendidas en la manufactura, la medicina y la biología. Incluso un breve análisis de todas las posibilidades llenaría todo un libro, y para mantener actualizado tal libro serían necesarias revisiones frecuentes. En esta sección se presentan algunas de estas aplicaciones y las teorías subyacentes que las sustentan.

Rastreo

Los indicadores radiactivos se usan para seguir el rastro de los productos químicos que participan en varias reacciones. Por ejemplo, el yodo, un nutriente necesario para el cuerpo humano, se obtiene en gran medida a través de la ingesta de sal y alimentos que lo contienen. Para evaluar la actividad de la tiroides, los pacientes beben una muy pequeña cantidad de yoduro de sodio radiactivo que contiene ^{131}I, un isótopo del yodo producido en forma artificial (el isótopo natural no radiactivo es ^{127}I). La cantidad de yodo en la glándula tiroides se determina como una función del tiempo al medir la intensidad de la radiación en la zona del cuello. La cantidad de ^{131}I que permanece en la tiroides es una medida de lo bien que puede funcionar la glándula.

Una segunda aplicación médica se muestra en la figura 14.26. Una solución que contiene sodio radiactivo se inyecta al paciente por vía intravenosa en una pierna, y en el instante en que el radioisótopo llega a otra parte del cuerpo se detecta con un medidor de radio. El tiempo transcurrido es una buena indicación de la presencia o ausencia de obstrucciones en el sistema circulatorio.

Los indicadores también son de utilidad en la investigación agrícola. Suponga que se requiere determinar el mejor método para fertilizar una planta. Cierto

Calcule la energía (en MeV) liberada en cada una de las siguientes reacciones de "quemado de carbono":

$$^{12}C + {}^{12}C \longrightarrow {}^{20}Ne + {}^{4}He$$
$$^{12}C + {}^{12}C \longrightarrow {}^{24}Mg + \gamma$$

(c) Calcule la energía (en kWh) despedida cuando 2 kg de carbono se fusionan por completo según la primera reacción.

3. La siguiente reacción, observada por primera vez en 1930, condujo al descubrimiento del neutrón por Chadwick:

$$^{9}_{4}Be(\alpha, n)^{12}_{6}C$$

Calcule el valor Q de esta reacción.

4. La siguiente reacción fue la primera reacción conocida (lograda en 1934), donde el núcleo producto es radiactivo:

$$^{27}_{13}Al(\alpha, n)^{30}_{15}P$$

Calcule el valor Q de esta reacción.

5. Hay unas cuantas reacciones nucleares donde la partícula que emerge y el núcleo producto son idénticas. Un ejemplo de lo anterior es la reacción

$$^{7}_{3}Li(p, \alpha)^{4}_{2}He$$

Calcule el valor Q de esta reacción.

6. Demuestre que las siguientes reacciones inversas tienen el mismo *valor absoluto* de Q:

$$^{10}_{5}B(\alpha, p)^{13}_{6}C \qquad y \qquad ^{13}_{6}C(p, \alpha)^{10}_{5}B$$

7. a) La primera transmutación nuclear fue lograda en 1919 por Rutherford, quien bombardeó átomos de nitrógeno con partículas alfa emitidas por el isótopo ^{214}Bi. La reacción es

$$^{4}_{2}He + {}^{14}_{7}N \longrightarrow {}^{17}_{8}O + {}^{1}_{1}H$$

¿Cuál es el valor Q de esta reacción? ¿Cuál es la energía crítica? b) Cockroft y Walton realizaron la primera reacción nuclear utilizando aceleradores de partículas. En ese caso, se utilizaron protones acelerados para bombardear núcleos de litio, produciendo la reacción

$$^{1}_{1}H + {}^{7}_{3}Li \longrightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{4}_{2}He$$

Debido a que las masas de las partículas implicadas en la reacción eran bien conocidas, estos resultados se usaron para obtener una temprana prueba de la relación masa–energía de Einstein. Calcule el valor Q de esta reacción.

8. Un método para producir neutrones para usos experimentales se basa en el bombardeo de núcleos ligeros con partículas alfa. En un arreglo, las partículas alfa emitidas por plutonio inciden sobre núcleos de berilio, lo cual resulta en la producción de neutrones:

$$^{4}_{2}He + {}^{9}_{4}Be \longrightarrow {}^{12}_{6}C + {}^{1}_{0}n$$

¿Cuál es el valor Q de esta reacción? b) Los neutrones también se producen a menudo en aceleradores de pequeñas partículas. En un diseño, deuterones (^{2}H) que han sido acelerados en un generador Van de Graaff se utilizan para bombardear otros núcleos de deuterio, lo que resulta en la reacción:

$$^{2}_{1}H + {}^{2}_{1}H \longrightarrow {}^{3}_{2}He + {}^{1}_{0}n$$

Esta reacción, ¿es exotérmica o endotérmica? Calcule su valor Q.

9. Cuando la reacción nuclear representada por la ecuación 14.2 es endotérmica, la energía de desintegración Q es negativa. Para que la reacción proceda, la partícula incidente debe poseer una energía cinética mínima, denominada *energía crítica*, K_{cr}. a) Demuestre que para partículas no relativistas

$$K_{cr} = -Q\left(1 + \frac{M_a}{M_X}\right)$$

usando el hecho de que $K_{cr} = -Q$ en el sistema del CM, y al transformar este resultado para el sistema del CM de vuelta al sistema del laboratorio. Observe que en el sistema CM, a y X tienen cantidades de movimiento iguales y opuestas, $p = M_a v = M_X V$. En el sistema del laboratorio, a tiene una cantidad de movimiento $p_{lab} = M_a(v + V)$ y X está en reposo. b) Calcule la energía crítica de la partícula alfa incidente en la reacción

$$^{4}_{2}He + {}^{14}_{7}N \longrightarrow {}^{17}_{8}O + {}^{1}_{1}H$$

14.2 Sección transversal de la reacción

10. Considere una placa que consta de dos capas de material con grosores x_1 y x_2 y densidades de blanco n_1 y n_2. Si N_0 es el número de partículas incidentes sobre la primera capa de la placa en algún intervalo de tiempo, determine el número N que sale de la segunda capa en ese intervalo. Suponga que la sección transversal σ es la misma para cada material. ¿Cuál considera que sería la relación para tres o más capas?
11. La densidad del blanco de hidrógeno líquido en una cámara de burbujas es 70 kg/m^3. Si 20% de un haz de neutrones lentos que incide sobre la cámara de burbujas ha reaccionado con el hidrógeno durante el tiempo en que el haz ha recorrido 2 m a través del hidrógeno, ¿cuál es la sección transversal, en barns, para la reacción de estos neutrones lentos con los átomos de hidrógeno?
12. La densidad del plomo es 11.35 g/cm^3, y su peso atómico es 207.2. Suponga que 1 cm de plomo reduce un haz de rayos gamma de 1 MeV a 28.65% de su intensidad inicial. a) ¿Cuánto plomo se requiere para reducir el haz hasta 10^{-4} de su intensidad inicial? b) ¿Cuál es la sección transversal efectiva de un átomo de plomo para un fotón a 1 MeV?
13. Se capturan neutrones en una lámina de cadmio. Use los datos de la figura 14.3 para encontrar a) la razón de los neutrones de 10 eV capturados a los neutrones de 1 eV capturados, b) la razón de los neutrones de 1 eV capturados a los neutrones de 0.1 eV capturados y c) la razón de los neutrones de 0.1 eV capturados a los neutrones de 0.01 eV capturados. d) ¿En qué intervalo de energías es posible usar cadmio como selector de energía?

26. a) Calcule el volumen espacial necesario para almacenar los desechos radiactivos que se producirían en un año si toda la producción anual de electricidad en Estados Unidos (que es alrededor de 2.2×10^{12} kWh/año) proveniese de uranio enriquecido hasta 3% de ^{235}U. (Suponga que la eficiencia de conversión es 30% y que los desechos constituyen un líquido cuya densidad es igual a 1 g/cm^3.) b) Si los desechos pudieran caber en un cubo, ¿cuál sería la longitud de las aristas de éste?

14.6 Fusión nuclear

27. Considere la reacción de fusión deuterio-tritio con el tritio en reposo:

$$^2_1\text{H} + ^3_1\text{H} \longrightarrow ^4_2\text{He} + ^1_0\text{n}$$

a) A partir de la ecuación 13.1, calcule la distancia de aproximación máxima. b) ¿Cuál es la energía potencial de Coulomb (en electrón-volts) a esta distancia? c) Si el deuterón tiene justo la energía suficiente para llegar a la distancia de aproximación máxima, ¿cuál es la velocidad final de los núcleos combinados de deuterio y tritio en términos de la velocidad inicial del deuterio, v_0? d) Use métodos energéticos para calcular la energía inicial mínima del deuterón necesaria para alcanzar fusión. e) ¿Por qué esta reacción de fusión ocurre a mucho menores energías del deuterón que las calculadas en el inciso d)?

28. La vida media del tritio es 12 años. Si el reactor de fusión TFTR contiene 50 m^3 de tritio a una densidad igual a 1.5×10^{14} partículas/cm^3, ¿cuántos curies de tritio hay en el plasma? Compare este dato con un suministro de un reactor de fisión de 4×10^{10} Ci.

29. a) Calcule las cantidades de energía que se llevan el núcleo de $^4_2$He y el neutrón en la reacción de fusión D–T. (Suponga que la cantidad de movimiento es inicialmente cero.) b) ¿Lo anterior explica por qué sólo 20% de la energía producida puede utilizarse para ignición crítica?

30. El Sol irradia energía a un ritmo de 4×10^{23} kW. Suponiendo que la reacción

$$4(^1_1\text{H}) \longrightarrow ^4_2\text{He} + 2e^+ + 2\nu + \gamma$$

explica toda la energía liberada, calcule a) el número de protones fusionados por segundo y b) la masa transformada en energía por segundo.

31. Suponga que el objetivo en un reactor de fusión láser es una esfera de hidrógeno sólido de 10^{-4} m de diámetro y 0.2 g/cm^3 de densidad. También suponga que la mitad de los núcleos son de ^{2}H y que la mitad son de ^{3}H. a) Si 1% de un pulso láser de 200 kJ se dedica al calentamiento de la esfera, ¿qué temperatura alcanzará ésta? b) Si todo el hidrógeno se "quema" según la reacción D–T, ¿cuántos joules de energía se liberan?

32. En un reactor de fusión tokamak, suponga que un deuterón de 500 eV se desplaza a un ángulo de 30° con respecto al campo magnético toroidal. Suponga que $B_t = 1$ T y $B_p = 0$ (consulte la figura 14.14). a) Calcule las componentes de velocidad paralela y perpendicular a $\mathbf{B}_t$. b) ¿Cuál es el radio del movimiento espiral del deuterón? ¿Qué distancia recorre el deuterón *a lo largo* del campo magnético antes de completar una revolución *alrededor* del campo magnético?

33. El ciclo del carbono, propuesto por primera vez por Bethe en 1939, es otro ciclo mediante el cual se libera energía en las estrellas y el hidrógeno se convierte en helio. El ciclo del carbono requiere temperaturas más elevadas que el ciclo protón-protón. La serie de reacciones es

$$^{12}\text{C} + ^1\text{H} \longrightarrow ^{13}\text{N} + \gamma$$
$$^{13}\text{N} \longrightarrow ^{13}\text{C} + e^+ + \nu$$
$$^{13}\text{C} + ^1\text{H} \longrightarrow ^{14}\text{N} + \gamma$$
$$^{14}\text{N} + ^1\text{H} \longrightarrow ^{15}\text{O} + \gamma$$
$$^{15}\text{O} \longrightarrow ^{15}\text{N} + e^+ + \nu$$
$$^{15}\text{N} + ^1\text{H} \longrightarrow ^{12}\text{C} + ^4\text{He}$$

a) Si el ciclo protón-protón requiere una temperatura de 1.5×10^7 K, calcule la temperatura necesaria para el primer paso del ciclo del carbono. b) Calcule el valor Q para cada paso del ciclo del carbono y la energía global liberada. c) ¿Usted piensa que le energía que se llevan los neutrinos se deposita en la estrella? Explique su respuesta.

34. a) Calcule la energía (en kWh) liberada si 1 kg de ^{239}Pu experimenta fisión completa y la energía liberada por evento de fisión es 200 MeV. b) Calcule la energía (en MeV) liberada en la fusión D–T:

$$^2_1\text{H} + ^3_1\text{H} \longrightarrow ^4_2\text{He} + ^1_0\text{n}$$

c) Calcule la energía (en kWh) liberada si 1 kg de deuterio experimenta fusión. d) Calcule la energía (en kWh) liberada por la combustión de 1 kg de carbón si cada reacción $C + O_2 \rightarrow CO_2$ produce 4.2 eV. e) Enumere las ventajas y las desventajas de cada uno de estos métodos de generación de energía.

35. El isótopo ^{6}Li tiene una abundancia en la naturaleza de sólo alrededor de 7.5%. El 92.5% restante del litio es ^{7}Li. Se calcula que se dispone de 2×10^{13} g de litio. Si ^{6}Li se usa como fuente de tritio para reactores de fusión, con una liberación de energía de 22 MeV por núcleo de ^{6}Li, calcule la energía total disponible en la fusión D–T. ¿Cómo se compara esta cifra con la oferta mundial existente de combustibles fósiles, que se calcula en alrededor de 2.5×10^{23} J?

36. Encuentre el valor Q para cada una de las reacciones en el ciclo protón-protón (ecuación. 14.10) y demuestre que el valor Q global para el ciclo es 25.7 MeV.

37. a) Calcule la salida de potencia neta de un reactor de fusión que quema diez perdigones de 3 mg 50:50 D–T por segundo. Suponga que 30% del combustible se quema y que para iniciar el quemado se requiere un pulso láser de 5×10^{14} W de 10 ns. b) ¿Cuál es el equivalente en litros de petróleo para un día de operación si cuando se queman 2 litros de petróleo se obtienen 100 MJ.

38. En una reacción de fusión láser, un perdigón que contiene una mezcla 50:50 de D y T experimenta un incremento en densidad de 1 000 veces cuando es golpeado por un pulso láser. a) Encuentre la densidad de la partícula en el estado comprimido si la densidad normal es 0.20 g/cm^3. b) ¿Cuánto tiempo es necesario confinar al D y al T en

esta densidad si la reacción ha de alcanzar un punto de equilibrio?

39. Dos núcleos con números atómicos Z_1 y Z_2 se aproximan entre sí con una energía total E. a) Si la distancia de aproximación mínima para que ocurra fusión es $r = 10^{-14}$ m, encuentre E en términos de Z_1 y Z_2. b) Calcule la energía mínima para que haya fusión en las reacciones D–D y D–T (las reacciones primera y tercera en la ecuación 14.11).

40. Para comprender por qué es necesaria la contención de un plasma, considere la velocidad a la que el plasma se perdería en caso de no estar contenido. a) Calcule la velocidad rms de los deuterones en el plasma a 10^8 K. b) Estime el intervalo de tiempo durante el cual el plasma debe permanecer en un cubo de 10 cm de arista si no se llevan a cabo los pasos para contenerlo.

41. De todos los núcleos de hidrógeno que hay en el mar, 0.0156% son de deuterio. El volumen del mar es de 317 millones de millas cúbicas. a) Si todo el deuterio del mar se fusionara en ${}^4_2$He, ¿cuántos joules de energía se liberarían? b) Hoy en día el consumo mundial de energía es alrededor de 7×10^{12} W. Si el consumo fuese 100 veces mayor, ¿cuánto duraría la energía calculada en el inciso a)?

42. Se ha indicado que los reactores de fusión son seguros en cuanto a explosiones porque en el plasma nunca hay suficiente energía para producir tal daño. a) Use una densidad de partícula igual a 10^{15} cm^{-3} y una temperatura cinética de 10 keV para calcular la cantidad de energía almacenada en el plasma del reactor TFTR. b) ¿Cuántos kilogramos de agua es necesario hervir para esta cantidad de energía? (El volumen del plasma del reactor TFTR es aproximadamente igual a 50 m^3.)

43. Para confinar un plasma estable, la densidad de la energía magnética en el campo magnético debe exceder la presión $2nkT$ del plasma por un factor de por lo menos 10. En lo siguiente, suponga un tiempo de confinamiento $\tau = 1$ s. a) Use el criterio de Lawson para determinar la densidad iónica necesaria. b) A partir del criterio de la temperatura de ignición para la reacción D–T, determine la presión necesaria del plasma. c) Determine la magnitud del campo magnético necesario para contener el plasma.

14.7 Interacción de partículas con la materia

44. Las densidades y los pesos atómicos de los materiales en la tabla 14.3 son como sigue:

Sustancia	Densidad (g/cm^3)	Peso atómico
H_2O	1	18
Al	2.7	27
Fe	7.8	55.8
Pb	11.35	207.2

Calcule el número de electrones por centímetro cúbico para cada material y grafique el coeficiente de absorción lineal de los rayos gamma contra la densidad de los electrones. Elabore tres gráficas correspondientes a energías de rayos gamma de 0.1, 1 y 10 MeV. ¿Qué concluye a partir de sus gráficas?

45. Tres capas igualmente gruesas de aluminio, cobre y plomo se utilizan para reducir la intensidad de un haz de rayos X a un tercio de su intensidad original. La longitud de onda del haz es 50 pm. a) Encuentre el grosor de una capa del material. b) ¿Por qué fracción se reduce la intensidad original del haz sólo por la acción del plomo?

46. Los rayos X de longitud de onda igual a 25 pm y los rayos gamma de energía 0.1 MeV poseen aproximadamente los mismos coeficientes de absorción en plomo. ¿Cómo se comparan sus energías?

47. ¿Cuál es el grosor del valor medio (ejemplo 14.7) de agua a rayos X de longitud de onda igual a 20 pm? Debido a que el cuerpo humano está constituido por más de 90% de agua, ¿qué indica su respuesta sobre el empleo de los rayos X como una técnica de diagnóstico?

48. En un ataque nuclear a gran escala, la intensidad típica de la radiación debido a la lluvia radiactiva podría ser de 2 000 rad en casi todas partes. En los siguientes cálculos, suponga que un tercio de la radiación es de rayos gamma a 10 MeV y que el coeficiente de absorción lineal es el mismo para el aluminio y el concreto. a) ¿Qué grosor (en metros) de concreto se requiere para reducir la intensidad de la radiación a 1 rad? b) Si un refugio particular estuviese localizado en un "punto rojo" que recibe 100 000 rad, ¿qué grosor de concreto se requiere para reducir la intensidad de la radiación a 1 rad?

14.8 Daño por radiación en la materia

49. Suponga que un técnico en rayos X se expone a un promedio de 8 rayos X por día y que, como resultado, recibe una dosis de 5 rem/año. a) Calcule la dosis en rem a esta exposición a rayos X. ¿Cómo se compara este resultado con la radiación de fondo de nivel bajo?

50. En términos de daño biológico, ¿cuántos rad de iones pesados equivalen a 100 rad de rayos X?

51. Dos trabajadores que utilizan una máquina industrial de rayos X interponen por accidente sus manos en el haz de rayos X durante el mismo tiempo. El primer trabajador interpuso una mano en el haz, y el segundo trabajador interpuso las dos. ¿Cuál de ellos recibió la mayor dosis en rad?

52. Calcule la dosis por radiación, en rad, suministrada a 1 kg de agua de modo que la energía depositada sea igual a a) la energía en reposo del agua y b) a su energía térmica. (Suponga que cada molécula posee una energía térmica igual a $k_B T$.)

53. Una persona cuya masa es de 75 kg se expone a una dosis de 25 rad. ¿Cuántos joules de energía se depositan en su cuerpo?

14.9 Detectores de radiación

54. En un tubo Geiger, el voltaje entre los electrodos suele ser típicamente de 1 kV y el pulso de corriente generado por la detección de una partícula β carga por completo un capacitor de 5 pF. a) ¿Cuál es la amplificación de energía de este aparato para un rayo beta de 0.5 MeV? b) ¿Cuántos electrones experimentan avalancha debido al electrón inicial?

55. En un tubo PM, suponga que hay siete dinodos con potenciales de 100 V, 200 V, 300 V, . . . , 700 V. La energía

15

Partículas elementales

Contenido del capítulo

La palabra *átomo* proviene del griego *atomos*, que significa "indivisible". Alguna vez, se creía que los átomos eran los constituyentes indivisibles de la materia; es decir, se consideraban como partículas elementales. Desde épocas tan lejanas como la del filósofo griego Demócrito hasta la de las obras relativamente recientes de John Dalton y Dimitri Mendeleev, la idea de que todo consta de átomos elementales ha sido bastante exitosa para explicar muchas propiedades de la materia. Cuando se descubrió a principios del siglo XX que el átomo está integrado por otros constituyentes, ocurrió otra simplificación con el modelo atómico de Bohr y la invención de la mecánica cuántica. La variedad de propiedades físicas y químicas de aproximadamente 100 elementos ha sido explicada en términos de reglas que rigen justo a tres constituyentes: electrones, protones y neutrones. Con excepción del neutrón libre, estas partículas son muy estables.

A partir de aproximadamente 1945 se descubrieron muchas partículas en experimentos que involucraban colisiones a alta energía entre partículas conocidas. Estas partículas son bastante inestables y sus vidas medias son muy breves, que van desde 10^{-6} hasta 10^{-23} s. A la fecha se han catalogado más de 400 de estas partículas temporales inestables.

Desde principios de la década de 1960, en todo el mundo se han construido poderosos aceleradores de partículas, que permiten observar colisiones de partículas energéticas en condiciones controladas de laboratorio a fin de revelar el mundo subatómico con mayor detalle. Hasta la década de 1960, los físicos estaban confundidos por la gran cantidad y variedad de partículas subatómicas descubiertas. Se preguntaban si las partículas eran como la variedad de animales en un zoológico, sin ninguna relación sistemática que las conectara, o si estaba surgiendo un patrón que quizá proporcionaría una mejor comprensión de la complicada estructura del mundo subnuclear. A partir de alrededor de 1970, los físicos han avanzado enormemente en cuanto al conocimiento que se tiene sobre la estructura de la materia al reconocer que todas las partículas, excepto los electrones, los fotones y unas cuantas más, están constituidas por partículas más pequeñas denominadas **quarks.** Así, los protones y los neutrones, por ejemplo, no son verdaderamente elementales, sino que son sistemas de quarks estrechamente unidos. El modelo de los quarks ha reducido el arreglo de partículas a un número manejable y ha predicho con éxito nuevas combinaciones de quarks que posteriormente han sido observadas en muchos experimentos. También se ha desarrollado un tipo de mecánica ondulatoria para los quarks (**cromodinámica cuántica**). Esta teoría, aunque matemáticamente difícil, ha profundizado nuestra comprensión de las partículas elementales y ha ayudado a domar el "zoológico" de las partículas.

En este capítulo se analizan las propiedades y clasificaciones de las partículas elementales conocidas, las interacciones que gobiernan su comportamiento y los métodos para producir partículas elementales y medir sus propiedades. También se aborda la teoría actual de las partículas elementales, el modelo estándar, donde las partículas elementales se dividen en dos categorías: partículas con espín $\frac{1}{2}$ —quarks y leptones—, y partículas que transportan fuerza, o partículas de "campo" con espín entero, como el fotón y el gluón.

15.1 FUERZAS FUNDAMENTALES EN LA NATURALEZA

Para comprender las propiedades de las partículas elementales, es necesario poder describir las fuerzas entre ellas. Las partículas en la naturaleza están sometidas a cuatro fuerzas fundamentales; en orden de intensidad decreciente, son: la fuerza fuerte, la fuerza electromagnética, la fuerza débil y la fuerza gravitacional.

La **fuerza fuerte** es responsable de unir a los quarks estrechamente entre sí para formar protones, neutrones y otras partículas pesadas. Su alcance es extremadamente corto y es despreciable para separaciones mayores que aproximadamente 10^{-15} m. La fuerza nuclear que une a los neutrones y protones en los núcleos suele considerarse como un efecto residual de la más básica fuerza fuerte entre los quarks, de manera bastante semejante a como la fuerza molecular que une eléctricamente a los átomos neutros en moléculas es una interacción eléctrica residual.

La **fuerza electromagnética,** que une a los electrones y a los protones en el interior de átomos y moléculas para formar materia normal, es aproximadamente dos órdenes de magnitud más débil que la fuerza fuerte. Es una fuerza de largo alcance que decrece en intensidad como el inverso del cuadrado de la separación entre las partículas interactuantes.

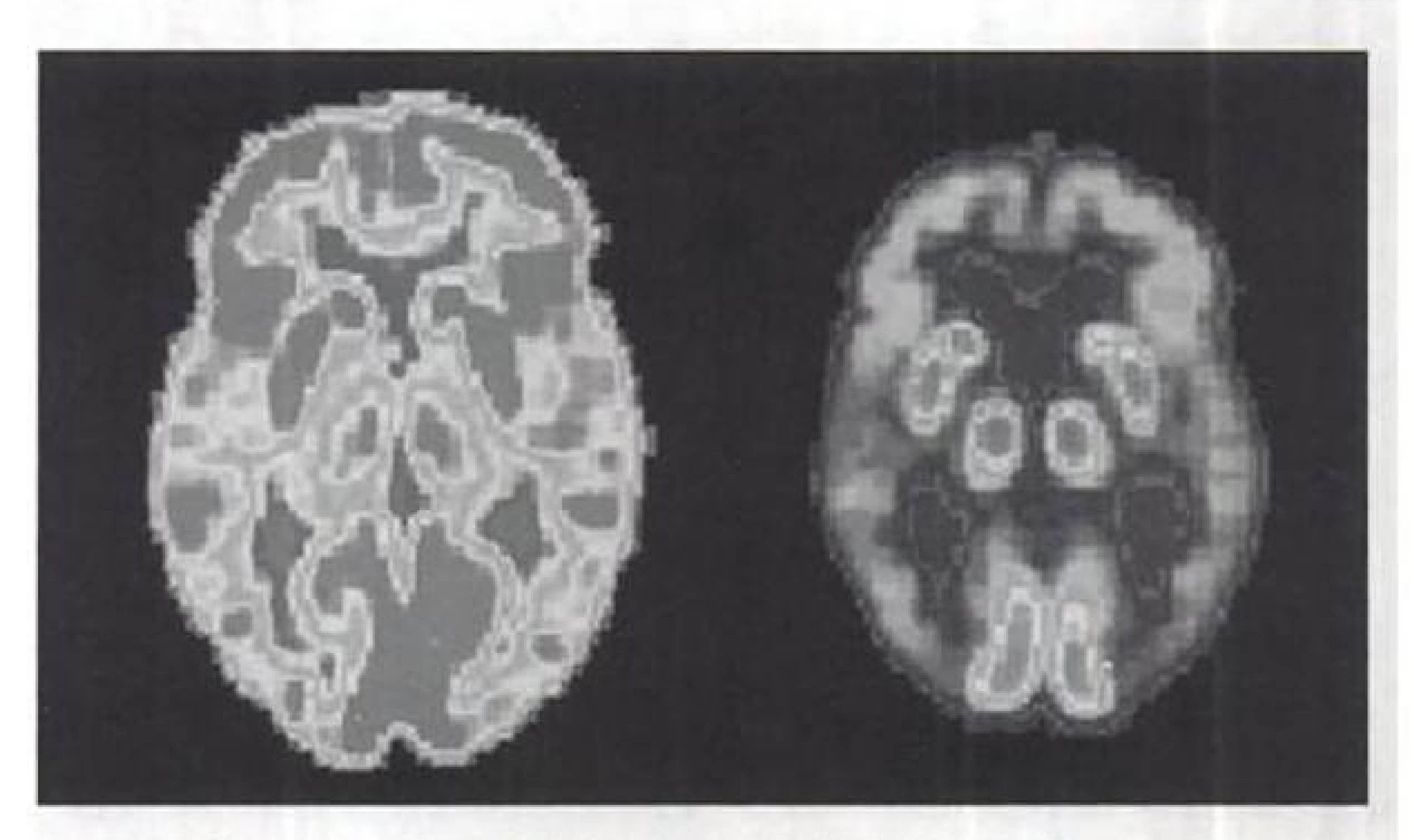


Figura 15.3 Tomografía de barrido por emisión de positrones de una persona adulta sana (*izquierda*) y de un paciente que padece el mal de Alzheimer (*derecha*). (*National Institute of Health.*)

Antes de 1955, de acuerdo con la teoría de Dirac, era de esperar que toda partícula tuviera una antipartícula correspondiente, pero antipartículas como el antiprotón y el antineutrón aún no se habían detectado experimentalmente. Debido a que la teoría relativista de Dirac tenía algunas fallas (predecía un momento magnético erróneo para el protón) así como muchos aciertos, era importante determinar si el antiprotón existía en realidad. En 1955, un equipo dirigido por Emilio Segrè (1905-1989, físico italoestadounidense) y Owen Chamberlain (nacido en 1920, físico estadounidense) utilizaron el acelerador de partículas Bevatrón de la Universidad de California en Berkeley para producir antiprotones y antineutrones. Así, establecieron con certidumbre la existencia de las antipartículas. Por su obra, Segrè y Chamberlain ganaron el premio Nobel en 1959. **Actualmente se acepta que toda partícula tiene una antipartícula correspondiente de la misma masa y espín y con carga, momento magnético y extrañeza opuestos.** (La propiedad de extrañeza se explica en la sección 15.6.) Las únicas excepciones a estas reglas para partículas y antipartículas son el fotón neutro, el pión y la eta, cada una de las cuales es su propia antipartícula.

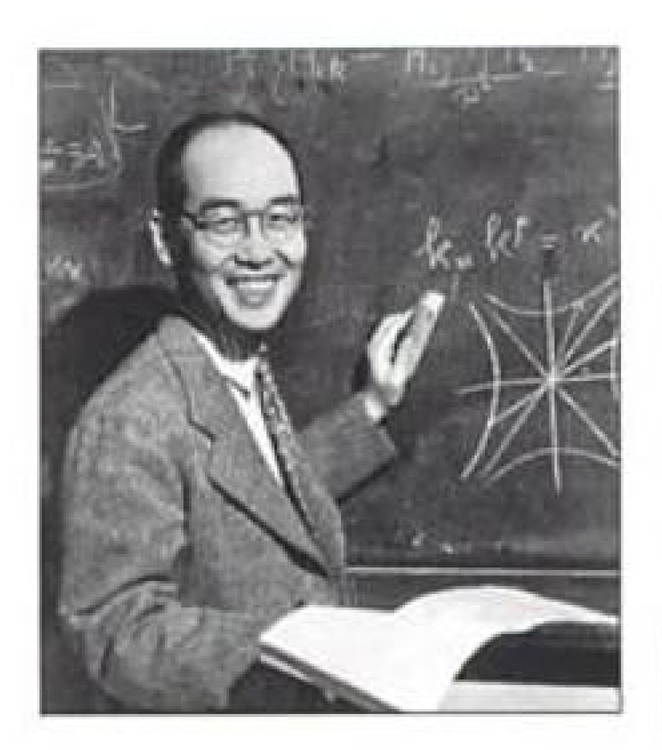
EJEMPLO 15.1 Producción de pares

Cuando un electrón y un positrón se encuentran a bajas velocidades en el espacio libre, ¿por qué se producen *dos* rayos gamma a 0.511 MeV en vez de *un* rayo gamma con una energía de 1.022 MeV?

Razonamiento Los rayos gamma son fotones, y éstos transportan cantidad de movimiento. Si sólo se produjese un fotón, no se conservaría la cantidad de movimiento, ya que la cantidad de movimiento total del sistema electrón-positrón es aproximadamente 0, mientras que un solo fotón con una energía de 1.022 MeV tendría una cantidad de movimiento muy grande. Por otra parte, los dos fotones de rayos gamma producidos se desplazan en direcciones opuestas, por lo que su cantidad de movimiento total es 0.

15.3 MESONES Y EL INICIO DE LA FÍSICA DE PARTÍCULAS

A mediados de la década de los treinta, los físicos tenían una idea muy simple de la estructura de la materia. Las unidades básicas eran el protón, el electrón y el neutrón. En la época se conocían o habían sido postuladas otras tres partículas: el fotón, el neutrino y el positrón. Estas seis partículas se consideraban los constituyentes fundamentales de la materia. Con esta visión maravillosamente simple del mundo, no obstante, no era posible responder una pregunta importante: debido a que una gran cantidad de protones próximos entre sí en un núcleo deben repelerse fuertemente unos a otros por poseer cargas iguales, ¿cuál es la naturaleza de la fuerza que mantiene unido el núcleo? Los científicos aceptaban que esta misteriosa fuerza debía ser mucho más intensa que cualquier cosa encontrada en la naturaleza hasta esa época.



Hideki Yukawa (1907-1981), físico japonés, ganó el premio Nobel en 1949 por haber predicho la existencia de los mesones. Esta fotografía de Yukawa fue tomada en 1950 en su cubículo en la Universidad de Columbia. (© *Bettman/CORBIS.*)

En 1935, el físico japonés Hideki Yukawa (1907-1981) propuso la primera teoría que explicó exitosamente la naturaleza de la fuerza nuclear, esfuerzo que después lo hizo merecedor del premio Nobel. Para comprender la teoría de Yukawa conviene recordar que en la representación moderna de las interacciones electromagnéticas, *las partículas cargadas interactúan debido al intercambio de fotones.* Yukawa usó esta idea para explicar la fuerza nuclear al proponer una nueva partícula cuyo intercambio entre nucleones en el núcleo produce la fuerza nuclear. Además, estableció que el alcance de esta fuerza es inversamente proporcional a la masa de la partícula y predijo que la masa debía ser aproximadamente 200 veces la masa del electrón. Debido a que la nueva partícula debía tener una masa entre la del electrón y la del protón, la denominó **mesón** (del griego *meso,* "medio").

En un esfuerzo por probar las predicciones de Yukawa, los físicos iniciaron una búsqueda experimental del mesón estudiando de los rayos cósmicos que penetran en la atmósfera terrestre. En 1937, Carl Anderson y sus colaboradores descubrieron una partícula de masa 106 MeV/c^2, con una masa de alrededor 207 veces la del electrón. Sin embargo, experimentos subsecuentes demostraron que la partícula interactuaba muy débilmente con la materia y que, por tanto, no podía ser portadora de la fuerza fuerte. Esta situación paradójica inspiró a varios físicos teóricos a proponer que se trataba de dos mesones con masas ligeramente distintas, idea que fue confirmada por el descubrimiento en 1947 del mesón pi (π), o simplemente **pión,** realizado por Cecil Frank Powell (1903-1969) y Giuseppe P. S. Occhialini (nacido en 1907). La partícula descubierta por Anderson en 1937, que se creía era un mesón, no es en realidad tal. En vez de ello, interviene sólo en las interacciones débil y electromagnética, y ahora se denomina **muón.**

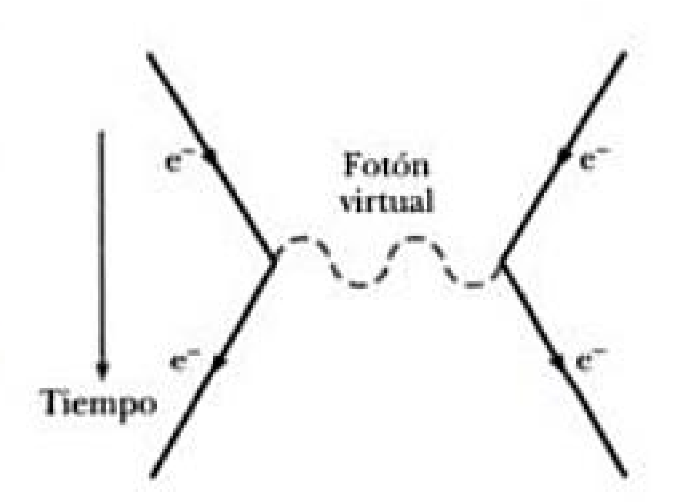
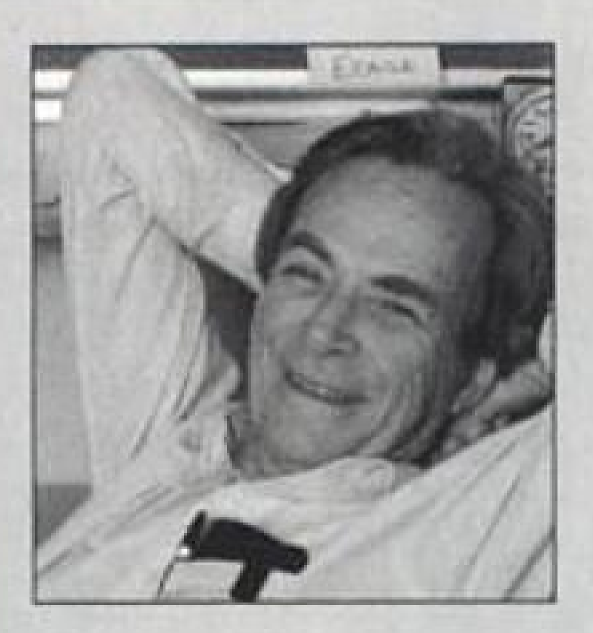


Figura 15.4 Diagrama de Feynman que muestra cómo un fotón transporta la fuerza electromagnética entre dos electrones que interactúan. La flecha de color gris muestra la dirección del tiempo creciente.

El pión, que según Yukawa era el portador de la fuerza nuclear, se presenta en tres variedades, correspondientes a tres estados de carga: π^+, π^- y π^0. Las partículas π^+ y π^- tienen masas de 139.6 MeV/c^2, y el π^0 tiene una masa de 135 MeV/c^2. Tanto los piones como los muones son partículas inestables. Por ejemplo, el π^-, cuya vida media es de 2.6×10^{-8} s, primero decae en un muón y en un antineutrino del muón. El muón, cuya vida media es de 2.2 μs, decae entonces en un electrón, en un neutrino y en un antineutrino del electrón:

$$\begin{aligned} \pi^- &\longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \\ \mu^- &\longrightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e \end{aligned} \tag{15.1}$$

La interacción entre dos partículas puede representarse en un diagrama útil denominado **diagrama de Feynman,** creado por el físico estadounidense Richard P. Feynman (1918-1988). La figura 15.4 muestra uno de estos diagramas



B I O G R A F Í A

RICHARD P. FEYNMAN
(1918–1988)

Richard Phillips Feynman fue un brillante físico teórico que compartió el premio Nobel de Física en 1956 con Julian S. Schwinger y Shinichiro Tomonaga gracias a su obra fundamental sobre los principios de la electrodinámica cuántica. Muchas de las aportaciones importantes de Feynman a la física incluyen la invención de diagramas simples para representar de manera gráfica las interacciones entre las partículas; la teoría de la interacción débil de las partículas subatómicas; un replanteamiento de la mecánica cuántica; la teoría del helio superfluido y su contribución a la enseñanza de la física a través de su excelente libro de texto en tres volúmenes *The Feynman Lectures on Physics*.

Feynman realizó su obra como estudiante de licenciatura en el MIT y se doctoró en 1942 en la Universidad de Princeton, donde estudió bajo la asesoría de John Archibald Wheeler. Durante la Segunda Guerra Mundial trabajó en el Proyecto Manhattan en Princeton y en Los Alamos, Nuevo México. Luego se integró a la Facultad en la Universidad de Cornell en 1945 y en 1950 fue designado profesor de física en el California Institute of Technology, donde permaneció el resto de su carrera.

Es bien conocido que Feynman era un apasionado por descubrir nuevas y mejores formas para plantear cada problema o, como solía decir, "darle la vuelta". A principios de su carrera estaba fascinado con la electrodinámica y desarrolló una representación intuitiva de la electrodinámica cuántica. Convencido de que el electrón no podía interactuar con su propio campo, afirmó, "ese fue el principio, y la idea me parecía tan evidente que me enamoré profundamente de ella..." Muchas veces llamado el excepcional intuicionista de nuestra época, en su discurso de aceptación del premio Nobel afirmó "a menudo, incluso en el sentido de un físico, no puedo demostrar cómo obtener todas estas reglas y ecuaciones, a partir de la termodinámica convencional... En realidad nunca me siento, como lo hizo Euclides para los geómetras griegos, y me aseguro de que todas puedan obtenerse a partir de un simple conjunto de axiomas".

En 1986 Feynman formó parte de la comisión presidencial para investigar la explosión del transbordador espacial *Challenger*. En este caso particular, realizó un sencillo experimento para los miembros de la comisión, que demostró que uno de los sellos en forma de anillos del transbordador era la probable causa del desastre. Después de colocar uno de estos sellos en una jarra de agua con hielo y exprimirlo con una abrazadera, demostró que el sello fracasó en volver a su forma natural una vez que se retiró la abrazadera.[1]

Feynman trabajó en física con un estilo acorde con su personalidad; es decir, con energía, vitalidad y humor. Las siguientes citas de algunos de sus colegas indican el gran impacto que tuvo sobre la comunidad científica.[2]

Murray Gell-Mann: "Colega brillante, vital y divertido, Feynman era un compañero estimulante (aunque a veces exasperante) en el análisis de cuestiones profundas. Intercambiábamos ideas y bromas tontas en medio de cálculos matemáticos, y en verdad nos reíamos a carcajadas".

David Pines: "Leer a Feynman es un placer y un deleite porque en sus artículos y disertaciones, como en sus conferencias, tenía una comunicación muy directa, como si el lector estuviera viéndolo deducir los resultados en el pizarrón".

David L. Goodstein: "Le gustaban los rompecabezas y los juegos. De hecho, consideraba al mundo como una suerte de juego, cuyos avances de 'comportamiento' obedecen ciertas reglas, algunas conocidas, algunas desconocidas... Encontrar sitios o circunstancias donde no funcionan las reglas e inventar nuevas reglas que sí lo hagan".

Valentine L. Telegdi: "Feynman no fue un teórico teórico, sino un físico físico y un maestro maestro".

Laurie M. Brown, una de sus estudiantes graduadas en Cornell, observó que Feynman, un hombre todo espectáculo y juguetón, fue "subvaluado al principio debido a sus modales rudos, [pero] al final triunfó gracias a su perspicacia innata, profundidad sicológica, sentido común y famoso humor... Cualquier cosa con la que Dick Feynman hubiera bromeado, su amor por la física tendía a la reverencia".

[1] La propia versión de Feynman sobre la investigación puede consultarse en *Physics Today*, 4:26, febrero de 1988.

[2] Para conocer más sobre la vida y contribuciones de Feynman, consulte los artículos en el número especial de *Physics Today*, 42, febrero de 1989. Para una narración personal de Feynman, consulte su conocido libro autobiográfico *Surely You're Joking Mr. Feynman*, Nueva York, Bantam Books, 1985, y *What Do You Care What Other People Think*, Nueva York, W. W. Norton & Co., 1987.

(© *Shelly Grazin/CORBIS.*)

En esta sección se abordaron las primeras ideas acerca de las partículas que transportan la fuerza nuclear; a saber, los piones, y los mediadores de la fuerza electromagnética, los fotones. **Las ideas actuales indican que la fuerza nuclear es descrita de manera más precisa como un efecto promedio o residual de la intensa fuerza de color entre quarks,** como se explicará en la sección 15.10. El gravitón, que es el mediador de la fuerza gravitacional, aún debe ser observado. Las partículas $W^{\pm}$ y Z^0 que median la fuerza débil fueron descubiertas en 1938 por el físico italiano Carlo Rubbia (nacido en 1934) y sus asociados, utilizando un colisionador protón-antiprotón. Rubbia y Simon van der Meer, ambos en el CERN cerca de Ginebra, Suiza, compartieron el premio Nobel de 1984 por su descubrimiento de las partículas $W^{\pm}$ y Z^0 y el desarrollo del colisionador protón-antiprotón. En este acelerador, los protones y los antiprotones que poseen una cantidad de movimiento de 270 GeV/c experimentan colisiones frontales entre sí. En algunas de estas colisiones se producen partículas $W^{\pm}$ y Z^0, que a su vez son identificadas por sus productos de desintegración.

15.4 CLASIFICACIÓN DE LAS PARTÍCULAS

Salvo las partículas de campo, todas las demás partículas pueden clasificarse en dos amplias clases, hadrones y leptones, según sus interacciones.

Hadrones

Las partículas que interactúan a través de la fuerza fuerte se denominan **hadrones.** Las dos clases de hadrones, los **mesones** y los **bariones,** se distinguen por sus masas y espines.

Todos los mesones tienen espín 0 o 1, con masas entre la del electrón y la del fotón. Se sabe que todos los mesones se desintegran finalmente en electrones, positrones, neutrinos y fotones. El pión es el mesón más ligero que se conoce; su masa es aproximadamente igual a 140 MeV/c^2 y su espín es 0. Otro es el mesón K, cuya masa es aproximadamente igual a 500 MeV/c^2 y cuyo espín es 0.

Los bariones, la segunda clase de hadrones, tienen masas iguales a, o mayores que, la masa del protón (en griego, *barión* significa "pesado") y sus espines siempre son valores semienteros impares ($\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, etc.). Los protones y los neutrones son bariones, así como muchas otras partículas. Con excepción del protón, todos los bariones se desintegran, de modo que los productos finales incluyen un protón. Por ejemplo, el barión denominado hiperión Ξ^- primero decae en el barión Λ^0 y en un π^- en aproximadamente 10^{-10} s. Luego, el Λ^0 se desintegra en un protón y en un π^- en aproximadamente 3×10^{-10} s.

Es importante observar que los hadrones son partículas compuestas, no partículas puntuales, y que poseen un tamaño mensurable aproximadamente igual a 1 fm (10^{-15} m). Los hadrones están compuestos por unidades más elementales denominadas *quarks,* que se consideran partículas verdaderamente puntuales carentes de estructura. Los mesones constan de dos quarks y los bariones, de tres. Por el momento, no obstante, el análisis de los últimos constituyentes de los hadrones se pospone a la sección 15.9, para continuar ahora con esta clasificación empírica de las partículas. En la tabla 15.2 se muestran propiedades importantes de los leptones y algunos hadrones. Los símbolos B, L_e, L_μ, L_τ y S representan los números bariónico, leptónico, electrónico, leptónico muónico, leptónico tau y la extrañeza, respectivamente, mismos que se explican en las secciones 15.5 y 15.6.

y —asociados con cada una de estas partículas—, tres neutrinos distintos: el neutrino electrónico (ν_e), el neutrino muónico (ν_μ) y el neutrino del tau (ν_τ). A continuación se clasifican los seis leptones conocidos en tres pares denominados familias:

$$\begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \mu^- \\ \nu_\mu \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \tau^- \\ \nu_\tau \end{pmatrix}$$

La tabla 15.2 muestra que el leptón tau en realidad es bastante masivo y que su masa es alrededor del doble de la masa del protón. También observe en la tabla que cada leptón tiene una antipartícula. Es bastante inesperado e interesante que los neutrinos y los antineutrinos tengan, cada uno, una helicidad distinta, o relación entre la cantidad de movimiento lineal y las direcciones del espín. El espín de un neutrino es opuesto a su dirección de desplazamiento, en tanto que el espín de un antineutrino es paralelo a su dirección de desplazamiento. Evidencias actuales sugieren que los neutrinos poseen una pequeña masa de varios eV/c^2, como se muestra en la tabla 15.2. El problema 23 investiga un interesante método de tiempo de vuelo para establecer un límite superior a la masa del neutrino. Como se verá, conocer bien la masa del neutrino posee gran importancia en los modelos físicos para la producción de energía en estrellas y en las grandes teorías de unificación de partículas elementales.

Misterio del neutrino solar y oscilaciones del neutrino

Recientemente se han efectuado mediciones concluyentes de la capacidad de los neutrinos para cambiar de un tipo o "sabor" a otro, junto con mediciones indirectas de sus masas en el Sudbury Neutrino Observatory (SNO) en Canadá y el detector Super Kamiokanda en Japón. Estos descubrimientos resolvieron un enigma que databa de hace más de 40 años y proporcionan nueva confianza a los físicos para comprender cómo se produce energía en el centro del Sol.

La tibia luz solar que recibimos en la Tierra debe estar acompañada de miles de millones de neutrinos por centímetro cuadrado por segundo. En particular, en la máquina de fusión del Sol se producen neutrinos electrónicos a tráves de reacciones típicas como

$$p + p \longrightarrow {}^2_1H + e^+ + \nu_e + 0.42 \text{ MeV}$$

y la desintegración del boro

$${}^8_5B \longrightarrow {}^8_4Be + e^+ + \nu_e + 14.6 \text{ MeV}$$

Mediciones del flujo de ν_e hechas en la década de 1960 han sido, no obstante, consistentemente misteriosas ya que *sólo se ha observado alrededor de una tercera parte del flujo esperado.* (El flujo esperado de neutrinos electrónicos provenientes del Sol fue calculado utilizando el confiable modelo estándar de las propiedades solares y la producción de energía.) Una posible explicación al misterio es que algunos ν_e han cambiado en ν_μ o ν_τ durante el recorrido del Sol a la Tierra, y que estos ν_μ o ν_τ no aparecen en detectores diseñados para identificar ν_e.

La idea básica es que el cambio de ν_e a, por ejemplo, ν_μ no es permanente, sino que sólo sería parte de una oscilación en curso entre ν_e y ν_μ. La mejor parte es que la frecuencia de oscilación depende de las masas. Así, la medición de las frecuencias de **oscilación del neutrino** podrían determinar indirectamente las masas de éste, que son pequeñas y muy difíciles de medir en forma

de manera absoluta. Por ejemplo, la conservación de la carga eléctrica requiere que la carga total antes de una reacción sea igual a la carga total después de la reacción.

En el estudio de las partículas elementales son importantes algunas leyes de conservación nuevas. En esta sección se describen dos de estas leyes, concernientes al número bariónico y al número leptónico, y más tarde en este capítulo se abordarán otras. Aunque las dos que se describen aquí carecen de un fundamento teórico, están sustentadas por abundante evidencia experimental y sirven para indicar reacciones probables, aunque no se cumplen de manera absoluta el 100% de las veces.

Número bariónico

Conservación del número bariónico

A fin de aplicar la conservación del número bariónico, se asigna un número bariónico $B = +1$ para todos los bariones, $B = -1$ para todos los antibariones, y $B = 0$ para todas las demás partículas. La **ley de conservación del número bariónico** establece que siempre *que ocurre una reacción o desintegración nuclear, la suma de los números bariónicos antes del proceso debe ser igual a la suma de los números bariónicos después del proceso.* Un planteamiento equivalente es que el número bariónico neto permanece constante en cualquier proceso.

Si el número bariónico se conserva en forma absoluta, el protón debe ser absolutamente estable. Si no fuera por la ley de conservación del número bariónico, el protón podría decaer en un positrón y en un pión neutro. Sin embargo, este decaimiento no se ha observado nunca. Hasta hoy, lo único que puede afirmarse es que la vida media del protón es de por lo menos 10^{32} años (la edad estimada del universo es de sólo 10^{10} años). En una versión reciente de una gran teoría unificada, los físicos predecían que el protón era inestable. Según esta teoría, el número bariónico no se conserva absoluta o perfectamente.

EJEMPLO 15.2 Comprobando los números bariónicos

Determine si cada una de las siguientes reacciones puede ocurrir o no con base en la ley de conservación del número bariónico.

$$(1) \qquad p + n \longrightarrow p + p + n + \overline{p}$$

$$(2) \qquad p + n \longrightarrow p + p + \overline{p}$$

Solución Para la reacción 1, recuerde que $B = +1$ para bariones y que $B = -1$ para antibariones. Por tanto, el miembro izquierdo de la reacción 1 proporciona un número bariónico total de $1 + 1 = 2$. El miembro derecho de la reacción 1 proporciona un número bariónico total de $1 + 1 + 1 + (-1) = 2$. Así, la reacción puede ocurrir, suponiendo que el protón incidente tiene energía suficiente.

El miembro izquierdo de la reacción 2 proporciona un número bariónico total de $1 + 1 = 2$. No obstante, el miembro derecho proporciona $1 + 1 + (-1) = 1$. Como el número bariónico no se conserva, la reacción no puede ocurrir o, cuando mucho, tiene una pequeña posibilidad de que ocurra.

Número leptónico

Conservación del número leptónico

Con base en observaciones de decaimientos usuales del muón y tau se llega a tres leyes de conservación que implican números leptónicos, uno para cada variedad de leptón. **La ley de conservación del número leptónico electrónico (conservación del sabor del leptón)** establece que *la suma de los números leptónico electrónicos antes de una reacción o desintegración debe ser igual a la suma de los números leptónico electrónicos después de la reacción o desintegración.*

Al electrón y al neutrino electrónico se les asigna un número leptónico positivo, $L_e = +1$; a los antileptones e^+ y $\overline{\nu}_e$ se les asigna un número leptónico

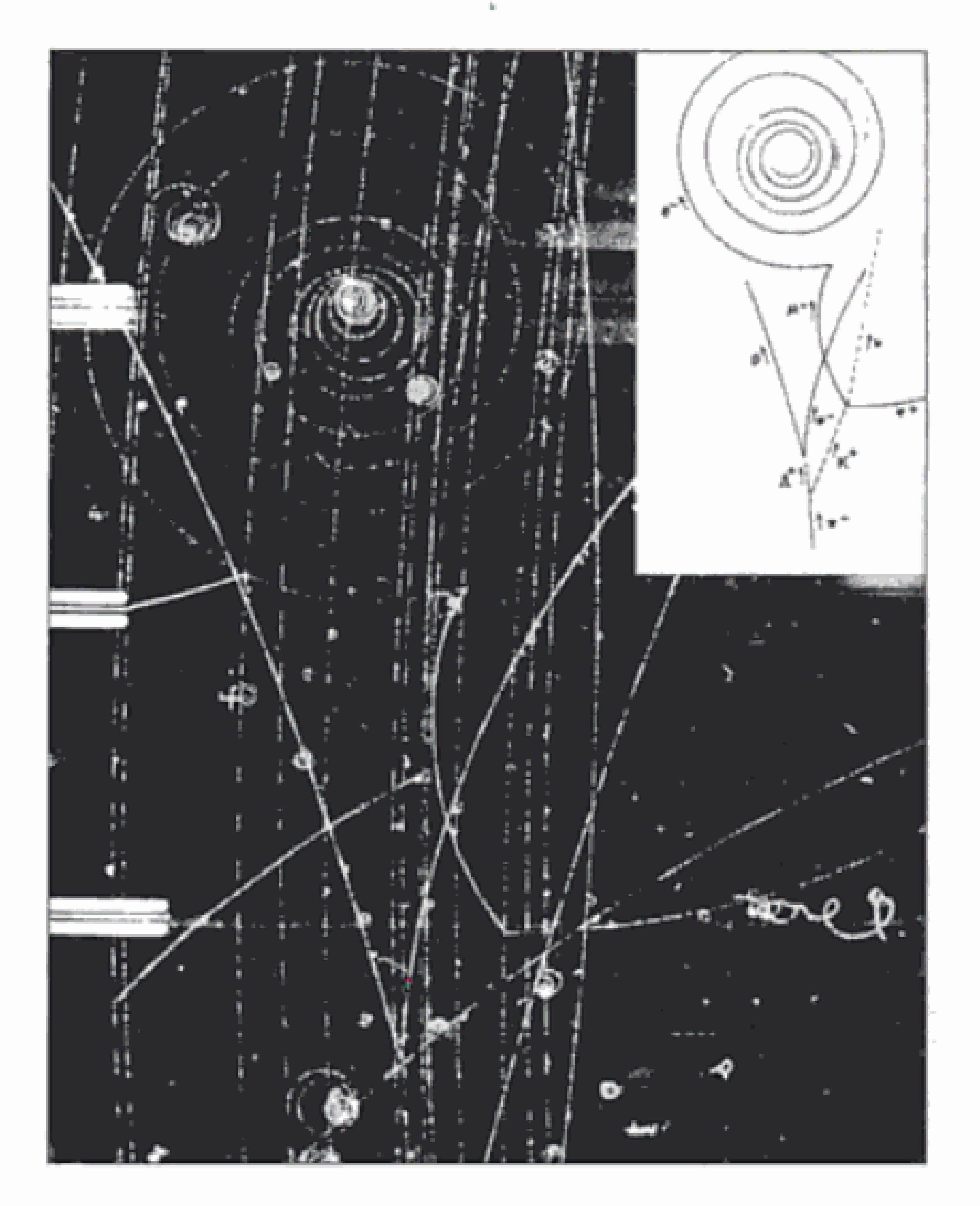


Figura 15.6 Esta fotografía de una cámara de burbujas muestra varios eventos, y el recuadro es un dibujo de rastros identificados. Las partículas extrañas Λ^0 y K^0 se forman en la parte inferior, en tanto que la π^- interactúa con un protón según $\pi^- + p^+ \rightarrow \Lambda^0 + K^0$. (Observe que las partículas neutras no dejan rastro, como indican las líneas discontinuas.) Luego, las partículas Λ^0 y K^0 se desintegran según $\Lambda^0 \rightarrow \pi^- + p^+$ y $K^0 \rightarrow \pi^+ + \mu^- + \overline{\nu}_\mu$. (*Cortesía del Lawrence Berkeley Laboratory, Universidad de California, servicios fotográficos.*)

Por otra parte, la reacción $\pi^- + p \longrightarrow K^0 + n$ jamás ha ocurrido, aun cuando no se ha violado ninguna ley de conservación conocida y la energía del pión era suficiente para iniciar la reacción.

El segundo rasgo característico de las partículas extrañas es que aunque se producen a gran ritmo debido a la interacción fuerte, no se desintegran en partículas que interactúan a través de la fuerza fuerte a un ritmo muy elevado. En vez de ello, se desintegran muy lentamente, lo cual es característico de la interacción débil, como se muestra en la tabla 15.1. Sus vidas medias varían de 10^{-10} s a 10^{-8} s; la mayor parte de las demás partículas que interactúan a través de la fuerza fuerte poseen tiempos de vida del orden de 10^{-20} s y menos.

Para codificar estas propiedades poco comunes de las partículas extrañas, se introdujo una ley denominada conservación de la extrañeza con un nuevo número cuántico S, denominado **extrañeza.** En la tabla 15.2 se proporcionan los números de extrañeza de algunas partículas. La producción de partículas extrañas en pares se explica al asignar $S = +1$ a una de las partículas y $S = -1$ a la otra. A todas las partículas no extrañas se les asigna una extrañeza $S = 0$.

Conservación de la extrañeza

La **ley de conservación de la extrañeza** establece que *siempre que ocurre una reacción o desintegración nuclear, la suma de los números de extrañeza antes del proceso debe ser igual a la suma de los números de extrañeza después del proceso.*

La desintegración lenta de las partículas extrañas puede explicarse si se supone que las interacciones fuerte y electromagnética obedecen la ley de conservación de la extrañeza pero que la interacción débil no lo hace. Debido a que la reacción de decaimiento supone la pérdida de una partícula extraña, se viola la conservación de la extrañeza y se procede lentamente a través de la interacción débil.

EJEMPLO 15.4 ¿Se conserva la extrañeza?

a) Determine si la siguiente reacción satisface la conservación de la extrañeza.

$$\pi^0 + \mathrm{n} \longrightarrow \mathrm{K}^+ + \Sigma^-$$

Solución La extrañeza del estado inicial es $S = 0 + 0 = 0$. Debido a que la extrañeza del K^+ es $S = +1$, y a que la extrañeza del Σ^- es $S = -1$, la extrañeza del estado final es $+1 - 1 = 0$. Así, la extrañeza se conserva y la reacción es permitida.

b) Demuestre que la siguiente reacción no conserva la extrañeza:

$$\pi^- + \mathrm{p} \longrightarrow \pi^- + \Sigma^+$$

Solución La extrañeza del estado inicial es $S = 0 + 0 = 0$, y la extrañeza del estado final es $S = 0 + (-1) = -1$. Por tanto, no se conserva la extrañeza.

Ejercicio 2 Demuestre que la reacción $\mathrm{p} + \pi^- \longrightarrow \mathrm{K}^0 + \Lambda^0$ cumple la ley de conservación de la extrañeza.

15.7 ¿CÓMO SE PRODUCEN LAS PARTÍCULAS ELEMENTALES Y CÓMO SE MIDEN LAS PROPIEDADES DE LAS PARTÍCULAS?

Al analizar la disposición un tanto desordenada de los elementos de la tabla 15.2 se tiene la necesidad de posarse sobre terreno firme. Es natural preguntarse acerca de una partícula que existe durante 10^{-20} s y tiene una masa de 1 192 MeV/c^2. ¿Cómo es posible detectar una partícula que sólo existe durante 10^{-20} s? Además, ¿cómo es posible medir su masa? Si un atributo normal de una partícula es alguna suerte de permanencia o estabilidad, ¿en qué sentido una entidad etérea que existe durante 10^{-20} s es una partícula? En esta sección se intenta contestar tales preguntas y se explica cómo se producen las partículas elementales y cómo se miden sus propiedades.

Las partículas elementales, de las cuales la mayor parte son inestables y se presentan naturalmente en forma ocasional, son creadas en abundancia por el ser humano en colisiones de partículas a alta energía con un blanco idóneo. Debido a que se requieren haces de partículas incidentes a muy alta energía, el haz incidente suele estar conformado por partículas cargadas estables, como electrones o protones, ya que se requiere un tiempo considerable para acelerar las partículas hasta altas energías con campos electromagnéticos. De manera semejante, los blancos deben ser simples y estables, y el más simple de los blancos, el hidrógeno, sirve de manera aceptable tanto como blanco como detector. En una cámara de burbujas de hidrógeno líquido, que básicamente



"Partículas, partículas, partículas."

(© *Sydney Harris*)

velocidad de la luz. Se llega a este resultado al suponer que una partícula en desintegración recorre 1 micra en el laboratorio a una velocidad de 0.99 c, lo cual lleva a tiempo de vida en el laboratorio de $\tau_{\text{lab}} = 10^{-6}\ \text{m}/0.99c \approx 0.33 \times 10^{-14}$ s. Ahora es cuando la relatividad es útil. Debido a que el tiempo de vida propio, medido en el sistema de referencia en reposo de la partícula en desintegración, es más breve que τ_{lab} por un factor de $\sqrt{1 - v^2/c^2}$, en realidad es posible medir tiempos de vida de:

$$\tau_{\text{propio}} = \tau_{\text{lab}}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = (0.33 \times 10^{-14}\ \text{s})\sqrt{1 - \frac{(0.99c)^2}{c^2}} = 4 \times 10^{-16}\ \text{s}$$

Desafortunadamente, aun con ayuda de Einstein, nos encontramos varios órdenes de magnitud lejos de los tiempos de vida mínimos de los hadrones de 10^{-23} s con los mejores esfuerzos del método de la longitud de la traza. ¿Cómo, entonces, es posible detectar la presencia de partículas que existen durante un breve lapso de 10^{-23} s? Como se verá dentro de poco, las masas, los tiempos de vida y la misma existencia de estas partículas tan poco duraderas, denominadas **partículas de resonancia,** pueden inferirse a partir de picos (resonancias) en las gráficas de la sección transversal contra la energía que describen sus productos de desintegración.

A continuación se abordará esto con mayor detalle con el caso de la partícula de resonancia denominada delta más (Δ^+), cuya masa es de 1 231 MeV/c^2 y su tiempo de vida de aproximadamente 6×10^{-24} s. La Δ^+ se produce en la reacción

$$e^- + p \longrightarrow e^- + \Delta^+ \tag{15.4}$$

que es seguida en 6×10^{-24} s por la desintegración

$$\Delta^+ \longrightarrow \pi^+ + n \tag{15.5}$$

Debido a que el tiempo de vida de la Δ^+ es tan breve, no deja una traza mensurable y parecería imposible distinguir las reacciones dadas en las ecuaciones 15.4 y 15.5 a partir de la reacción directa neta donde no se produce Δ^+:

$$e^- + p \longrightarrow e^- + \pi^+ + n \tag{15.6}$$

De hecho, es posible afirmar si Δ^+ se formó midiendo la cantidad de movimiento y la energía de los posibles productos de desintegración (pión y neutrón) y usando la conservación de la cantidad de movimiento y energía para ver si estos valores se combinan a fin de proporcionar una Δ^+ de masa igual a 1 231 MeV/c^2.

Para comprender esto en detalle, considere la desintegración de la Δ^+ que se muestra en la figura 15.7. La energía y la cantidad de movimiento de la Δ^+ deben cumplir la ecuación

$$E_\Delta^2 = (p_\Delta c)^2 + (m_\Delta c^2)^2$$

o bien,

$$m_\Delta c^2 = \sqrt{E_\Delta^2 - (p_\Delta c)^2} \tag{15.7}$$

donde m_Δ es la masa de la Δ^+. Aunque no es posible medir de manera directa E_Δ y $\mathbf{p}_\Delta$, debido a que la partícula delta no deja rastro, es posible medir directamente las energías y cantidades de movimiento de las partículas salientes, E_π, $\mathbf{p}_\pi$, E_n y $\mathbf{p}_n$. Al usar la conservación de la cantidad de movimiento y de la energía, entonces es posible encontrar una expresión para $m_\Delta c^2$ en términos de estas cantidades medidas. Así, se tiene $E_\Delta = E_\pi + E_n$ y $\mathbf{p}_\Delta = \mathbf{p}_\pi + \mathbf{p}_n$, y al sustituir en la ecuación 15.7,

$$m_\Delta c^2 = \sqrt{(E_\pi + E_n)^2 - (\mathbf{p}_\pi + \mathbf{p}_n)^2 c^2} \tag{15.8}$$

La ecuación 15.8 se cumple para todos los eventos en que realmente se haya formado y desintegrado una partícula Δ^+. Es decir, para muchos valores medidos diferentes de E_π, $\mathbf{p}_\pi$, E_n y $\mathbf{p}_n$ correspondientes a muchos experimentos repetidos, siempre se encuentra el mismo valor de la cantidad $m_\Delta c^2 = 1\,231$ MeV dentro de la incertidumbre experimental *si está implicada la desintegración de una* Δ^+. Por otra parte, si no está implicada ninguna Δ^+ y ocurre la reacción directa $e^- + p \rightarrow e^- + \pi^+ + n$, entonces $\sqrt{(E_\pi + E_n)^2 - (\mathbf{p}_\pi + \mathbf{p}_n)^2 c^2}$ no es igual a 1 231 MeV, sino que varía sobre un amplio intervalo de valores, algunos mayores y otros menores que $m_\Delta c^2$, a medida que se repite el experimento. El método acostumbrado para demostrar la existencia de una partícula de resonancia implica el cálculo de la cantidad $Z = \sqrt{(E_\pi + E_n)^2 - (\mathbf{p}_\pi + \mathbf{p}_n)^2 c^2}$

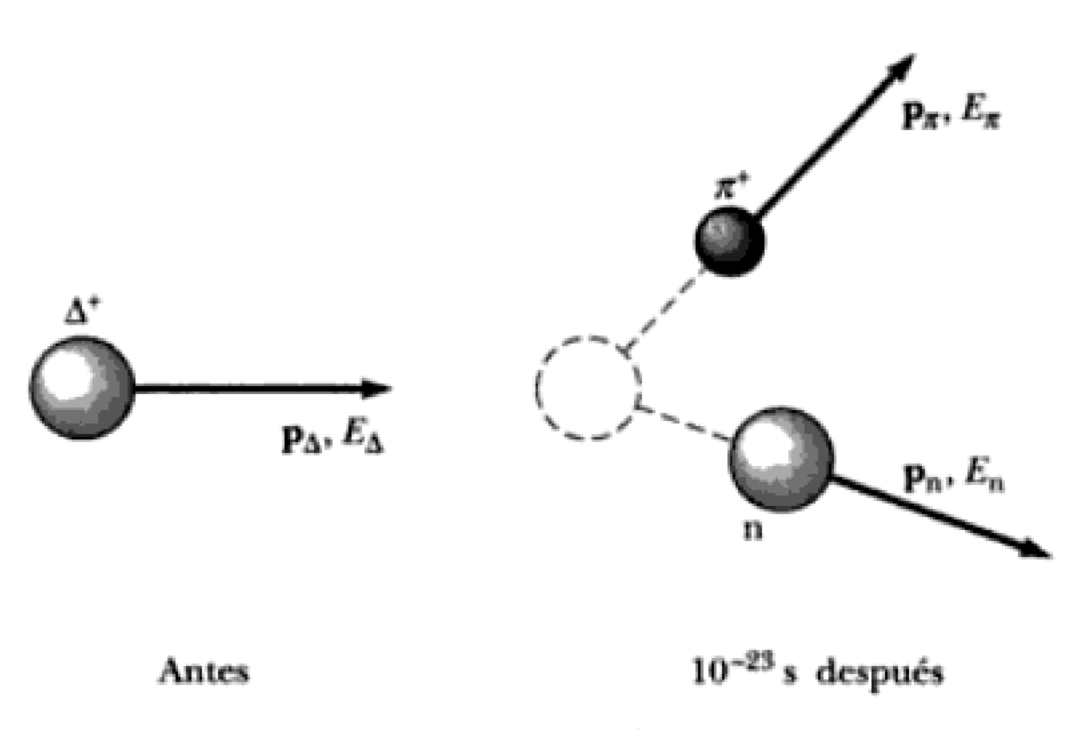


Figura 15.7 Desintegración de una partícula Δ^+ en un pión positivo y en un neutrón.

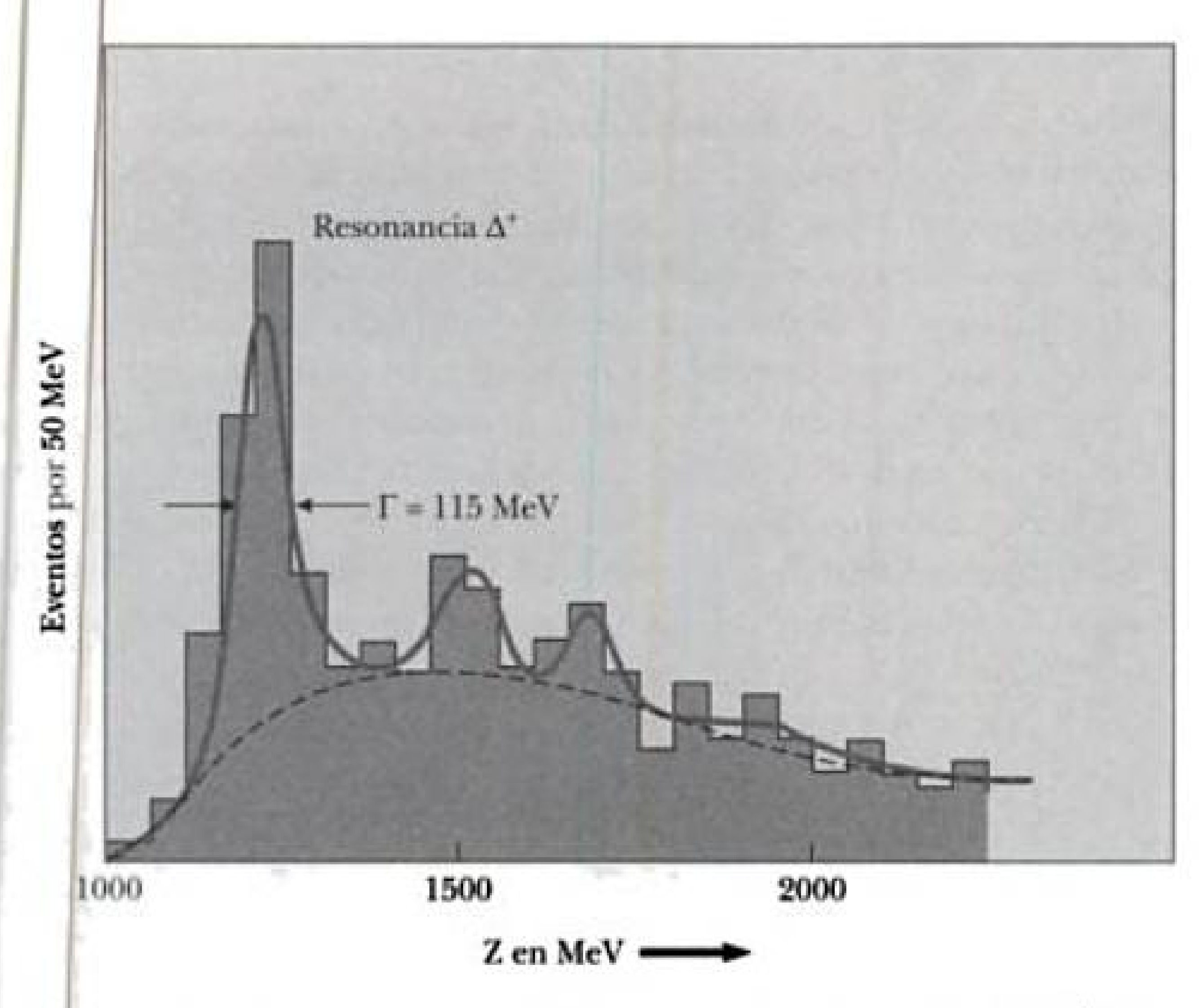


Figura 15.8 Evidencia experimental de la existencia de la partícula Δ^+. El pico pronunciado cerca de 1 230 MeV fue producido por los eventos en que una Δ^+ se formó y rápidamente se desintegró en una π^+ y en un neutrón.

para un gran número de eventos en los que se producen un π^+ y un neutrón, y luego elaborando un histograma de estos eventos. Al graficar el número de eventos con un valor dado de Z contra este valor de Z, se obtiene una curva de lenta variación con picos agudos superpuestos, donde los picos demuestran la existencia de partículas de resonancia. En la figura 15.8 se muestra uno de estos histogramas experimentales para la partícula Δ^+. El fondo amplio (curva discontinua) es producto de eventos directos en los que no se crea ninguna Δ^+; el pico agudo próximo a $Z = 1230$ MeV, que contiene muchos eventos, fue producido por todos los eventos en los que se formó una Δ^+ que se desintegró en un pión y en neutrón con las energías y cantidades de movimiento justas para constituir una partícula delta. En la figura 15.8 también pueden observarse los picos correspondientes a otras dos partículas de resonancia de mayor masa.

Histogramas como el de la figura 15.8 pueden indicar no sólo la masa de una partícula de corta duración, sino también el tiempo de vida de la partícula a partir de todo el ancho a la mitad del máximo del pico de resonancia, denotado por Γ en la figura. Debido a que Γ tiene el doble de incertidumbre en energía de la delta, ($\Gamma = 2\Delta E$), es posible aplicar la relación de incertidumbre energía-tiempo, $\Delta E\,\Delta t \approx \hbar/2$, para inferir el tiempo de vida de la delta, Δt:

$$\Delta t \approx \frac{\hbar}{2\Delta E} = \frac{\hbar}{\Gamma} \tag{15.9}$$

El ancho medido de $\Gamma = 115$ MeV conduce a un valor para el tiempo de vida de la partícula delta:

$$\Delta t \approx \frac{\hbar}{\Gamma} = \frac{6.6 \times 10^{-16}\ \text{eV}\cdot\text{s}}{115 \times 10^{6}\ \text{eV}} = 5.7 \times 10^{-24}\ \text{s}$$

En este tiempo de vida increíblemente breve, una partícula delta que se desplaza a la máxima velocidad posible de c sólo recorre alrededor de 10^{-15} m, o aproximadamente un diámetro nuclear.

Consideraciones energéticas en la producción de partículas

Es irónico que la rama más sofisticada de la física, conocida como física de partículas elementales, dependa de manera tan fundamental del más primitivo de los métodos experimentales: ¡hacer que una partícula incidente que se mueve a velocidad relativista se estrelle contra una partícula blanco estacionaria y observar cuáles fragmentos se despedazan! Sin embargo, este proceso constituye el meollo de la física experimental de las partículas, y en esta sección se determinará la energía crítica necesaria para la producción de nuevas partículas en una colisión. Debido a que la energía necesaria para producir nuevas partículas proviene de la energía cinética de la partícula incidente, y las energías de las partículas incidentes son bastante altas (el Fermi National Laboratory produce protones a 1 000 GeV), para el cálculo de estas energías críticas es necesario usar ecuaciones relativistas.

Considere el proceso específico de producción de partículas

$$m_1 + m_2 \longrightarrow m_3 + m_4 + m_5 \tag{15.10}$$

Aquí, m_1 es la masa de la partícula incidente, m_2 es la masa de la partícula blanco que está en reposo en el laboratorio, y m_3, m_4 y m_5 son las masas de las partículas producto. En la figura 15.9a se muestra una de estas reacciones de partículas en el marco de referencia del laboratorio. Las energías mostradas en la figura 15.9, E_1, E_2, etc., son energías totales (energía cinética + energía en reposo) y los momentos se identifican como $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, etc. A primera vista podría parecer que la energía inicial total de m_1 y m_2 $E_1 + E_2$ podría convertirse

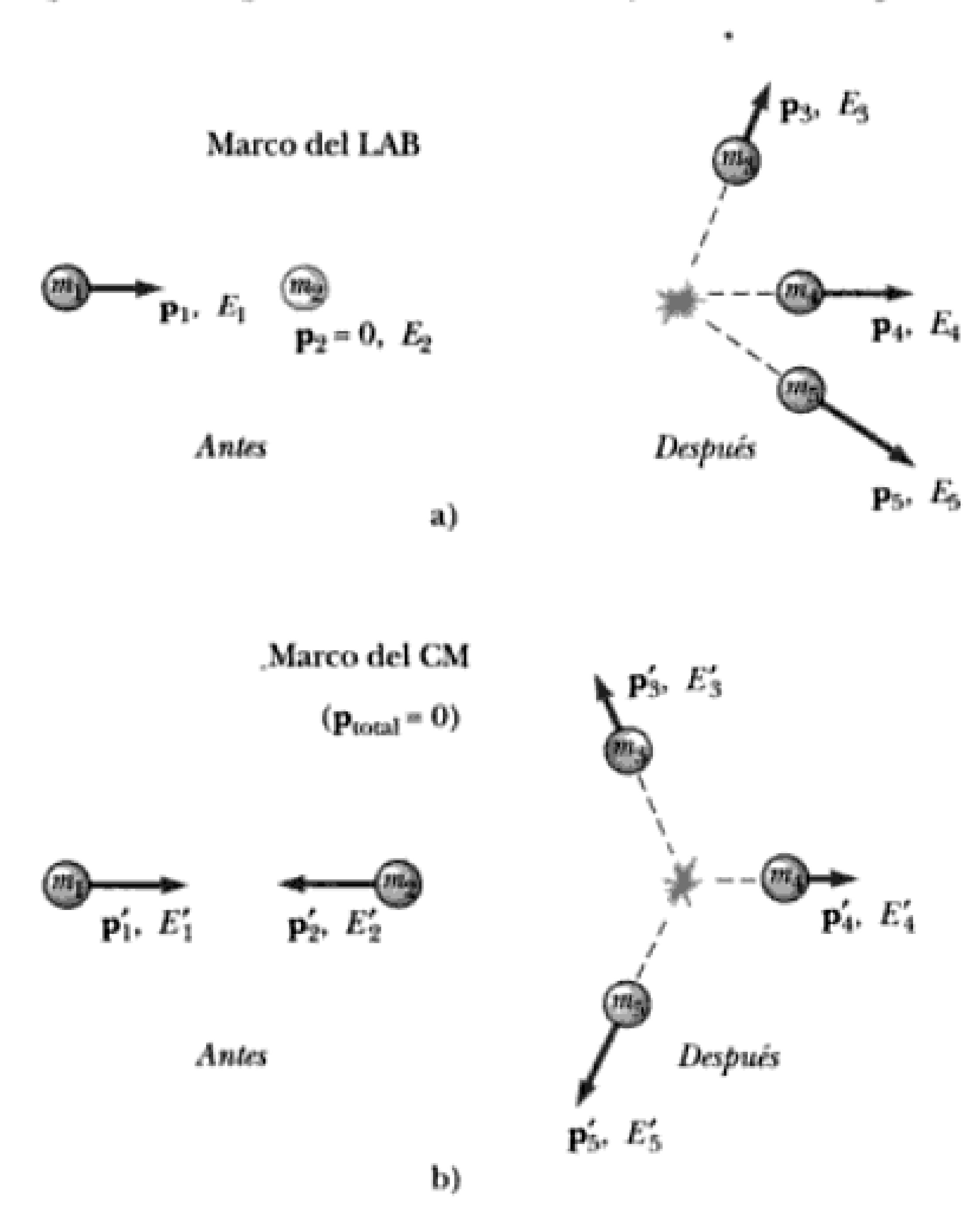


Figura 15.9 a) La reacción $m_1 + m_2 \rightarrow m_3 + m_4 + m_5$ vista en el sistema del laboratorio, donde m_2 está inicialmente en reposo y las energías son energías relativistas totales (energía cinética más energía en reposo). b) La misma reacción vista desde el sistema del centro de masa (CM), donde la cantidad de movimiento total siempre es igual a cero.

por completo en energía en reposo de las partículas 3, 4 y 5. No obstante, como ya se ha visto en el cálculo de los umbrales de la reacción nuclear en el capítulo 14, parte de la energía inicial debe transformarse en energía de movimiento de las partículas producto a fin de conservar la cantidad de movimiento en la colisión. Esto significa que no toda la energía inicial puede dedicarse a la creación de nuevas masas. La cuestión es encontrar cuánto de la energía inicial puede dedicarse a la creación de las masas m_3, m_4 y m_5. Es decir, **se desea calcular la energía cinética crítica o mínima $K_{\text{crítica}}$** que debe poseer m_1 para crear partículas con masas m_3, m_4 y m_5 y también conservar la cantidad de movimiento.

Una pista importante para encontrar $K_{\text{crítica}}$ comprender que si de alguna forma fuese posible arreglárselas para contar con una cantidad de movimiento inicial igual a cero, toda la energía inicial se convertiría en nuevas partículas. Lo que puede hacerse es despejar $K_{\text{crítica}}$ en el sistema en que la cantidad de movimiento inicial es cero, el sistema del centro de masa, y luego transformar de vuelta este resultado en el sistema en que realmente se llevó a cabo el experimento; el sistema del laboratorio. A continuación se explica cómo es esta cuestión.

En la figura 15.9b se muestra la misma reacción que en la 15.9a, aunque vista desde el sistema del centro de masa (CM), donde, por definición, la cantidad de movimiento total es siempre cero. Así, en la figura 15.9 m_1 y m_2 tienen cantidades de movimiento iguales y opuestas, y el vector suma de las cantidades de movimiento de m_3, m_4 y m_5 es cero. En realidad, la figura 15.9b muestra el caso de una partícula incidente cuya energía es superior a la energía crítica. Un instante de reflexión revela que cuando m_1 tiene la energía mínima, o crítica en el sistema CM, toda la energía inicial, $E_1' + E_2'$, debe transformarse en las masas de las partículas 3, 4 y 5. Esto ocurre cuando las partículas producto se crean en reposo en el sistema CM, lo que ahora es posible porque en este sistema la cantidad de movimiento total es cero. En la figura 15.10 se muestra la reacción $m_1 + m_2 \rightarrow m_3 + m_4 + m_5$ en el sistema CM cuando m_1 tiene la energía cinética crítica y m_3, m_4 y m_5 se crean en reposo.

A fin de calcular una expresión numérica para $K_{\text{crítica}}$, se utiliza la cantidad invariante $E^2 - p^2c^2$, introducida en el capítulo 2. Recuerde que $E^2 - p^2c^2$ se denomina invariante porque posee el mismo valor numérico para un sistema de partículas *en cualquier sistema de referencia inercial* (consulte el problema 16 del capítulo 2). Al aplicar la invariancia de $E^2 - p^2c^2$ a los sistemas CM y de laboratorio se tiene, para el instante antes de la colisión,

$$E_{\text{CM}}^2 - p_{\text{CM}}^2c^2 = E_{\text{lab}}^2 - p_{\text{lab}}^2c^2 \tag{15.11}$$

Aquí, CM y E_{lab} representan la sumas de las energías de las partículas m_1 y m_2 en los sistemas CM y del laboratorio, respectivamente. De manera semejante,

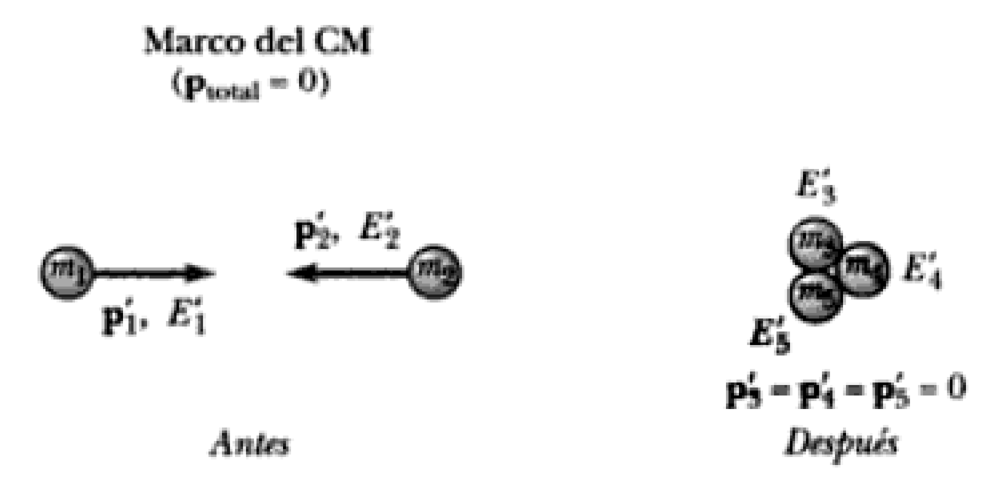


Figura 15.10 La reacción $m_1 + m_2 \rightarrow m_3 + m_4 + m_5$ en el sistema CM cuando m_1 posee la energía cinética crítica necesaria para producir m_3, m_4 y m_5. Para la condición crítica, m_3, m_4 y m_5 se crean en reposo.

Ejercicio 3 Debido a que entre protón y protón, neutrón y neutrón y protón y neutrón existen fuerzas nucleares igualmente intensas, sería de esperar que el pión se presentase en tres estados de carga distintos, $+e$, $-e$ y 0, como de hecho es el caso. Existen tres piones diferentes —π^+, π^- y π^0— con masas $m_{\pi^-} = 139.6\ \text{MeV}/c^2$, $m_{\pi^+} = 139.6\ \text{MeV}/c^2$ y $m_{\pi 0} = 135\ \text{MeV}/c^2$. Dos reacciones que implican la producción de π^+ y π^- son

$$p + p \longrightarrow p + n + \pi^+ \tag{15.18}$$

$$p + p \longrightarrow p + p + \pi^+ + \pi^- \tag{15.19}$$

Calcule la energía crítica para estas reacciones.

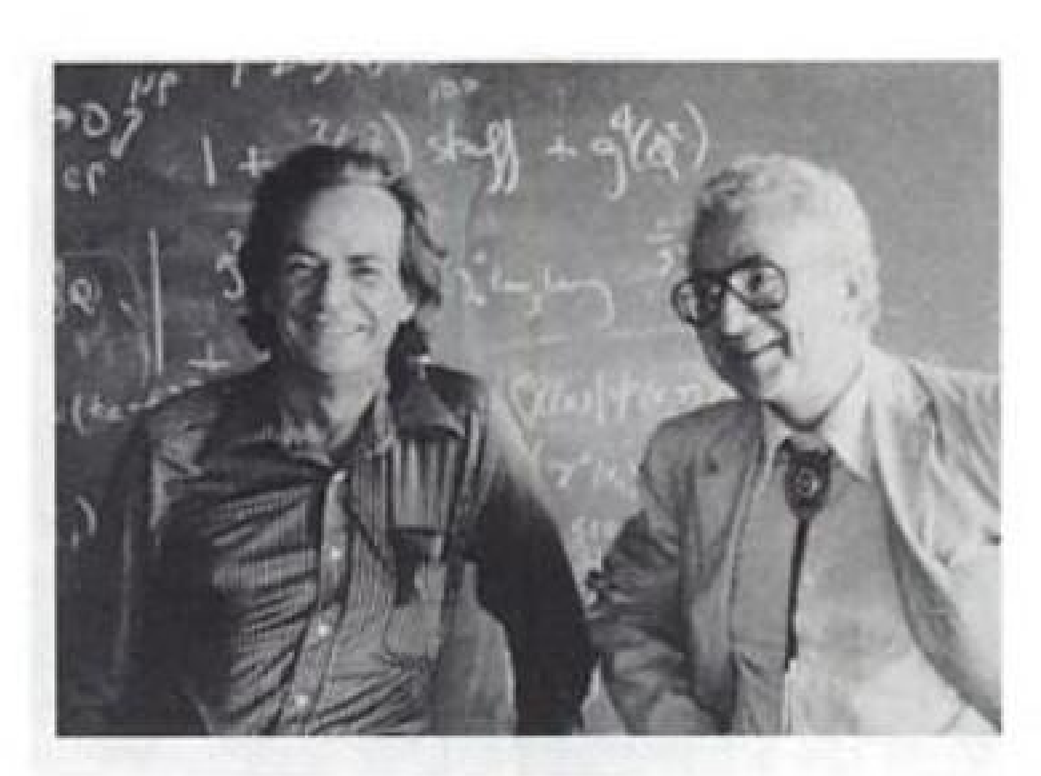
Respuestas $K_{\text{crítica}} = 292$ MeV para la ecuación 15.18; $K_{\text{crítica}} = 600$ MeV para la ecuación 15.19.

15.8 CAMINO ÓCTUPLE

Una de las herramientas que utilizan los científicos es la detección de patrones en los datos, mismos que contribuyen a comprender la naturaleza. Uno de los mejores ejemplos del uso de esta herramienta es el desarrollo de la tabla periódica, que proporciona una comprensión fundamental del comportamiento químico de los elementos. La tabla periódica explica cómo más de 100 elementos pueden formarse a partir de tres partículas elementales: el electrón, el protón y el neutrón. La tabla de los núclidos contiene cientos de éstos, aunque todos pueden formarse a partir de protones y neutrones.

El número de partículas y resonancias observadas por los físicos también es del orden de cientos. ¿Es posible que exista un pequeño número de entes a partir de los cuales formar todas éstas? se explorará la historia de la búsqueda de patrones entre las partículas al considerar como sugerencia el éxito de la tabla periódica y la tabla de los núclidos.

Se han propuesto muchos esquemas de clasificación para agrupar a las partículas en familias. Considere, por ejemplo, los bariones enumerados en la tabla 15.2 que tienen espines iguales a $\frac{1}{2}$: p, n, Λ^0, Σ^+, Σ^0, Σ^-, Ξ^0 y Ξ^-. Si se grafica la



Los físicos estadounidenses Richard Feynman (*izquierda*) y Murray Gell-Mann (*derecha*) fueron galardonados con el premio Nobel en 1965 y 1969, respectivamente, por sus estudios teóricos sobre partículas subatómicas. (*Cortesía de Michael R. Dressler.*)

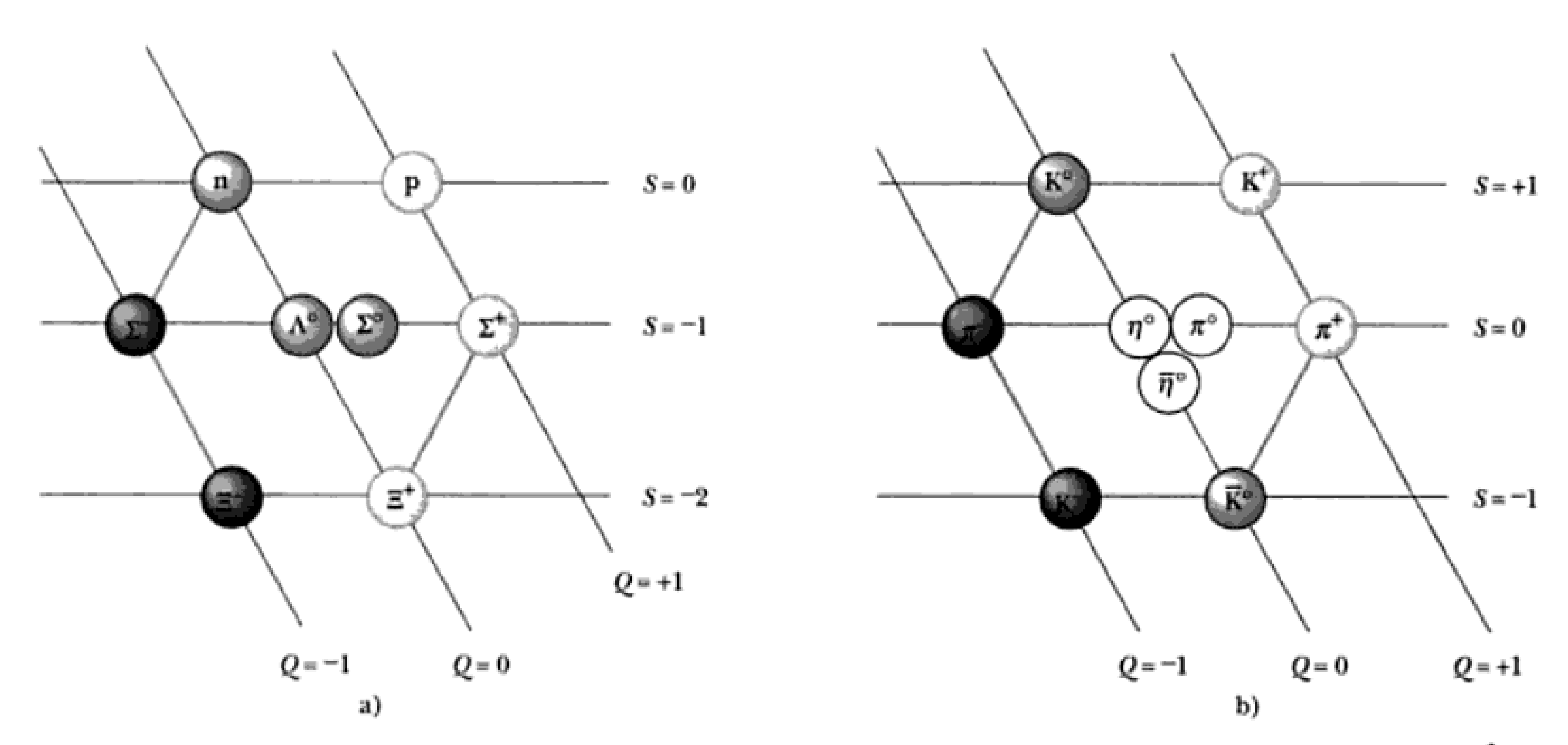


Figura 15.11 a) El patrón hexagonal óctuple para los ocho bariones con espín $\frac{1}{2}$. En esta gráfica de la extrañeza contra la carga se utilizan un eje inclinado para el número de carga Q y un eje horizontal para los valores (S) de la extrañeza. b) Patrón óctuple para los nueve mesones con espín 0.

extrañeza contra la carga para estos bariones usando un sistema coordenado inclinado, como el de la figura 15.11, se observa un patrón fascinante: seis de los bariones forman un hexágono, y los dos restantes se encuentran en el centro de éste.

Como segundo ejemplo, considere los siguientes nueve mesones con espín cero enumerados en la tabla 15.2: π^+, π^0, π^-, K^+, K^0, K^-, η, η' y la antipartícula $\overline{K}^0$. La figura 15.11b muestra la gráfica de la extrañeza contra la carga para esta familia. De nuevo se presenta un patrón hexagonal. En este caso, cada partícula del perímetro del hexágono está en una posición opuesta a su antipartícula, y las tres restantes (que constituyen su propia antipartícula) están en el centro del hexágono. Estos patrones y patrones geométricos relacionados fueron desarrollados de manera independiente en 1961 por Murray Gell-Mann y Yuval Ne'eman (nacido en 1925). Gell-Mann denominó a estos patrones **forma óctuple,** en analogía con la trayectoria óctuple similar en el nirvana del budismo.

Pueden mostrarse grupos de bariones y mesones en muchos otros patrones simétricos en el sistema de referencia de la forma óctuple. Por ejemplo, la familia de bariones con espín $\frac{3}{2}$ conocida en 1961 contenía nueve partículas dispuestas en un patrón como el de los bolos en un boliche, como en la figura 15.12. (Las partículas Σ^{*+}, Σ^{*0}, Σ^{*-}, Ξ^{*0} y Ξ^{*-} son estados excitados de las partículas Σ^+, Σ^0, Σ^-, Ξ^0 y Ξ^-.) En estos estados de energía superior, los espines de los tres quarks que constituyen la partícula están alineados de modo que el espín total de la partícula es $\frac{3}{2}$. Cuando se propuso este patrón, apareció en él un punto vacío (en la posición inferior) correspondiente a una partícula que jamás había sido observada. Gell-Mann predijo que la partícula faltante, que denominó omega menos (Ω^-) debía tener espín $\frac{3}{2}$, carga -1, extrañeza -3 y energía en reposo aproximadamente igual a 1 680 MeV. Poco después, en 1964, científicos en el Brookhaven National Laboratory descubrieron la partícula faltante mediante el análisis cuidadoso de fotografías de una cámara de burbujas (figura 15.13) y confirmaron todas sus propiedades predichas.

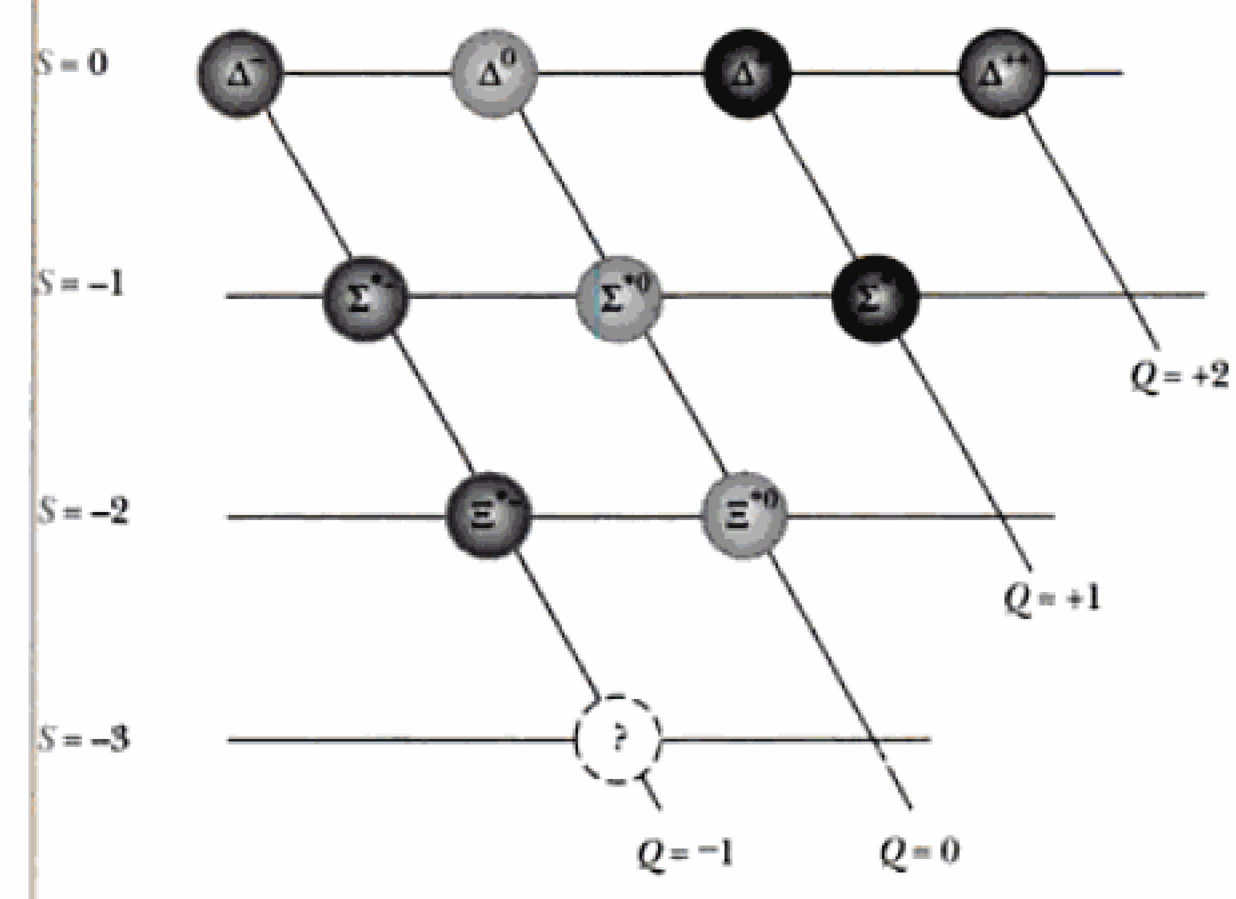


Figura 15.12 Patrón para los bariones de masa superior y espín $\frac{3}{2}$, conocido en la época en que se propuso el patrón. Las tres partículas Σ^* y las dos partículas Ξ^* son estados excitados de las partículas correspondientes con espín $\frac{1}{2}$ en la figura 15.11. Estos estados excitados poseen mayor masa y espín $\frac{3}{2}$. La ausencia de una partícula en la posición inferior constituyó la evidencia de una nueva partícula por descubrir, la Ω^-.

La predicción de la partícula faltante en la forma óctuple tiene mucho en común con la predicción de los elementos faltantes en la tabla periódica. Siempre que aparece un vacío en un patrón organizado de información, los experimentadores cuentan con una guía para sus investigaciones.

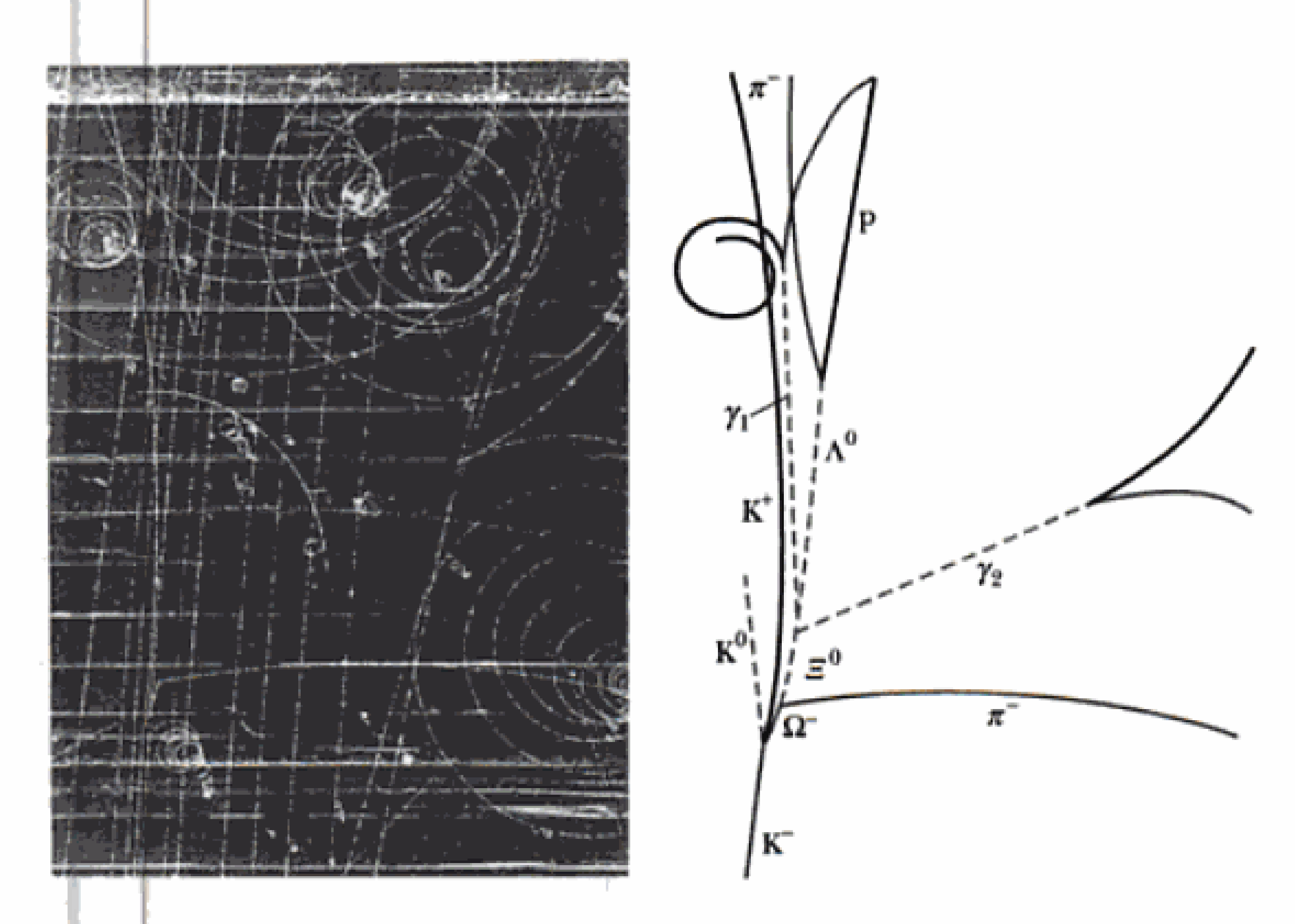


Figura 15.13 Descubrimiento de la partícula Ω^-. La fotografía de la izquierda muestra los rastros originales de la cámara de burbujas. En el dibujo de la derecha se aíslan los rastros de los eventos importantes. La partícula K^- en la parte inferior choca contra un protón para producir la primera partícula Ω^- detectada más una K^0 y una K^+. (*Cortesía del Brookhaven National Laboratory.*)

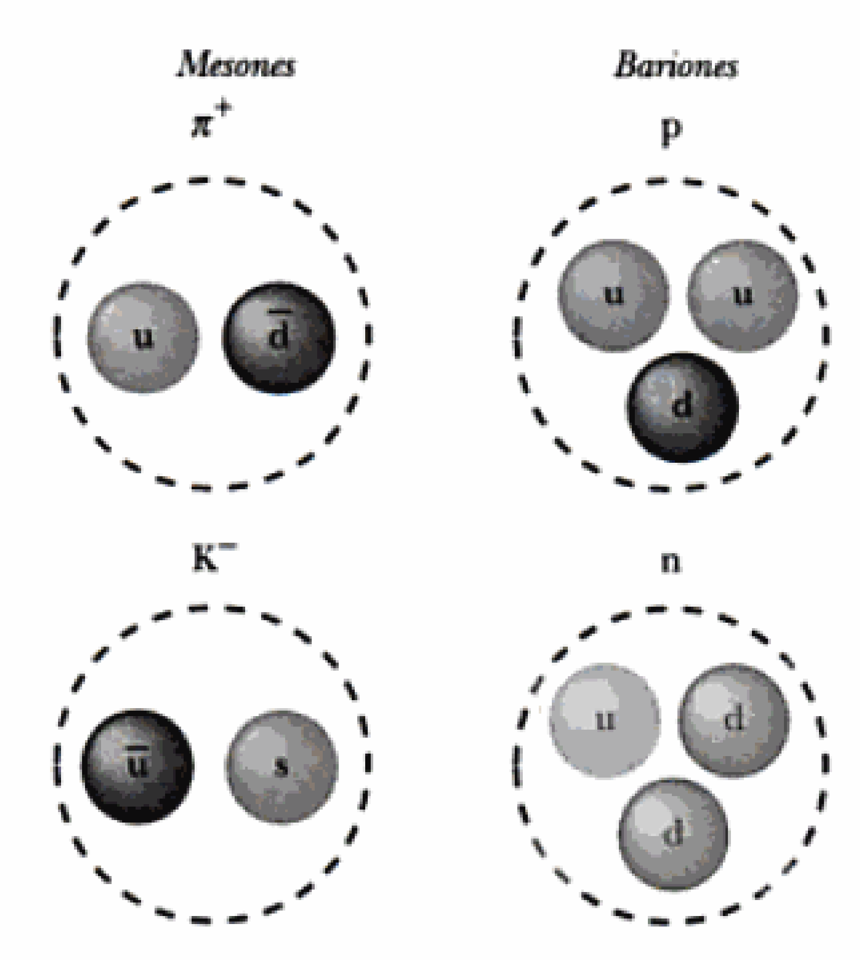


Figura 15.14 Composiciones de quark de dos mesones y dos bariones. Observe que cada mesón a la izquierda contiene dos quarks, mientras que cada barión a la derecha contiene tres quarks.

Tabla 15.4 Composición de quark de varios hadrones

Partícula	Composición de quark
Mesones	
π^+	$u\bar{d}$
π^-	$\bar{u}d$
K^+	$u\bar{s}$
K^-	$\bar{u}s$
K^0	$d\bar{s}$
Bariones	
p	uud
n	udd
Λ^0	uds
Σ^+	uus
Σ^0	uds
Σ^-	dds
Ξ^0	uss
Ξ^-	dss
Ω^-	sss

Una propiedad poco común de los quarks es que fue necesario asignarles cargas electrónicas fraccionarias. Las cargas de los quarks u, d y s son $+2e/3$, $-e/3$ y $-e/3$, respectivamente, donde e es la carga de un positrón. Cada quark tiene un número bariónico de $\frac{1}{3}$ y un espín de $\frac{1}{2}$. La extrañeza de los quarks u y d es 0, y la del quark s es -1. Con cada quark está asociado un antiquark de carga, número bariónico y extrañeza opuestas. En la tabla 15.3 se proporcionan otras propiedades de los quarks y los antiquarks.

La composición de todos los hadrones conocidos cuando Gell-Mann y Zweig presentaron sus modelos podían especificarse por completo utilizando tres reglas simples:

- Un mesón esta constituido de un quark y un antiquark, lo cual le asigna un número bariónico de 0, como se requiere. Así, los mesones son combinaciones quark-antiquark (quarconio) unidos entre sí por un enjambre de gluones, que son las partículas de campo que transmiten la fuerza fuerte entre los quarks.
- Un barión consta de tres quarks y es un tipo de "molécula" de quarks que se mantiene unida debido a los gluones.
- Un antibarión consta de tres antiquarks.

En la tabla 15.4 se enumeran las composiciones de quarks de varios mesones y bariones. Observe que justo dos de los quarks, u y d, están contenidos en todos los hadrones que se encuentran en la materia normal (protones y neutrones). El tercer quark, s, sólo se necesita para construir partículas extrañas cuyo número de extrañeza sea $+1$ o -1. La figura 15.14 es una representación gráfica de las composiciones de quark de varias partículas.

Encanto y otros desarrollos

Aunque el modelo original de los quarks tuvo bastante éxito al clasificar a las partículas en familias, se presentaron algunas discrepancias entre las predicciones del modelo y ciertas velocidades de desintegración experimentales. En consecuencia, varios físicos propusieron en 1967 un cuarto quark. A este quark, denotado por c, se le asignó una propiedad **encanto.** Un quark *encantado* debía tener una carga de $+2e/3$, pero su encanto debía distinguirlo de los otros

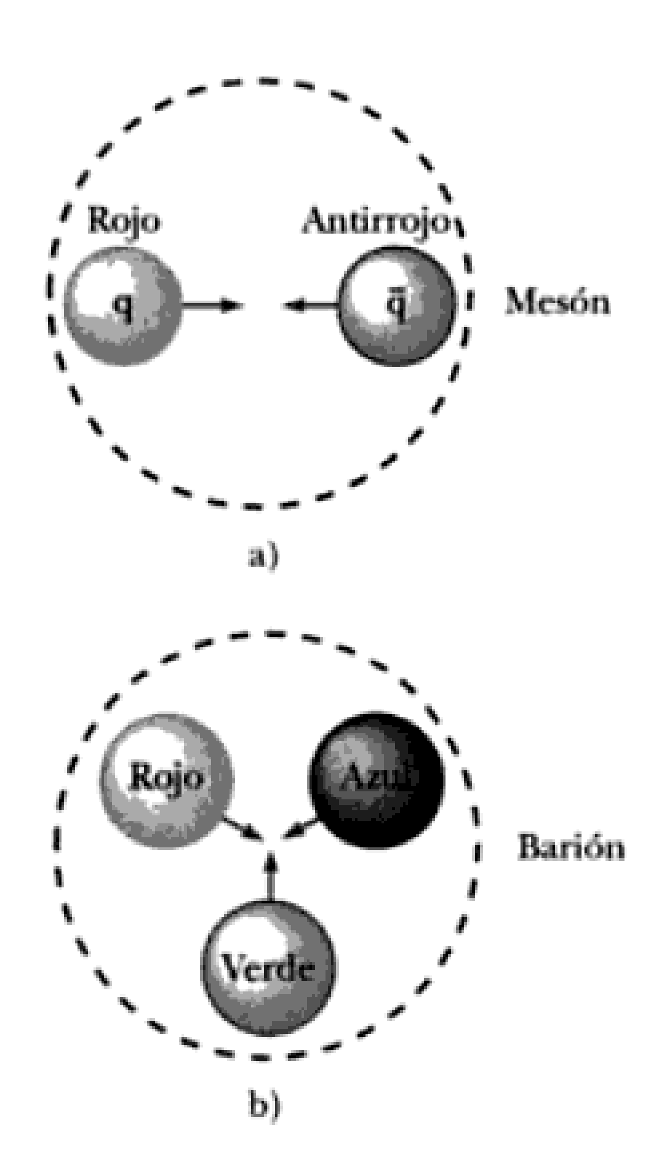


Figura 15.15 a) Un quark rojo es atraído por un antiquark rojo. Esto forma un mesón cuya estructura de quark es $(q\overline{q})$. b) Tres quarks de colores diferentes se atraen entre sí para formar un barión.

la teoría modificada pronostica correctamente el tiempo de vida del mesón π^0. La teoría general de cómo interactúan entre sí los quarks se denomina **cromodinámica cuántica** (QCD, por sus iniciales en inglés), para establecer un paralelismo con la electrodinámica cuántica, la teoría de la interacción entre las cargas eléctricas. En la QCD, se dice que el quark transporta una **carga de color,** en analogía con la carga eléctrica, y que la carga de color es responsable de la fuerza fuerte entre los quarks. Esta fuerza a menudo se denomina **fuerza de color,** La fuerza de color entre los quarks es semejante a la fuerza eléctrica entre cargas; colores semejantes se repelen y colores opuestos se atraen. Por tanto, dos quarks rojos se repelen entre sí, pero un quark rojo es atraído por un quark antirrojo. La atracción entre quarks de colores opuestos para formar un mesón $(q\overline{q})$ se muestra en la figura 15.15a. Quarks de colores distintos también se atraen entre sí, aunque con menor intensidad que un quark y un antiquark con colores opuestos. Por ejemplo, todos los quarks rojos, azules y verdes en un cúmulo se atraen entre sí para formar bariones, como se muestra en la figura 15.15b. Así, todo barión contiene tres quarks de tres colores distintos.

Como ya se mencionó, la fuerza fuerte entre quarks es transportada por partículas sin masa que se desplazan a la velocidad de la luz, denominados **gluones** (g). Según la electrodinámica cuántica hay ocho gluones, *todos transportando dos cargas de color, un color y un anticolor,* como un gluón "azul-antirrojo". Cuando un quark emite o absorbe un gluón, su color cambia. Por ejemplo, un quark azul que emite un gluón azul-antirrojo se convierte en un quark rojo, y un quark rojo que absorbe este gluón se transforma en un quark azul. Debido a que los gluones transportan carga de color, deben acumularse para formar entes denominados **bolas de pegamento,** aunque hasta la fecha no se ha detectado experimentalmente ninguna de estas partículas.

Evidencia experimental de los quarks

Como ya se mencionó, jamás se ha observado un quark aislado y, según la cromodinámica cuántica, tal vez nunca lo sea. Esto plantea la pregunta de cómo es posible detectar a los quarks y qué evidencia experimental se tiene de su existencia.

Experimentos en el acelerador lineal de Stanford (SLAC, Stanford Linear Accelerator) a fines de la década de 1960 establecieron dos resultados importantes sobre los quarks: 1) Los retrocesos de electrones a alta energía dispersados a partir de protones podían modelarse por completo al suponer *tres* quarks semejantes a puntos en el interior del protón. 2) Aunque los gluones no fueron detectados de manera directa, se encontró que los electrones incidentes (que no transportan carga de color) interactuaban con sólo aproximadamente la mitad de la masa que constituye el protón. Esto es justo lo que se espera si aproximadamente la mitad de la materia en un protón consta de gluones que son eléctricamente neutros y no interactúan de manera electromagnética con el electrón (consulte la tabla 15.5).

Resulta interesante considerar lo que ocurre a un par quark-antiquark $(q\overline{q})$ formado en una colisión a alta energía cuando el par intenta separarse. Debido a que la fuerza de color es muy intensa, todos los quarks deben formar bariones incoloros (tres quarks) o mesones incoloros (dos quarks). El proceso es como sigue. A medida que dos quarks se separan, el incremento en la energía del campo de color entre ellos es tan grande que se crean pares adicionales quark-antiquark en corrientes (o chorros) que siguen al par original $(q\overline{q})$. Cuando se utiliza toda la energía disponible, los quarks se acumulan en combinaciones de color neutro o incoloras, que continúan separándose de manera indefinida como dos chorros de hadrones, como se muestra en la figura 15.16a. En la figura

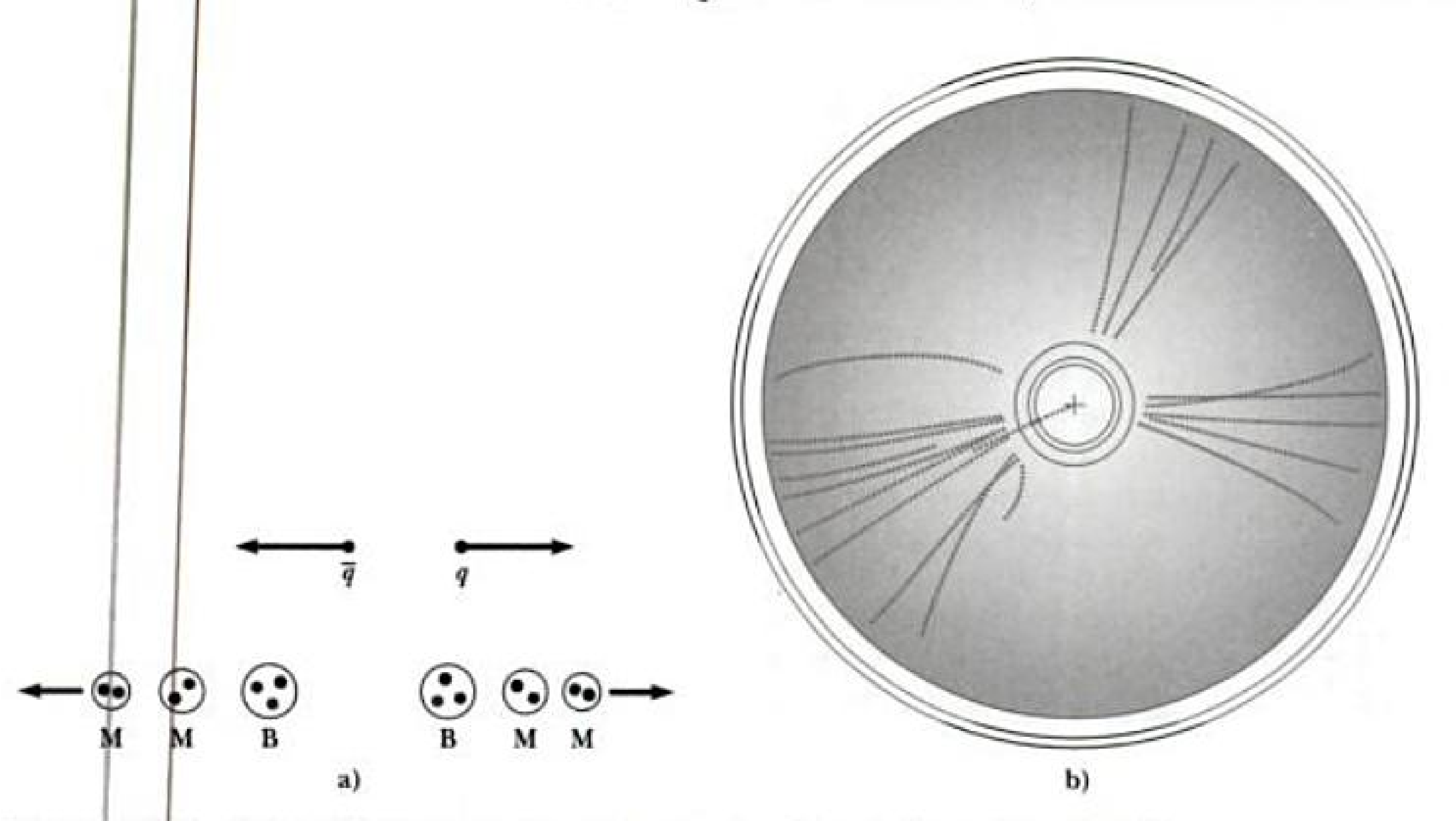
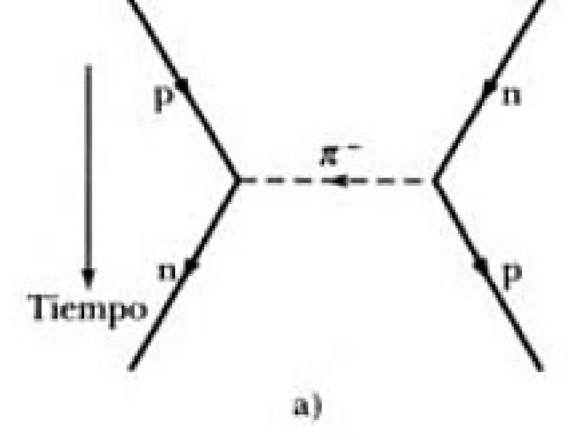


Figura 15.16 a) A medida que se separa el par quark-antiquark, la energía potencial en el campo de color se transforma en pares $q\bar{q}$ adicionales, que rápidamente se condensan en mesones (M) y bariones (B) incoloros. Éstos se separan como chorros de hadrones. b) Tres chorros de hadrones producidos por un quark, un antiquark y un gluón. Esta figura proviene del detector JADE en el laboratorio alemán DESY en Hamburgo. (*Adaptada de Gordon Kane,* The Particle Garden, *figura 6.2, p. 100.)*

15.16b se muestran datos experimentales reales correspondientes a tres chorros de hadrones que salen de una colisión donde se produjeron un quark y un antiquark y se emitió un gluón. Debido a que los gluones transportan carga de color, ellos, así como los quarks, también deben aparecer como un chorro de hadrones. Así, *las improntas experimentales de los quarks y los gluones son delgados "chorros" de hadrones.*



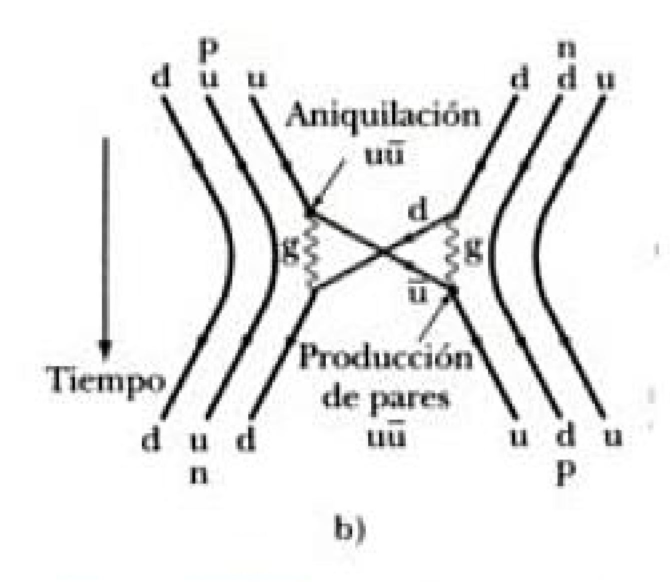


Figura 15.17 a) Interacción nuclear entre un protón y un neutrón explicada en términos del modelo de intercambio de piones de Yukawa. b) La misma interacción que en el inciso a), explicada en términos de quarks y gluones. Observe que la pareja intercambiada del quark $\bar{u}d$ constituye un mesón π^-.

Explicación de la fuerza nuclear en términos de los quarks

Aunque la fuerza de color entre dos hadrones de color neutro es despreciable a grandes separaciones, la intensa fuerza de color entre sus quarks constituyentes no se cancela de manera exacta a pequeñas separaciones. Esta intensa fuerza residual es, de hecho, la fuerza nuclear de corto alcance que une a los protones y neutrones para formar núcleos. En la sección 15.3 se explicaron las interacciones nucleares de un protón con un neutrón usando la temprana teoría de Yukawa del intercambio de piones. Según la QCD, es posible proporcionar una explicación más básica de la fuerza nuclear en términos de quarks y gluones, como se muestra al contrastar los diagramas de Feynman del mismo proceso en la figura 15.17. Cada quark en el interior del neutrón y el protón emite y absorbe de manera continua gluones virtuales y crea y aniquila pares virtuales ($q\bar{q}$). Cuando el neutrón y el protón se aproximan hasta menos de 1 fm entre sí, estos gluones y quarks virtuales pueden intercambiarse entre los dos nucleones, y tales intercambios producen la fuerza nuclear. En la figura 15.17b se muestra una posibilidad o contribución probable al proceso general que se muestra en la figura 15.17a. Un quark d emite un gluón virtual (representado por una línea ondulada, g), que crea, poco después, un

par $u\bar{u}$. Tanto el quark d en retroceso y el $\bar{u}$ son transmitidos al protón, donde la $\bar{u}$ aniquila un quark u del protón (con la creación de un gluón) y el d es capturado.

15.11 TEORÍA ELECTRODÉBIL Y MODELO ESTÁNDAR

Recuerde que la interacción débil es una fuerza de alcance extremadamente corta con una distancia de interacción aproximadamente igual a 10^{-18} m. Esta interacción de corto alcance implica que las partículas cuantizadas que transportan el campo débil (los bosones W^+, W^- y Z^0 de espín 1) son bastante masivas, como en efecto es el caso (consulte la tabla 15.5). Estos bosones son particularmente asombrosos cuando uno percibe que ¡son partículas que carecen de estructura, semejan ser puntuales y son tan masivas como los átomos de kriptón! Como ya se mencionó, la interacción débil es responsable del decaimiento del neutrón y del decaimiento beta de otros bariones más pesados. Más importante que lo anterior, la interacción débil es responsable de la desintegración de los quarks c, s, b y t en los más ligeros y estables quarks u y d, así como de la desintegración de los leptones masivos μ y τ en electrones (más ligeros). Así, *la interacción débil es muy importante debido a que rige la estabilidad de las partículas básicas de la materia.*

Un rasgo misterioso de la interacción débil es su falta de simetría, en especial cuando se le compara con el elevado grado de simetría mostrado por las interacciones fuerte, electromagnética y gravitacional. Por ejemplo, la interacción débil, a diferencia de la interacción fuerte, no es simétrica bajo reflexión especular o intercambio de carga. (La reflexión especular significa que todas las cantidades en una reacción de una partícula dada se intercambian como en una reflexión especular: izquierda por derecha, un movimiento en dirección al espejo por un movimiento hacia fuera. Intercambio de carga significa que todas las cargas eléctricas en una reacción de una partícula se convierten en sus opuestas: todas las positivas en negativas, y viceversa.) Cuando se afirma que la interacción débil no es simétrica, quiere decirse que la reacción con todos los cambios de cantidades ocurre con menos frecuencia que la reacción directa. Por ejemplo, la desintegración del K^0, que es gobernada por la interacción débil, no es simétrica bajo intercambio de carga, ya que

$$K^0 \longrightarrow \pi^- + e^+ + \nu_e$$

ocurre con mucho mayor frecuencia que

$$K^0 \longrightarrow \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e$$

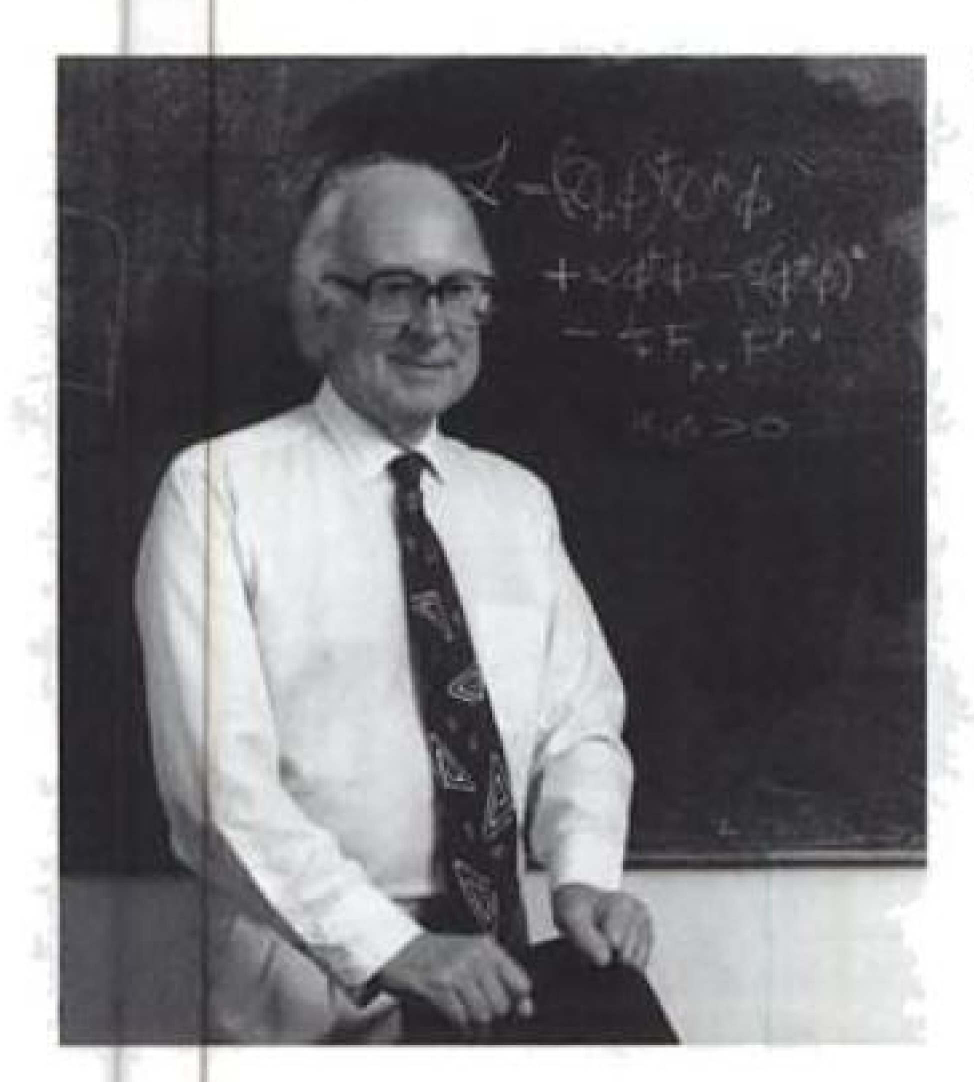
En 1979 Sheldon Glashow, Abdus Salam y Steven Weinberg ganaron el premio Nobel por haber desarrollado una teoría que unifica las interacciones electromagnética y débil. Esta **teoría electrodébil** postula que *las interacciones débil y electromagnética tienen la misma intensidad para partículas de energías muy elevadas.* Así, las dos interacciones son consideradas como dos manifestaciones diferentes de una sola interacción electrodébil unificadora. El fotón y los tres bosones masivos ($W^{\pm}$ y Z^0) desempeñan papeles clave en la teoría electrodébil. Quizá el más espectacular de los pronósticos concretos de la teoría fue el concerniente a las masas de las partículas W y Z de alrededor de 80 GeV/c^2 y 91 GeV/c^2, respectivamente. El premio Nobel de 1984 fue otorgado a Carlo Rubia y Simon van der Meer por su obra, que condujo al descubrimiento de estas partículas justo con estas masas en el CERN.

En física de altas energías, la combinación de la teoría electrodébil y la electrodinámica cuántica para la interacción fuerte se denomina **modelo estándar.** Incluye casi todos los constituyentes de la materia: seis leptones, seis quarks y tres fuerzas y sus partículas de campo, pero no incluye a la fuerza gravitacional. Los físicos,

continuando en pos de la unificación, esperan que la teoría de cuerdas, mencionada en la siguiente sección, unifique a la gravedad con el modelo estándar.

El modelo estándar no contesta todas las preguntas. Requiere como parámetros de entrada más de una docena de números medidos, como las masas de los leptones y de los quarks. Además, no explica las misteriosas razones que existen entre estas masas, por qué sólo hay seis tipos de leptones, o por qué hay seis tipos *tanto de* leptones *como de* quarks. Una cuestión específica concerniente a las partículas de campo es por qué el fotón carece de masa mientras los bosones W y Z sí cuentan con ella. Debido a esta diferencia, las fuerzas electromagnética y débil son tan distintas a bajas energías pero se hacen semejantes, o simétricas, a energías muy elevadas, donde las energías en reposo de los bosones W y Z son fracciones insignificantes de sus energías totales. Este comportamiento en la transición de energías altas a bajas se denomina **ruptura de simetría.** En 1964 Peter Higgs (nacido en 1929, físico escocés) introdujo un mecanismo para el rompimiento de simetría electrodébil al proponer un nuevo campo, denominado **campo de Higgs,** que permea todo el espacio y proporciona masa a las partículas. Se puede considerar de manera aproximada, que el campo de Higgs puede causar algún tipo de fuerza de fricción sobre las partículas a medida que interactúa con ellas, proporcionando a las partículas su inercia característica. Así como con todos los campos clásicos, la cuantización del campo de Higgs conduce una partícula que transporta fuerza denominada **bosón de Higgs.** El modelo estándar, incluyendo el mecanismo de Higgs, proporciona una explicación lógica y consistente de la naturaleza masiva de los bosones W y Z. Desafortunadamente, aún no se encuentra el bosón de Higgs, aunque los físicos consideran que su masa debe ser inferior a 1 TeV (10^{12} eV).

Para determinar si el bosón de Higgs existe, es necesario que colisionen dos quarks de por lo menos 1 TeV, aunque los cálculos muestran que para esto se requiere inyectar 40 TeV de energía en un volumen menor que el de un protón. Los científicos están convencidos de que debido a la limitada energía disponible en los aceleradores convencionales que utilizan blancos fijos, es necesario construir aceleradores de haces en colisión denominados **colisionadores,** El concepto de colisionador es directo. Partículas de la misma masa y energía cinética, que se desplazan en direcciones opuestas en el anillo de un acelerador, chocan frontalmente para producir la reacción necesaria y formar nuevas partículas. Debido



Peter W. Higgs (nacido en 1930). (*Cortesía de Peter Tuffy/ Universidad de Edimburgo.*)

a que la cantidad de movimiento total de las partículas que interactúan es cero, toda su energía cinética está disponible para la reacción. El Large Electron-Positron Collider (LEP) en el CERN y el Stanford Linear Collider en California hacen chocar electrones y positrones. El Super Proton Synchrotron en el CERN acelera protones y antiprotones a energías de 270 GeV, mientras el acelerador de protones de máxima energía mundial, el Tevatrón, en el Fermi National Laboratory en Illinois produce protones de cuando mucho 1 000 GeV (1 TeV). El CERN espera en 2007 la terminación del Large Hadron Collider (LHC), un colisionador protón-protón que proporcionará una energía de centro de masa de 14 TeV y permitirá la exploración de la física del bosón de Higgs. El acelerador está en construcción en el mismo túnel de 27 km de circunferencia que el colisionador LEP del CERN, donde muchos países están participando en el proyecto.

15.12 MÁS ALLÁ DEL MODELO ESTÁNDAR

Gran teoría de la unificación y la supersimetría

Luego del éxito de la teoría electrodébil, los científicos intentaron combinarla con la cromodinámica cuántica en una **gran teoría de unificación,** o **GTU.** En este modelo, el siguiente paso es unir la fuerza electrodébil con la fuerza de color fuerte para formar una gran fuerza unificada. La GTU considera que los leptones y los quarks son estados específicos de una partícula específica denominada *leptoquark*, y es esta identidad la que conduce al mismo número de sabores de leptones y quarks. También, debido a que los leptones y los quarks son estados de la misma partícula, la GTU pronostica que los quarks y los leptones podrán intercambiarse mutuamente si cuentan con el tiempo suficiente. Así, la GTU predice que los protones llenos con quarks son inestables y que se desintegrarán en aproximadamente 10^{32} años en un positrón, que es un leptón, y otras partículas no bariónicas. Los intentos para detectar la desintegración del protón han sido infructuosos hasta la fecha.

La búsqueda por la unificación también ha conducido a otro hermoso principio de simetría, la supersimetría (**SUSY**). Según este principio, las ecuaciones fundamentales de la naturaleza permanecen sin modificación alguna debido al intercambio de un fermión por un bosón en ellas. La supersimetría sugiere que toda partícula elemental tiene una **superpareja,** denominada **spartícula,** aunque aún no se ha observado ninguna. Se cree que la supersimetría es una simetría rota (como la simetría electrodébil rota a bajas energías) y que las masas de las superparejas son demasiado grandes para ser producidas en aceleradores normales. Continuando con la gracia y el capricho de nombrar a las partículas y sus propiedades, a las superparejas se les ha asignado la denominación de *squarks* y *sleptones* (las superparejas bosones de los quarks y los leptones) y *fotinos*, *winos* y *gluinos* (las superparejas fermiones de los bosones de campo: los fotones, los $W^{\pm}$ s y los gluones).

Teoría de cuerdas: una nueva perspectiva

La **teoría de cuerdas** es un esfuerzo por *unificar* las cuatro fuerzas fundamentales al modelar todas las partículas como varios modos de vibración de una sola entidad: una cuerda increíblemente pequeña. La longitud típica de tal cuerda es del orden de 10^{-35} m, denominada **longitud de Planck.** En esta teoría cada modo de vibración cuantizado de la cuerda corresponde a una partícula elemental diferente en el modelo estándar.

Uno de los factores que complican la teoría es que requiere que el espacio-tiempo posea 10 dimensiones. A pesar de las dificultades teóricas y conceptuales que se presentan al tratar con 10 dimensiones, la teoría de la cuerda sigue siendo promisoria en cuanto a *incorporar la gravedad con las otras fuerzas.* Cuatro de

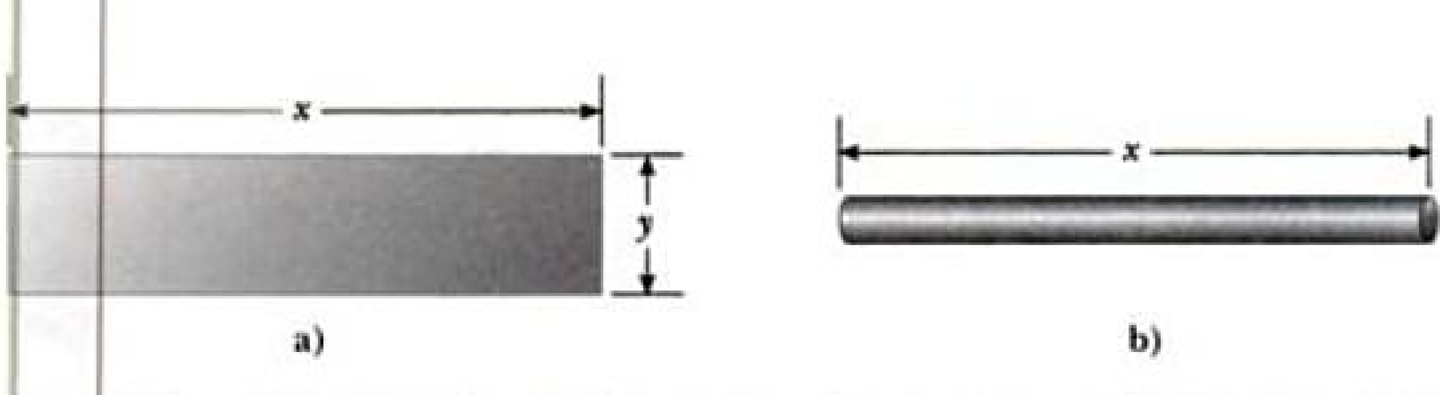


Figura 15.18 a) Un trozo de papel se corta en forma rectangular. Como rectángulo, esta figura cuenta con dos dimensiones. b) El rectángulo se enrolla en forma de popote. Visto desde lejos, parece ser unidimensional. La segunda dimensión enrollada no es visible cuando se observa desde una gran distancia, en comparación con el diámetro del popote.

las 10 dimensiones son visibles para el ser humano: tres dimensiones espaciales y una dimensión temporal, y se dice que las otras seis están *compactadas*. Es decir, las seis dimensiones están tan enroscadas entre sí que no son visibles en el mundo macroscópico.

Como analogía, considere un popote (o paja para sorber). Éste puede construirse cortando un trozo rectangular de papel (figura 15.18a), que evidentemente tiene dos dimensiones, y enrollándolo para formar un tubo pequeño (figura 15.18b). Visto desde muy lejos, el popote parece ser una línea recta unidimensional. La segunda dimensión ha sido enrollada y no es visible. La teoría de la cuerda afirma que las seis dimensiones espacio-tiempo están enrolladas de una manera semejante, donde el enrollamiento es del tamaño de la longitud de Planck: imposible de ver desde nuestro punto de vista.

Otro factor de complicación con la teoría de cuerdas es la dificultad que representa para los teóricos orientar a aquello que los experimentadores deben observar en un experimento. La longitud de Planck es tan pequeña que la experimentación directa sobre las cuerdas es imposible. Hasta que la teoría haya sido más desarrollada, los teóricos están restringidos a aplicar la teoría a resultados conocidos y probar su consistencia.

Otros teóricos están trabajando en la **teoría M,** que es una teoría de 11 dimensiones basada en membranas, más que en cuerdas. En una forma que nos recuerda al principio de correspondencia, se afirma que la teoría M se reduce a la teoría de cuerdas si se hace una reducción de 11 a 10 dimensiones.

RESUMEN

Las fuerzas fuerte, electromagnética, débil y gravitacional son las cuatro fuerzas fundamentales en la naturaleza. Todas las interacciones en que participan estas fuerzas están mediadas por **partículas de campo.** La interacción electromagnética es mediada por el fotón; la interacción débil lo es por los bosones $W^{\pm}$ y Z^0; la interacción gravitacional, por los gravitones, y la interacción fuerte, por los gluones.

Una partícula cargada y su **antipartícula** tienen la misma masa pero carga opuesta, y otras propiedades pueden tener valores opuestos, como el número leptónico y el número bariónico. Es posible producir pares partícula-antipartícula en reacciones nucleares si la energía disponible es superior a $2mc^2$, donde m es la masa de la partícula (o de la antipartícula).

Las partículas que son distintas a las partículas de campo se clasifican como hadrones o leptones. Los **hadrones** interactúan mediante las cuatro fuerzas fundamentales. Tienen tamaño y estructura y no son partículas elementales. Hay dos tipos: **bariones** y **mesones.** Los bariones, que suelen ser las partículas más masivas, tienen un **número bariónico** distinto de cero y un

espín de $\frac{1}{2}$ o $\frac{3}{2}$. El número bariónico de los mesones es igual a cero, y su espín es cero o entero.

Los **leptones** carecen de estructura o tamaño y se consideran verdaderamente elementales. Interactúan sólo por medio de las fuerzas débil, gravitacional y electromagnética. Hay seis tipos de leptones: el electrón e^-, el muón μ^-, el tau τ^- y sus neutrinos ν_e, ν_μ y ν_τ.

En reacciones y desintegraciones suelen conservarse cantidades como energía, cantidad de movimiento lineal, momento angular, carga eléctrica, número bariónico y número leptónico. La conservación de la energía y la cantidad de movimiento relativistas produce la siguiente expresión para la energía crítica para la producción de partículas:

$$K_{\text{crítica}} = \frac{(m_3 + m_4 + m_5 + \cdots)^2c^2 - (m_1 + m_2)^2c^2}{2m_2}$$

Aquí, $K_{\text{crítica}}$ es la energía cinética de la partícula incidente de masa m_1, m_2 es la masa de la partícula blanco estacionaria y las m restantes son masas de partículas producto.

Ciertas partículas poseen propiedades denominadas **extrañeza** y **encanto.** Estas propiedades poco comunes se conservan sólo en las desintegraciones y reacciones nucleares que ocurren por la fuerza fuerte.

Los teóricos en física de partículas elementales han postulado que todos los hadrones están constituidos por unidades más pequeñas denominadas **quarks,** y la evidencia experimental coincide con este modelo. Los quarks poseen carga eléctrica fraccionaria y existen en seis **sabores;** arriba (u), abajo (d), extraño (s), encantado (c), superior (t) e inferior (b). Cada barión contiene tres quarks, y cada mesón contiene un quark y un antiquark.

Según la teoría de la **cromodinámica cuántica,** los quarks poseen una propiedad denominada **carga de color,** y la fuerza entre los quarks se denomina **fuerza fuerte** o **fuerza de color.** Esta fuerza ahora se considera una fuerza fundamental. La fuerza nuclear, que originalmente se consideraba fundamental, ahora se considera como un efecto secundario de la fuerza fuerte, debido a los intercambios de gluones entre hadrones.

Las fuerzas electromagnética y débil ahora se consideran manifestaciones de una fuerza simple denominada **fuerza electrodébil.** La combinación de la cromodinámica cuántica y la teoría electrodébil se denomina **modelo estándar.**

BIBLIOGRAFÍA ADICIONAL SUGERIDA

Física de partículas

1. J. Bahcall, "The Solar Neutrino Problem", *Sci. Amer.*, mayo de 1990.
2. H. Breuker *et al.*, "Tracking and Imaging Elementary Particles", *Sci. Amer.*, agosto de 1991.
3. F. Close, *The Cosmic Onion: Quarks and the Nature of the Universe*, Nueva York, The American Institute of Physics, 1986. Monografía oportuna sobre física de partículas, que incluye análisis animados de la teoría de la gran explosión.
4. H. Fritzsch, *Quarks, The Stuff of Matter*, Londres, Allen and Lane, 1983. Excelente repaso introductorio de la física de partículas elementales.
5. S. Glashow, *Interactions: A Journey Trough the Mind of a Particle Physicist*, Nueva York, Warner Books, 1988.
6. H. Harari, "The Structure of Quarks and Leptons", *Sci. Amer.*, abril de 1983.
7. L. M. Lederman, "The Value of Fundamental Science", *Sci. Amer.*, noviembre de 1984.
8. N. B. Mistry, R. A. Poling y E. H. Thorndike, "Particles with Naked Beauty", *Sci. Amer.*, julio de 1983.
9. C. Quigg, "Elementary Particles and Forces", *Sci. Amer.*, abril de 1985.
10. M. Riordan, "The Discovery of Quarks", *Science* 29, mayo de 1992.
11. M. J. G. Veltman, "The Higgs Boson", *Sci. Amer.*, noviembre de 1986.
12. E. Witten, "Reflections on the Fate of Spacetime", *Physics Today*, abril de 1996. En este artículo se analiza la teoría de cuerdas de las partículas elementales.
13. M. Perl, "The Leptons After 100 Years", *Physics Today*, octubre de 1997. Excelente repaso de los leptones, escrito por el premio Nobel y descubridor del leptón tau, Martin L. Perl.

14. G. Kane, *Supersimmetry*, Cambridge, MA, Helix Books, 2000. Descripción clara y no matemática de la supersimetría.

15. B. Greene, *The Elegant Universe*, Nueva York, Vintage Books, 2000. Descripción clara y no matemática de la teoría de cuerdas.

PREGUNTAS

1. Mencione las cuatro interacciones fundamentales y la partícula de campo que media cada una.
2. Describa el modelo de quark de los hadrones, incluyendo las propiedades de los quarks.
3. ¿Cuáles son las diferencias entre los hadrones y los leptones?
4. Describa las propiedades de los bariones y los mesones, así como las diferencias importantes entre ellos.
5. Los tiempos de vida de las partículas denominadas resonancias son muy breves, del orden de 10^{-23} s. Con base en esta información, ¿podría decir si son hadrones o leptones? Explique su respuesta.
6. Todos los kaones se desintegran en estados finales que no contienen protones ni neutrones. ¿Cuál es el número bariónico de los kaones?
7. La partícula Ξ^0 decae por la interacción débil, según el modo de desintegración $\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 + \pi^0$. ¿Esperaría que esta desintegración sea lenta o rápida? Explique su respuesta.
8. Identifique los decaimientos, indicados en la tabla 15.2, que ocurren debido a la interacción débil. Justifique sus respuestas.
9. Identifique los decaimientos indicados en la tabla 15.2, que ocurren debido a la interacción electromagnética. Justifique sus respuestas.
10. Dos protones y un núcleo interactúan mediante la interacción fuerte. ¿Están sujetos a la interacción débil?
11. Analice las siguientes leyes de conservación: de energía, del momento lineal, del momento angular, de la carga eléctrica, del número bariónico, de número leptónico y la extrañeza. Estas leyes, ¿están basadas en las propiedades fundamentales de la naturaleza? Explique su respuesta.
12. Un antibarión interactúa con un mesón. ¿Es posible producir un barión en esta interacción? Explique su respuesta.
13. Describa las características esenciales del modelo fundamental de la física de partículas.
14. ¿Cuántos quarks hay en a) un barión, b) un antibarión, c) un mesón, d) un antimesón? ¿Cómo explica el que los espines de los antibariones son semienteros, mientras los espines de los mesones son iguales a 0 o 1? (Sugerencia: los quarks tienen $\frac{1}{2}$.)
15. ¿En la teoría de la cromodinámica cuántica, los quarks se presentan en tres colores. ¿Cómo justifica la afirmación de que "todos los bariones y los mesones son incoloros"?
16. ¿Cuál fue el barión que Murray Gell-Mann predijo en 1961? ¿Cuál es la composición de quarks de esta partícula?
17. ¿Cuál es la composición de quarks de la partícula Ξ^-? (Consulte la tabla 15.4.)
18. Los bosones $W^{\pm}$ y Z fueron producidos por vez primera en el CERN en 1983 (mediante la colisión de un haz de protones y una haz de antiprotones a alta energía). ¿Por qué es importante este descubrimiento?

PROBLEMAS

15.1 Fuerzas fundamentales en la naturaleza

1. Cuando un protón o un pión a alta energía que se desplaza casi a la velocidad de la luz choca contra un núcleo, recorre una distancia media de 3×10^{-15} m antes de interactuar. Con base en esta información, calcule el tiempo necesario para que ocurra la interacción fuerte.
2. El mesón neutro ρ^0 decae por la interacción fuerte en dos piones según $\rho^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$, con una vida media aproximada de 10^{-23} s. El mesón neutro K^0 también decae en dos piones según $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$, pero con una vida media mucho más larga, de aproximadamente 10^{-10} s. ¿Cómo explica estas observaciones?

15.2 Positrones y otras antipartículas

3. Cuando un protón y un antiprotón se aniquilan entre sí se producen dos fotones. ¿Cuáles son la frecuencia mínima y la longitud de onda correspondiente de cada fotón?
4. Un fotón produce un par protón-antiprotón en reposo según la reacción $\gamma \rightarrow p + \bar{p}$. Si un núcleo próximo de masa 100 u (inicialmente en reposo) se lleva la cantidad de movimiento del fotón, ¿cuál es la frecuencia de éste? ¿Cuál es su longitud de onda?

15.3 Mesones y el inicio de la física de partículas

5. Uno de los mediadores de la interacción débil es el bosón Z^0, cuya masa es de 91 GeV/c^2. Use esta información para encontrar un valor aproximado del alcance de la interacción débil.

15.5 Leyes de conservación

6. Muones a alta energía chocan ocasionalmente con electrones y producen dos neutrinos según la reacción $\mu^+ + e^- \rightarrow 2\nu$. ¿De qué neutrinos se trata?
7. a) Demuestre que el número bariónico y la carga se conservan en las siguientes reacciones de un pión con un protón.

$$\pi^- + p \longrightarrow K^- + \Sigma^+ \qquad (1)$$

$$\pi^- + p \longrightarrow \pi^- + \Sigma^+ \qquad (2)$$

b) La primera reacción se observa, pero la segunda no ocurre jamás. Explique estas observaciones.

8. Las siguientes reacciones o decaimientos implican uno o más neutrinos. Escriba el nombre de los neutrinos faltantes (ν_e, ν_μ, o ν_τ).
(a) $\pi^- \rightarrow \mu^- + ?$
(b) $K^+ \rightarrow \mu^+ + ?$
(c) $? + p \rightarrow n + e^+$
(d) $? + n \rightarrow p + e^-$
(e) $? + n \rightarrow p + \mu^-$
(f) $\mu^- \rightarrow e^- + ? + ?$
9. Determine cuál de las siguientes reacciones puede ocurrir. Para las que no pueden ocurrir, determine la(s) ley (leyes) de conservación que se viola(n).
(a) $p \rightarrow \pi^+ + \pi^0$
(b) $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$
(c) $p + p \rightarrow p + \pi^+$
(d) $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$
(e) $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$
(f) $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + n$

15.6 Partículas extrañas y extrañeza

10. Determine si en cada una de las siguientes reacciones y desintegraciones se conserva la extrañeza:
(a) $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$
(b) $\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0$
(c) $\bar{p} + p \rightarrow \bar{\Lambda}^0 + \Lambda^0$
(d) $\pi^- + p \rightarrow \pi^- + \Sigma^+$
(e) $\Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-$
(f) $\Xi^0 \rightarrow p + \pi^-$
11. Las siguientes desintegraciones están prohibidas. Determine la ley de conservación que viola cada una.
(a) $\mu^- \rightarrow e^- + \gamma$
(b) $n \rightarrow p + e^- + \nu_e$
(c) $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^0$
(d) $p \rightarrow e^+ + \pi^0$
(e) $\Xi^0 \rightarrow n + \pi^0$
12. Las siguientes reacciones están prohibidas. Determine la ley de conservación que viola cada una.
(a) $p + \bar{p} \rightarrow \mu^+ + e^-$
(b) $\pi^- + p \rightarrow p + \pi^+$
(c) $p + p \rightarrow p + \pi^+$
(d) $p + p \rightarrow p + p + n$
(e) $\gamma + p \rightarrow n + \pi^0$

15.7 ¿Cómo se producen las partículas elementales y cómo se miden las propiedades de las partículas?

13. En 1959 Emilio Segrè y Owen Chamberlain fueron galardonados con el premio Nobel por haber demostrado la existencia del antiprotón. En una serie de experimentos iniciados en 1955, usando el acelerador Bevatrón en Berkeley, produjeron tanto antiprotones como antineutrinos en las reacciones siguientes:

$$p + p \longrightarrow p + p + p + \bar{p}$$

$$p + p \longrightarrow p + p + n + \bar{n}$$

a) Calcule la energía cinética crítica del protón incidente (protón blanco fijo) necesaria para la producción de un antiprotón, $\bar{p}$) Para las mismas condiciones iniciales, calcule la energía cinética crítica necesaria para la producción de un antineutrón, $\bar{n}$.
14. Calcule el umbral para la producción de partículas extrañas en las siguientes reacciones. Suponga que la primera partícula está en movimiento y que la segunda está en reposo.

(a) $p + p \longrightarrow n + \Sigma^+ + K^0 + \pi^+$

(b) $\pi^- + p \longrightarrow \Sigma^0 + K^0$

15. *Eficiencia de aceleradores de blanco fijo contra aceleradores de haces en colisión.* La eficiencia es el porcentaje de la energía cinética inicial que se convierte en la masa de nuevas partículas producto en una reacción dada. Calcule las eficiencias de las reacciones del ejemplo 15.5, del ejercicio 3 y del problema 13. Si estos experimentos pudiesen disponerse de modo que los dos protones en colisión se aproximasen entre sí a la misma velocidad en el umbral, la cantidad de movimiento total sería cero y nada de la energía cinética inicial podrá dedicarse a la energía cinética de los productos. Así, toda la energía cinética inicial se dedicaría a la creación de una nueva masa y la eficiencia sería de 100%. Ésta es la razón por la que la mayor parte de los experimentos que implican la producción de partículas pesadas se llevan a cabo con aceleradores de haces en colisión. Aunque hay dificultades experimentales fantásticas en el almacenamiento, el enfoque y la provocación del choque de dos haces de baja densidad que circulan en direcciones opuestas, la gran ganancia en eficiencia amerita el uso de estos aceleradores.
16. Considere la reacción $p + p \rightarrow p + p + X$. a) Para un acelerador de blanco fijo capaz de producir fotones incidentes con una energía cinética de 1 000 GeV, encuentre la partícula X más pesada que puede producirse. b) Si dos protones en colisión, cada uno con una energía cinética de 500 GeV, están disponibles en un colisionador, ¿cuál es la masa de la partícula X más pesada que puede producirse en la misma reacción?

15.9 Quarks

17. Una partícula Σ^0 que se desplaza por la materia choca contra un protón, y surgen una partícula Σ^+ y un rayo gamma, así como una tercera partícula. Use el modelo de quarks de la Σ^+ y el de rayo gamma para determinar la identidad de la tercera partícula.
18. Las composiciones de quarks de las partículas K^0 y Λ^0 son $d\bar{s}$ y uds, respectivamente. Demuestre que la carga, el número bariónico y la extrañeza de estas partículas es igual a las sumas de estos números para los quarks constituyentes.

19. Ignore las energías de enlace y calcule las masas de los quarks u y d a partir de las masas del protón y del neutrón.
20. En la figura P15.20 se muestra la interacción de un neutrón y un protón donde se intercambia un π^+ virtual. Elabore un diagrama de Feynman que muestre esta interacción en términos de quarks y gluones.
21. Se cree que un neutrón que experimenta decaimiento beta emite un W^- virtual y luego se desintegra en un e^- y en un antineutrino electrónico, $\bar{\nu}_e$. Elabore un diagrama de Feynman que muestre esta interacción en términos de quarks, de W^-, e^- y de $\bar{\nu}_e$.

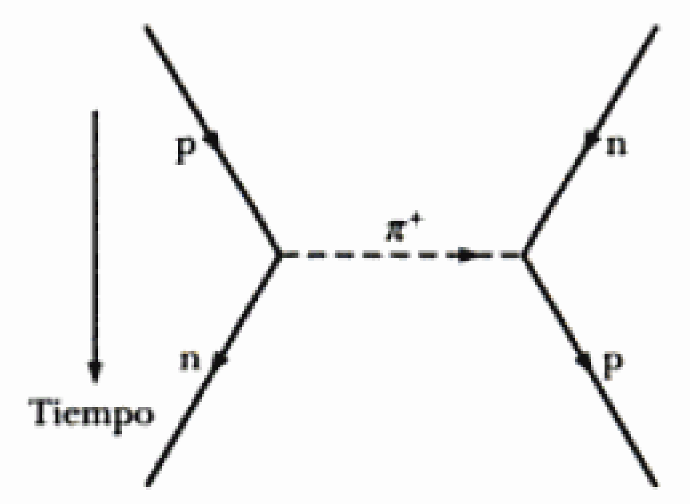


Figura P15.20

PROBLEMAS ADICIONALES

22. *Oscilación del sabor del neutrino.* La oscilación del neutrino está basada en la idea de que los neutrinos ν_e, ν_μ y ν_τ son mezclas de otros tres neutrinos denominados ν_1, ν_2 y ν_3. Por ejemplo,

$$\nu_\tau = U_{\tau 1}\nu_1 + U_{\tau 2}\nu_2 + U_{\tau 3}\nu_3$$

donde cada uno de los neutrinos ν_1, ν_2 y ν_3 se representa como una solución de estado estacionario de la ecuación de Schrödinger, cada uno con una masa diferente m_1, m_2 y m_3. Para simplificar el procedimiento algebraico, considere únicamente las oscilaciones del sistema ν_μ, ν_τ. Los coeficientes U distintos de cero se limitan a los que relacionan ν_2 y ν_3 y los Us se escriben en términos de una simple variable θ denominada ángulo de mezcla:

$$\nu_\mu = \cos\theta\nu_2 - \operatorname{sen}\theta\nu_3$$

$$\nu_\tau = \operatorname{sen}\theta\nu_2 + \cos\theta\nu_3$$

El ángulo de mezcla controla la cantidad de ν_2 y ν_3 presente en ν_μ y ν_τ. Observe que para $\theta = 0$ no hay mezcla. En un experimento típico, en $t = 0$ se crea un ν_μ (haz) con una cantidad de movimiento dada, p. La evolución temporal del ν_μ, a medida que éste se mueve corriente abajo, está dada por

$$\nu_\mu(t) = \cos\theta\nu_2 e^{-iE_2t/\hbar} - \operatorname{sen}\theta\nu_3 e^{-iE_3t/\hbar}$$

donde ν_2 y ν_3 son estados estacionarios con energías E_2 y E_3, respectivamente.
a) Escriba una expresión semejante para $\nu_\tau(t)$.
b) Exprese, matemáticamente, la condición inicial de que el neutrino creado en $t = 0$ es por completo un neutrino μ. (*Sugerencia:* Una condición es $|\nu_\tau(0)|^2 = 0$.)
c) Demuestre que la probabilidad de encontrar un neutrino τ en el instante t (o que el neutrino μ ha oscilado en un neutrino τ) es

$$P(\nu_\mu \longrightarrow \nu_\tau) = \frac{\operatorname{sen}^2 2\theta}{2}\left(1 - \cos\frac{E_2 - E_3}{\hbar}t\right)$$

d) Demuestre que para una cantidad de movimiento fija p y masas pequeñas m_2 y $m_3(m_2c,\ m_3c \ll p)$

$$E_2 - E_3 \cong \frac{(m_2^2 - m_3^2)c^3}{2p}$$

Los resultados de los incisos c) y d) muestran que la observación de la oscilación del neutrino establece la diferencia de las masas al cuadrado y determina el ángulo de mezcla.

23. La supernova más reciente que se ha observado a simple vista fue la Shelton 1987A (figura P15.23). Estaba a 170 000 años luz en la galaxia vecina a la nuestra, la Gran Nube de Magallanes. Aproximadamente 3 horas antes de observar su brillantez óptica, en dos experimentos de detección de neutrinos que estaban realizándose se registraron los primeros neutrinos provenientes de una fuente identificada distinta al Sol. El experimento de Irvine-Michigan-Brookhaven en una mina de sal en Ohio registró ocho neutrinos durante un periodo de 6 segundos, y el experimento Kamiokande II en una mina de zinc en Japón contó 11 neutrinos en 13 s. (Debido a que la supernova se encuentra bastante al sur en el cielo, estos neutrinos entraron al detector por abajo. Pasaron por la Tierra antes que fuese posible que los núcleos en los detectores los absorbieran.) Las energías de los neutrinos eran aproximadamente entre 8 MeV y 40 MeV. Si los neutrinos carecen de masa, entonces los neutrinos de todas las energías deben desplazarse juntos a la velocidad de la luz: los datos son consistentes con esta posibilidad. Los tiempos de llegada pueden mostrar la dispersión simplemente porque los neutrinos fueron creados en momentos diferentes a medida que el núcleo de la estrella se colapsó en una estrella de neutrones. Si la masa de los neutrinos es diferente de cero, entonces los neutrinos a baja energía deben moverse a una velocidad comparativamente lenta. Los datos son consistentes con un neutrino de 10 MeV que requiere alrededor de 10 s, más de lo que requeriría un fotón, para desplazarse desde la supernova hasta la Tierra. Encuentre el límite superior que esta observación establece sobre la masa de un neutrino. (Otras evidencias establecen un límite aún más restringido.)

la Λ^0 es 1115.7 MeV/c^2, la masa del π^- es 139.5 MeV/c^2 y la masa del protón es 983.3 MeV/c^2.

33. Un neutrón libre experimenta un decaimiento beta dando lugar a un protón, un electrón y un antineutrino, según la reacción $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$. Para simplificar las cosas, suponga que cuando un neutrón libre sufre un decaimiento beta solo se crean un protón y un electrón, según la reacción

$$n \longrightarrow p + e^-$$

y suponga que inicialmente el neutrón está en reposo en el laboratorio. a) Determine la energía liberada en esta reacción. b) Determine las velocidades del protón y el electrón después de la reacción. (En esta reacción se conservan la energía y la cantidad de movimiento.) c) ¿Alguna de estas partículas se desplaza a velocidades relativistas? Explique su respuesta.

34. La composición de quarks del protón es uud, mientras que la del neutrón es udd. Demuestre que la carga, el número bariónico y la extrañeza de estas partículas son iguales a las sumas de estos mismos números para sus quarks constituyentes.

35. En una cámara de burbujas se observa la desintegración $\Sigma^+ \rightarrow \pi^+ + n$. La figura P15.35 representa las trazas curvas de las partículas Σ^+ y π^+ y el rastro invisible del neutrón, en presencia de un campo magnético uniforme de 1.15 T dirigido hacia fuera de la página. Los radios de curvatura medidos son 1.99 m para la partícula Σ^+ y 0.580 m para la partícula π^+. a) Encuentre las cantidades de movimiento de las partículas Σ^+ y π^+, en unidades de MeV/c. b) El ángulo entre las cantidades de movimiento de las partículas Σ^+ y π^+ en el instante de la desintegración es 64.5°. Encuentre la cantidad de movimiento del neutrón. c) Calcule la energía total de la partícula π^+ y la del neutrón, a partir de sus masas conocidas (m_π = 139.6 MeV/c^2, m_n = 939.6 MeV/c^2), y la relación relativista energía-cantidad de movimiento. ¿Cuál es la energía total de la partícula Σ^+? d) Calcule la masa y la velocidad de la partícula Σ^+.

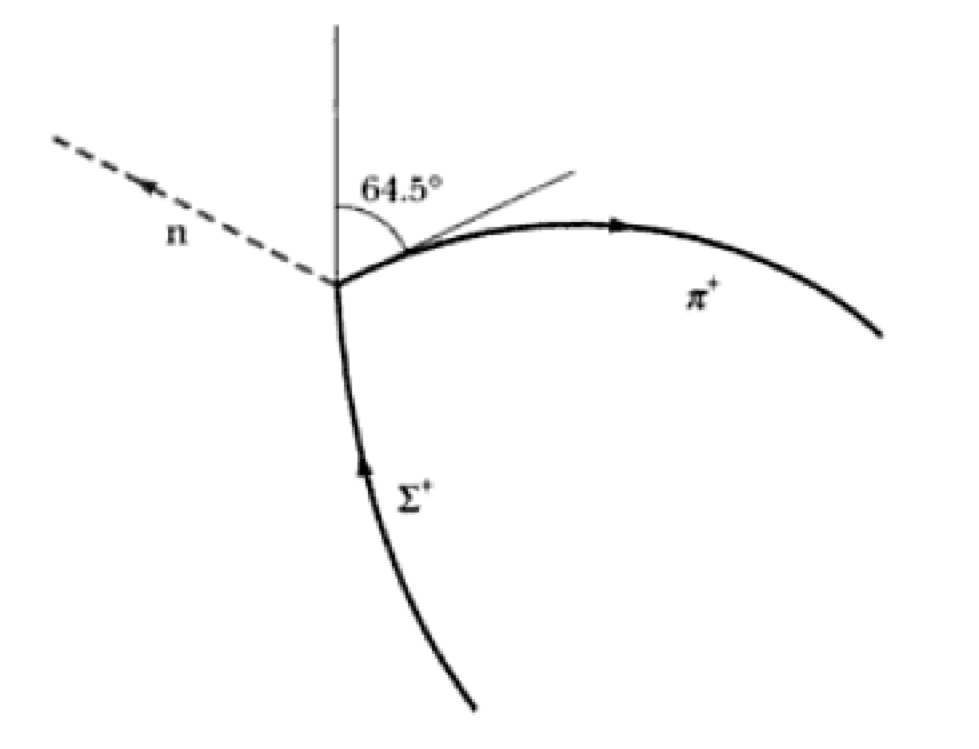


Figura P15.35

36. Se estima que la supernova 1987A, localizada a alrededor de 170 000 años luz de la Tierra, ha emitido una explosión de neutrinos que transportan una energía de $\sim 10^{46}$ J (figura P15.23). Suponga que la energía media del neutrino era de 6 MeV y que el área de la sección transversal del cuerpo de usted es igual a 5 000 cm^2. Hasta un orden de magnitud, ¿cuántos de tales neutrinos lo atravezarán?

37. Se ha sugerido el motor de un cohete para viajes espaciales que funcione utilizando como combustible fotones y aniquilación de materia-antimateria. Suponga que el combustible para un encendido de corta duración consta de N protones y N antiprotones, cada uno de masa m. a) Suponga que todo el combustible se aniquila para producir fotones. Cuando éstos son expulsados del cohete, ¿qué cantidad de movimiento es posible imprimirle? b) Si la mitad de los protones y los antiprotones se aniquilan entre sí y la energía liberada se utiliza para expulsar las partículas restantes, ¿qué cantidad de movimiento es posible imprimirle? ¿Cuál esquema produce el mayor cambio en la velocidad del cohete?



Vista aérea del Fermi National Accelerator Laboratory, Batavia, Illinois. El círculo más grande es el acelerador principal. Desde el acelerador se extienden tres líneas experimentales como tangentes. En la base de las líneas experimentales se observan las torres gemelas del edificio Wilson Hall de 16 pisos. (*Fermi National Accelerator Laboratory.*)

en el instante preciso será acelerada hasta la energía deseada. Debido a la naturaleza alternante del campo eléctrico, las partículas que llegan ligeramente después o antes que la partícula "ideal" son aceleradas de modo que tienden hacia la trayectoria de la partícula ideal. Esta característica se denomina *estabilidad de fase* y es una característica necesaria para los aceleradores. Luego, ambos electrones en el ion H^- son retirados por una lámina y los protones son introducidos en un acelerador circular denominado Synchrotron Booster.

La estructura de este amplificador también hace uso de campos electromagnéticos de RF para acelerar los protones en 550 keV a la vez. Los protones, que se mantienen en el interior del anillo debido a campos magnéticos, ahora se desplazan a una

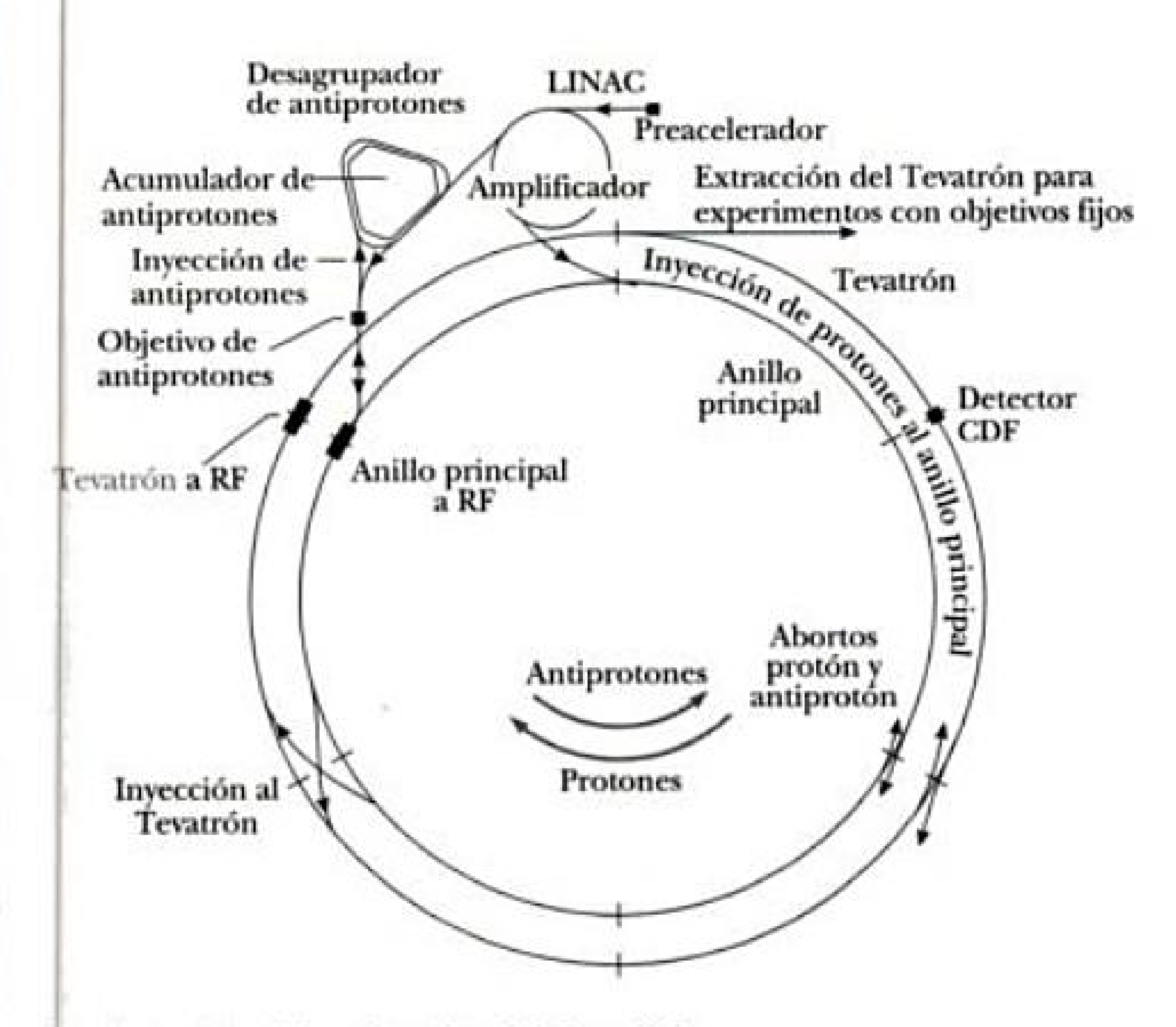


Figura 1 Complejo del acelerador del Fermilab.

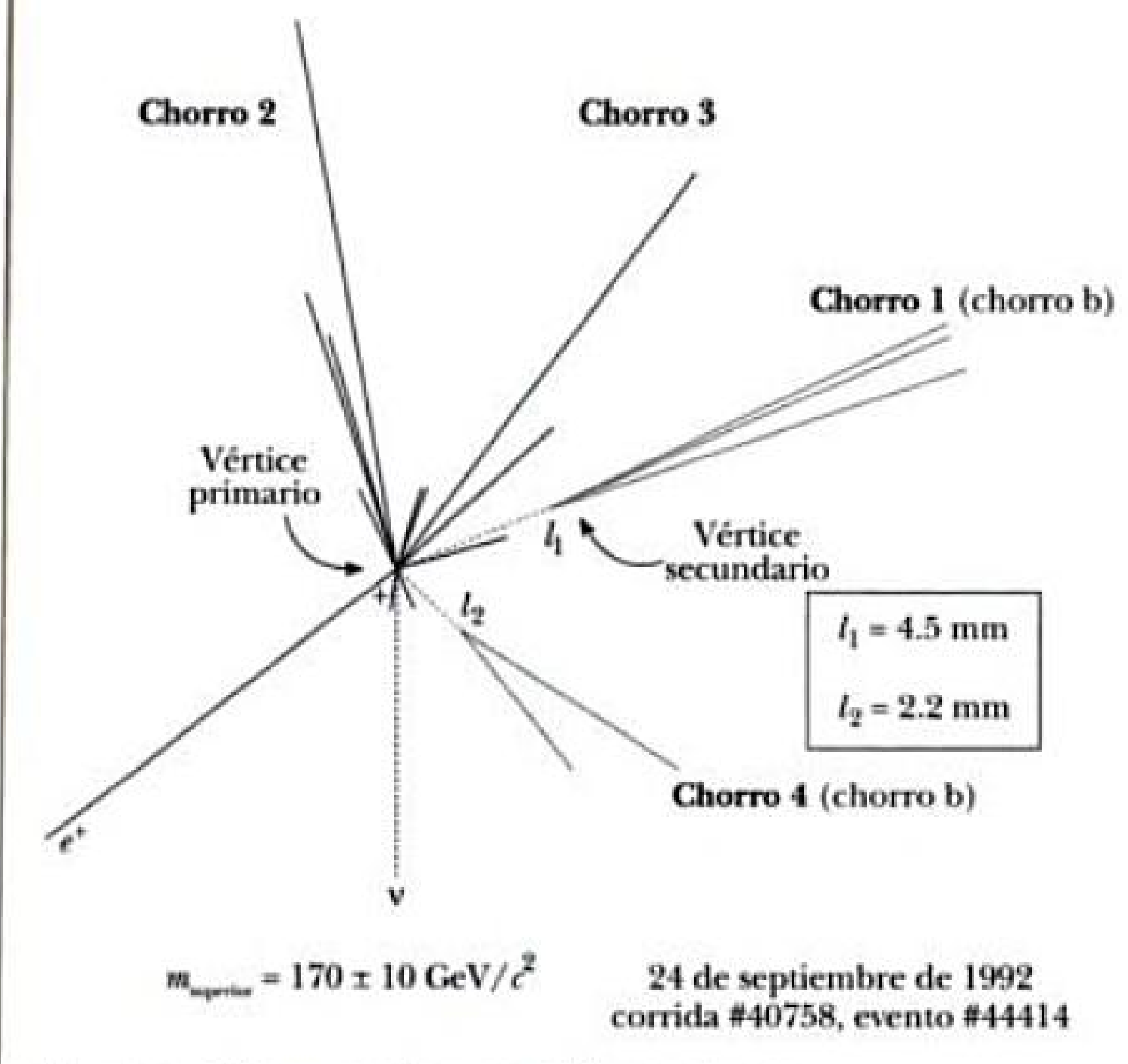


Figura 7 Esquema del evento de un posible quark top.

Calorimetría. Medición de la energía de las partículas. Ahora se cuenta con una instantánea del evento que indica la dirección y cantidad de movimiento de muchas de las partículas. Fuera de las cámaras de detección y el serpentín del solenoide hay calorímetros diseñados para medir la energía de las partículas. La energía de los chorros de hadrones es fundamental para la determinación de la masa del quark superior. La mayor parte de las partículas pierden energía en los calorímetros al producir una ducha de partículas de menor energía. La figura 8 ilustra los diversos efectos de estas partículas sobre el detector. Los calorímetros contienen capas alternadas de un "absorbente" como plomo o hierro, con capas "activas" de detectores para muestrear las partículas en la ducha a medida que ésta se desarrolla. Como es deseable contener toda la ducha, partículas de alta energía requieren calorímetros profundos, y como se quiere saber aproximadamente dónde se deposita la energía, los calorímetros están segmentados en cientos de torres de lectura. A diferencia de las cámaras de rastreo que son sensibles a partículas cargadas, los calorímetros también pueden proporcionar información sobre partículas neutras como fotones y neutrones. Como se verá, también son de utilidad para distinguir a los electrones de los hadrones.

Los electrones, debido a su baja masa, son acelerados por los protones en los núcleos del plomo, y pierden mucha de su energía a través de la *bremsstrahlung*, o "radiación de frenado". Debido a que la pérdida de energía debido a esta radiación para una partícula cae como M^{-2}, este proceso es despreciable para las partículas pesadas. Los hadrones, en vez de lo anterior, pierden la mayor parte de su energía a través de colisiones inelásticas con los núcleos del plomo, produciendo hadrones secundarios.

En estos dos casos, la pérdida de energía resulta en la producción de otras partículas de baja energía. Los fotones producto de la radiación de frenado se convertirán ulteriormente en pares electrón-positrón que continúan de la misma manera. Los hadrones también forman una ducha, produciendo hadrones de energía más baja. Finalmente, todas las partículas en la "ducha" llegan al reposo. Al medir la energía depositada en las capas activas del calorímetro se obtiene una medición aceptable de la energía de la partícula. Mientras más veces se muestrea la ducha es mejor la estimación de la energía de la partícula incidente.

En la práctica, aunque se utiliza el mismo método para medir las energías de los electrones y los hadrones, a menudo se usan dos dispositivos por separado: un calorímetro

APÉNDICE B

Tabla de masas atómicas selectas*

1 u = 931.494 013 MeV/c^2 = 1.660 538 73 × 10^{-27} kg

Número atómico Z	Elemento	Símbolo	Número de masa A	Masa atómica** (u)	Abundancia porcentual, o modo de desintegración (si es radiactivo)†	Vida media (si es radiactivo)
0	(Neutrón)	n	1	1.008665	β^-	10.6 min
1	Hidrógeno	H	1	1.007825	99.985	
	Deuterio	D	2	2.014102	0.015	
	Tritio	T	3	3.016049	β^-	12.33 años
2	Helio	He	3	3.016029	0.00014	
			4	4.002603	≈100	
3	Litio	Li	6	6.015122	7.5	
			7	7.016004	92.5	
4	Berilio	Be	7	7.016929	CE, γ	53.3 días
			8	8.005305	2α	6.7 × 10^{-17} s
			9	9.012182	100	
5	Boro	B	10	10.012937	19.8	
			11	11.009306	80.2	
6	Carbono	C	11	11.011433	β^+, CE	20.4 min
			12	12.000000	98.89	
			13	13.003355	1.11	
			14	14.003242	β^-	5730 años
7	Nitrógeno	N	13	13.005739	β^+	9.96 min
			14	14.003074	99.63	
			15	15.000109	0.37	
8	Oxígeno	O	15	15.003066	β^+, CE	122 s
			16	15.994915	99.76	
			18	17.999160	0.204	
9	Flúor	F	19	18.998403	100	
10	Neón	Ne	20	19.992440	90.51	
			22	21.991386	9.22	
11	Sodio	Na	22	21.994437	β^+, CE, γ	2.602 años
			23	22.989770	100	
			24	23.990964	β^-, γ	15.0 h
12	Magnesio	Mg	24	23.985042	78.99	
13	Aluminio	Al	27	26.981538	100	
14	Silicio	Si	28	27.976926	92.23	2.62 h
			31	30.975363	β^-, γ	
15	Fósforo	P	31	30.973761	100	
			32	31.973907	β^-	14.28 días

Número atómico Z	Elemento	Símbolo	Número de masa A	Masa atómica** (u)	Abundancia porcentual, o modo de desintegración (si es radiactivo)†	Vida media (si es radiactivo)
16	Azufre	S	32	31.972071	95.0	
			35	34.969032	β^-	87.4 días
17	Cloro	Cl	35	34.968853	75.77	
			37	36.965903		
18	Argón	Ar	40	39.962383	99.60	
19	Potasio	K	39	38.963707	93.26	
			40	39.963999	β^-, CE, γ, β^+	1.28×10^9 años
20	Calcio	Ca	40	39.962591	96.94	
21	Escandio	Sc	45	44.955910	100	
22	Titanio	Ti	48	47.947947	73.7	
23	Vanadio	V	51	50.943964	99.75	
24	Cromo	Cr	52	51.940512	83.79	
25	Manganeso	Mn	55	54.938049	100	
26	Hierro	Fe	56	55.934942	91.8	
27	Cobalto	Co	59	58.933200	100	
			60	59.933822	β^-, γ	5.271 años
28	Níquel	Ni	58	57.935348	68.3	
			60	59.930790	26.1	
			64	63.927969	0.91	
29	Cobre	Cu	63	62.929601	69.2	
			64	63.929766	β^-, β^+	12.7 h
			65	64.927794	30.8	
30	Zinc	Zn	64	63.929146	48.6	
			66	65.926036	27.9	
31	Galio	Ga	69	68.925581	60.1	
32	Germanio	Ge	72	71.922076	27.4	
			74	73.921178	36.5	
33	Arsénico	As	75	74.921597	100	
34	Selenio	Se	80	79.916522	49.8	
35	Bromo	Br	79	78.918338	50.69	
36	Kriptón	Kr	84	83.911508	57.0	
			89	88.917563	β^-	3.2 min
37	Rubidio	Rb	85	84.911792	72.17	
38	Estroncio	Sr	86	85.909265	9.8	
			88	87.905617	82.6	28.8 años
			90	89.907738	β^-	
39	Itrio	Y	89	88.905849	100	
40	Circonio	Zr	90	89.904702	51.5	
41	Niobio	Nb	93	92.906376	100	
42	Molibdeno	Mo	98	97.905407	24.1	
43	Tecnecio	Tc	97	96.906364		2.6×10^6 años
			98	97.907215	β^-, γ	4.2×10^6 años
44	Rutenio	Ru	102	101.904349	31.6	
45	Rodio	Rh	103	102.905504	100	
46	Paladio	Pd	106	105.903484	27.3	
47	Plata	Ag	107	106.905093	51.83	
			109	108.904756	48.17	
48	Cadmio	Cd	114	113.903359	28.7	
49	Indio	In	115	114.903879	95.7; β^-	5.1×10^{14} años

Número atómico Z	Elemento	Símbolo	Número de masa A	Masa atómica** (u)	Abundancia porcentual, o modo de desintegración (si es radiactivo)†	Vida media (si es radiactivo)
83	Bismuto	Bi	209	208.980384	100	
			211	210.987258	α, β^-, γ	2.15 min
84	Polonio	Po	207	206.981570	β^+	5.8 h
			208	207.981222	α	2.9 años
			209	208.982404	α, γ	102 años
			210	209.982848	α, γ	138.38 días
			214	213.995176	α	164 μs
			218	218.008966		3.11 min
85	Astatino	At	210	209.987131	β^+	8.1 h
			211	210.987470	CE, α	7.21 h
86	Radón	Rn	211	210.990575	α, β^+	14.6 h
			220	220.011368	α, γ	55.6 s
			222	222.017570	α, γ	3.8235 días
87	Francio	Fr	223	223.019731	α, β^-, γ	22.0 min
88	Radio	Ra	223	223.018501	α	11.43 d
			224	224.020186	α	3.66 d
			225	225.023604	β^-	14.8 días
			226	226.025402	α, γ	1.599×10^3 años
			228	228.031064	β^-	5.75 años
89	Actinio	Ac	227	227.027747	α, β^-, γ	21.773 años
90	Torio	Th	228	228.028715	α, γ	1.91 años
			230	230.033128	α, γ	7.54×10^4 años
			232	232.038051	100, α, γ	1.40×10^{10} años
91	Protactinio	Pa	231	231.035880	α, γ	3.25×10^4 años
			233	233.040242	β^-	27.0 días
92	Uranio	U	231	231.036264	CE	4.2 días
			232	232.037129	α, γ	68.9 años
			233	233.039628	α, γ	1.592×10^5 años
			234	234.040947	0.006, α, γ	2.45×10^5 años
			235	235.043924	0.72; α, γ	7.038×10^8 años
			236	236.045563	α, γ	2.342×10^7 años
			238	238.050785	99.275; α, γ	4.468×10^9 años
			239	239.054289	β^-	23.5 min
93	Neptunio	Np	237	237.048168	α	2.14×10^6 años
			239	239.052933	β^-, γ	2.36 días
94	Plutonio	Pu	239	239.052158	α, γ	2.41×10^4 años
			242	242.058737	α	3.75×10^5 años
			244	244.064198	α	8.00×10^7 años
95	Americio	Am	241	241.056824	α	432.7 años
			243	243.061372	α, γ	7.37×10^3 años
96	Curio	Cm	243	243.0614		29.1 años
			244	244.0627		18.1 años
			245	245.0655		8.48×10^3 años
			246	246.0672		4.76×10^3 años
			247	247.070346	α	15.6×10^6 años
			248	248.072343	α	3.48×10^5 años
97	Berkelio	Bk	247	247.070298	α, γ	1.4×10^3 años
			248	248.073107	α	9 años
			249	249.0750		3.26×10^2 años

Número atómico Z	Elemento	Símbolo	Número de masa A	Masa atómica** (u)	Abundancia porcentual, o modo de desintegración (si es radiactivo)†	Vida media (si es radiactivo)
98	Californio	Cf	249	249.074845	α	351 años
			251	251.079579	α	9.0×10^2 años
99	Einstenio	Es	252	252.082945	α, β^+	472 días
			254	254.088019	α, β^-, γ	276 días
100	Fermio	Fm	253	253.085173	CE, α, γ	3.0 días
			257	257.095099	α	100 días
101	Mendelevio	Md	258	258.098572	α	51.5 días
			260	260.1037		27.8 días
102	Nobelio	No	255	255.093258	α, β^+	3.1 min
			259	259.100932	CE, α	58 min
103	Laurencio	Lr	260	260.105314	CE, α	180 s
104	Rutherfordio	Rf	261	261.108685	CE, α	65 s
105	Dubnio	Db	262	262.113763	CE, α	34 s
106	Seaborgio	Sg	266	266.121955	α	~21 s
107	Borio	Bh	262	262.123028	α	102 ms
			264	264.124746	α	0.44 sec
108	Hassio	Hs	269	269.134086	α	9 s
			277			16.5 min
109	Meitnerio	Mt	266	266.137950	α	0.8 ms
			268	268.138809	α	70 ms
110	Darmstadtio	Ds	271	271.146081	α	1.1 ms
111	Ununumio‡	Uuu	272	272.1535		1.5×10^{-3} s
112	Ununbio‡	Uub	285			15.4 min
114	Ununcuadio‡	Uuq	289			30.4 s
116	Ununhexio‡	Uuh	289			0.60×10^{-3} s

*Los datos están tomados de *Chart of the Nuclides*, 12a. edición, General Electric, 1977, de C. M. Lederer y V. S. Shirley, eds., *Table of Isotopes*, 7a. edición, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1979, y de G. Audi y H. Wapstra, "The 1993 Atomic Mass Evaluation", *Nuclear Physics* A565, 1, 1993, the International Union of Pure and Applied Chemistry (IUPAC), y *Nuclear Wallet Cards* en Internet en **http://www.nndc.bnl.gov/wallet.**

**Las masas proporcionadas son las correspondientes al átomo neutro, incluyendo los electrones Z.

†La abreviatura CE significa "captura de electrón".

‡Los elementos 111, 112, 114 y 116 aún carecen de denominación. Se muestran las identificaciones provisionales de la IUPAC.

Premios Nobel

APÉNDICE C

A continuación se enumeran (e indican con una F) las personas galardonadas con el premio Nobel de Física, así como ganadores(as) relevantes del premio Nobel de Química (Q). Se proporcionan datos clave de la obra científica; a menudo ésta es bastante anterior a la obtención del premio Nobel.

1901 (F) *Wilhelm Roentgen*, por el descubrimiento de los rayos X(1895).

1902 (F) *Hendrik A. Lorentz*, por pronosticar el efecto Zeeman, y *Pieter Zeeman*, por el descubrimiento del efecto Zeeman y la separación de las líneas espectrales en campos magnéticos.

1903 (F) *Antoine-Henri Becquerel*, por el descubrimiento de la radiactividad (1896), y *Pierre* y *Marie Curie*, por estudiar la radiactividad.

1904 (F) *Lord Rayleigh*, por estudiar la densidad de los gases y el descubrimiento del argón.
(Q) *William Ramsay*, por el descubrimiento de los elementos gases inertes helio, neón, xenón y kriptón, y por haberlos ubicado en la tabla periódica.

1905 (F) *Philipp Lenard*, por estudiar los rayos catódicos y los electrones (1898-1899).

1906 (F) *J. J. Thomson*, por estudiar la descarga eléctrica a través de gases y por el descubrimiento del electrón (1897).

1907 (F) *Albert A. Michelson*, por inventar instrumentos ópticos y medir la velocidad de la luz (década de 1880).

1908 (F) *Gabriel Lippmann*, por elaborar la primera placa fotográfica a color utilizando métodos de interferencia (1891).
(Q) *Ernest Rutherford*, por descubrir que los átomos pueden separarse por rayos alfa y por estudiar la radiactividad.

1909 (F) *Guglielmo Marconi* y *Carl Ferdinand Braun*, por desarrollar la telegrafía inalámbrica.

1910 (F) *Johannes D. van der Waals*, por estudiar la ecuación de estado de gases y líquidos (1881).

1911 (F) *Wilhelm Wien*, por descubrir la ley de Wien, que proporciona el pico del espectro de un cuerpo negro (1893).
(Q) *Marie Curie*, por el descubrimiento del radio y el polonio (1898) y el aislamiento del radio.

1912 (F) *Nils Dalén*, por inventar los reguladores automáticos de gas en sistemas de alumbrado doméstico.

1913 (F) *Heike Kamerlingh Onnes*, por el descubrimiento de la superconductividad y licuefacción del helio (1908).

1914 (F) *Max T. F. von Laue*, por estudiar los rayos X a partir de su difracción en cristales y demostrar que los rayos X son ondas electromagnéticas (1912).
(Q) *Theodore W. Richards*, por determinar los pesos atómicos de 60 elementos, indicando la existencia de isótopos.

1915 (F) *William Henry Bragg* y *William Lawrence Bragg*, su hijo, por estudiar la difracción de rayos X en cristales.

1917 (F) *Charles Barkla*, por estudiar átomos mediante dispersión de rayos X (1906).

1918 (F) *Max Planck*, por el descubrimiento de los cuantos de luz (1900).

1919 (F) *Johannes Stark*, por el descubrimiento del efecto Stark y la separación de las líneas espectrales en campos eléctricos (1913).

1920 (F) *Charles-Édouard Guillaume*, por el descubrimiento del invar, una aleación de níquel-acero con bajo coeficiente de dilatación.
(Q) *Walther Nernst*, por estudiar cambios térmicos en reacciones químicas y formular la tercera ley de la termodinámica (1918).

1921 (F) *Albert Einstein*, por explicar el efecto fotoeléctrico y por sus servicios a la física teórica (1905).
(Q) *Frederick Soddy*, por estudiar aspectos químicos de sustancias radiactivas y descubrir isótopos (1912).

1922 (F) *Niels Bohr*, por el modelo del átomo y su radiación (1913).
(Q) *Francis W. Aston*, por usar el espectrógrafo de masas para estudiar pesos atómicos, descubriendo así 212 de los 287 isótopos naturales.

1923 (F) *Robert A. Millikan*, por medir la carga de un electrón (1911) y por estudiar experimentalmente el efecto fotoeléctrico (1914).

1924 (F) *Karl M. G. Siegbahn*, por su obra relacionada con espectroscopía de rayos X.

1925 (F) *James Franck* y *Gustav Hertz*, por el descubrimiento del efecto Franck-Hertz en colisiones electrón-átomo.

1926 (F) *Jean-Baptiste Perrin*, por estudiar el movimiento browniano para validar la estructura discontinua de la materia y medir el tamaño de los átomos.

1927 (F) *Arthur Holly Compton*, por el descubrimiento del efecto Compton sobre los rayos X, su cambio en longitud de onda cuando chocan contra la materia (1922), y *Charles T. R. Wilson*, por inventar la cámara de nubes, usada para estudiar partículas cargadas (1906).

1928 (F) *Owen W. Richardson*, por estudiar el efecto termoiónico y los electrones emitidos por metales calientes (1911).

1929 (F) *Louis Victor de Broglie*, por descubrir el efecto ondulatorio de los electrones (1923).

1930 (F) *Chandrasekhara Venkata Raman*, por estudiar la dispersión de Raman, la dispersión de la luz por átomos y moléculas con un cambio en longitud de onda (1928).

1932 (F) *Werner Heisenberg*, por crear la mecánica cuántica (1925).

1933 (F) *Erwin Schrödinger* y *Paul A. M. Dirac*, por desarrollar la mecánica ondulatoria (1925) y la mecánica cuántica relativista (1927).
(Q) *Harold Urey*, por el descubrimiento del hidrógeno pesado, deuterio (1931).

1935 (F) *James Chadwick*, por el descubrimiento del neutrón (1932).
(Q) *Irène* y *Frédéric Joliot-Curie*, por sintetizar nuevos elementos radiactivos.

1936 (F) *Carl D. Anderson*, en particular por el descubrimiento del positrón y en general por el descubrimiento de la antimateria (1932), y *Victor F. Hess*, por el descubrimiento de los rayos cósmicos.
(Q) *Peter J. W. Debye*, por estudiar momentos dipolares y la difracción de rayos X y electrones en gases.

1937 (F) *Clinton Davisson* y *George Thomson*, por el descubrimiento de la difracción de electrones por cristales, confirmando la hipótesis de De Broglie (1927).

1938 (F) *Enrico Fermi*, por producir elementos transuránicos mediante radiación de neutrones (1934-1937).

1939 (F) *Ernest O. Lawrence*, por inventar el ciclotrón.

1943 (F) *Otto Stern*, por desarrollar estudios sobre haces moleculares (1923), y usarlos para descubrir el momento magnético del protón (1933).

1944 (F) *Isidor I. Rabi*, por el descubrimiento de la resonancia magnética nuclear en haces atómicos y moleculares.
(Q) *Otto Hahn*, por descubrir la fisión nuclear (1938).

1945 (F) *Wolfgang Pauli*, por el descubrimiento del principio de exclusión (1924).

1946 (F) *Percy A. Bridgman*, por estudiar física a altas presiones.

1947 (F) *Edward V. Appleton*, por estudiar la ionosfera.

1971 (F) *Dennis Gabor*, por desarrollar la holografía (1947).
(Q) *Gerhard Herzberg* por el estudio espectroscópico de la estructura de las moléculas.

1972 (F) *John Bardeen, Leon N. Cooper* y *John Robert Schrieffer*, por explicar la superconductividad (1957).

1973 (F) *Leo Esaki*, por descubrir el fenómeno de tunelaje en semiconductores, *Ivar Giaever* por descubrir el tunelaje en superconductores y *Brian D. Josephson*, por pronosticar el efecto Josephson, que implica el tunelaje de electrones pareados (1958-1962).

1974 (F) *Anthony Hewish*, por el descubrimiento de los pulsares, y *Martin Ryle*, por desarrollar la radiointerferometría.

1975 (F) *Aage N. Bohr, Ben R. Mottelson*, y *James Rainwater*, por haber descubierto por qué algunos núcleos asumen formas asimétricas..

1976 (F) *Burton Richter* y *Samuel C. C. Ting*, por el descubrimiento de la partícula J/psi, la primera partícula encantada (1974).

1977 (F) *John H. Van Vleck, Nevill F. Mott*, y *Philip W. Anderson*, por estudiar sólidos desde el punto de vista mecánico-cuántico.
(Q) *Ilya Prigogine*, por extender la termodinámica para mostrar cómo la vida hubiese podido surgir de frente a la segunda ley.

1978 (F) *Arno A. Penzias* y *Robert W. Wilson*, por el descubrimiento de la radiación de cuerpo negro (1965), y *Pyotr Kapitsa*, por sus estudios del helio líquido .

1979 (F) *Sheldon L. Glashow, Abdus Salam* y *Steven Weinberg*, por desarrollar la teoría que unificó las fuerzas débil y electromagnética (1958-1971).

1980 (F) *Val Fitch* y *James W. Cronin*, por descubrir la violación de la paridad de carga (PC) en 1964, lo que hizo posible explicar la dominancia cosmológica de la materia sobre la antimateria.

1981 (F) *Nicolaas Bloembergen* y *Arthur L. Schawlow*, por desarrollar la espectroscopía láser, y *Kai M. Siegbahn*, por desarrollar la espectroscopía de electrones de alta resolución (1958).

1982 (F) *Kenneth G. Wilson*, por desarrollar un método para construir teorías de transiciones de fase para analizar fenómenos críticos.

1983 (F) *William A. Fowler*, por estudios teóricos de nucleosíntesis astrofísica, y *Subramanyan Chandrasekhar*, por estudiar procesos físicos relevantes para la estructura y evolución estelar, incluyendo el pronóstico de estrellas enanas blancas (1930).

1984 (F) *Carlo Rubbia*, por descubrir las partículas W y Z, verificar la unificación electrodébil, y *Simon van der Meer*, por desarrollar el método de enfriamiento estocástico del haz del CERN, lo que permitió el descubrimiento (1982-1983).

1985 (F) *Klaus von Klitzing*, por el efecto Hall cuantizado, relacionado con la conductividad en presencia de un campo magnético (1980).

1986 (F) *Ernst Ruska*, por inventar el microscopio de electrones (1931), y *Gerd Binnig* y *Heinrich Rohrer*, por inventar al microscopio electrónico de tunelización por barrido (1981).

1987 (F) *J. Georg Bednorz* y *Karl Alex Müller*, por el descubrimiento de superconductividad a alta temperatura (1986).

1988 (F) *Leon M. Lederman, Melvin Schwartz* y *Jack Steinberger*, por un experimento conjunto que condujo al desarrollo de una nueva herramienta para estudiar la fuerza nuclear débil, que afecta la desintegración radiactiva de los átomos.

1989 (F) *Norman Ramsay*, por varias técnicas en física atómica; y *Hans Dehmelt* y *Wolfgang Pauli* por el desarrollo de técnicas para atrapar partículas con carga simple.

1990 (F) *Jerome Friedman, Henry Kendall* y *Richard Taylor,* por experimentos relevantes para el desarrollo del modelo de quark.

1991 (F) *Pierre-Gilles de Gennes,* por descubrir que los métodos desarrollados para estudiar fenómenos de orden en sistemas simples pueden generalizarse a formas más complejas de la materia, en particular a cristales líquidos y polímeros.

1992 (F) *George Charpak,* por desarrollar detectores que rastrean las trayectorias de partículas subatómicas evanescentes producidas en aceleradores de partículas.

1993 (F) *Russell Hulse* y *Joseph Taylor,* por descubrir evidencia de las ondas gravitacionales.

1994 (F) *Bertram N. Brockhouse* y *Clifford G. Schull,* por su obra pionera en dispersión de electrones.

1995 (F) *Martin L. Perl,* por descubrir la partícula tau, y *Frederick Reines,* por detectar por vez primera un neutrino.

1996 (F) *David M. Lee, Douglas C. Osheroff* y *Robert C. Richardson,* por desarrollar un superfluido usando helio-3.

1997 (F) *Steven Chu, Claude Cohen-Tannoudji* y *William D. Phillips,* por desarrollar métodos para enfriar y atrapar átomos con luz láser.

1998 (F) *Robert B. Laughlin, Horst L. Störmer* y *Daniel C. Tsui,* por descubrir una nueva forma de fluido cuántico con excitaciones cargadas fraccionariamente.

1999 (F) *Gerardus 't Hooft* y *Martinus J. G. Veltman,* por estudios sobre la estructura cuántica de interacciones electrodébiles en física.

2000 (F) *Zhores I. Alferov* y *Herbert Kroemer,* por desarrollar heteroestructuras semiconductoras usadas en electrónica y optoelectrónica de alta velocidad, y *Jack St. Clair Kilby,* por participar en la invención del circuito integrado.

2001 (F) *Eric A. Cornell, Wolfgang Ketterle* y *Carl E. Wieman,* por el logro de la condensación de Bose-Einstein en gases diluidos de átomos álcali.

2002 (F) *Raymond Davis Jr.* y *Masatoshi Koshiba,* por la detección de neutrinos cósmicos, y *Riccardo Giaconni,* por contribuciones a la astrofísica que condujeron al descubrimiento de fuentes de rayos cósmicos.

2003 (F) *Alexei Abrikosov, Anthony Leggett* y *Vitaly Ginzburg,* por sus contribuciones al estudio de la superconductividad y superfluidez, que iluminaron las extravagantes propiedades de la materia a temperaturas extremadamente bajas.

23. [Kr]$4d^{10}$ posee la menor energía, pero [Kr]$4d^9 5s^1$ tiene dos espines no pareados más. Así, en este caso se viola la regla de Hund (ya que las subcapas llenas son especialmente estables). El elemento es Pd.

25. Entre 10^4 K y 10^5 K

27. a) $\sqrt{f} = \sqrt{\frac{5}{36}\left(\frac{13.6 \text{ eV}}{h}\right)}(Z-7)$

b) Teórica: pendiente = 0.214×10^8 Hz$^{1/2}$, ordenada al origen = 7 Experimental: pendiente = 0.21×10^8 Hz$^{1/2}$, ordenada al origen = 6.3.
c) $Z - I = Z - 6.3$

CAPÍTULO 10

3. $s_{\bar{v}} = 1.58$ cm, $s_{rms} = 1.45$ cm, $s_{mp} = 1.78$ cm
5. $P(E) = 0.385\ e^{-(0.408\ E/\bar{E})}$
7. b) $2e^{-2p\mathcal{E}/k_BT}$ c) $T = 2.83$ K

d) $\bar{E} = \frac{2p\mathcal{E}}{1 + \frac{1}{2}e^{2p\mathcal{E}/k_BT}}$ e) $E_{TOTAL} = N\bar{E}$

f) C es un máximo en $2p\mathcal{E}/k_BT = 2.65$ o $T = 0.055$ K

9. $\bar{v} = 1.51 \times 10^3$ m/s, de modo que es posible utilizar la fórmula clásica del desplazamiento Doppler::

$$\frac{\Delta f}{f_0} = 1.01 \times 10^{-5}$$

11. $\bar{n}(0E)$ hasta $\bar{n}(5E) = 2$, $\bar{n}(6E) = 1.89$, $\bar{n}(7E) = 1.78$, $\bar{n}(8E) = 1.55$, $\bar{n}(9E) = 1.22$, $\bar{n}(10E) = 0.777$, $\bar{n}(11E) = 0.444$, $\bar{n}(12E) = 0.222$, $\bar{n}(13E) = 0.111$ y $\bar{n}(14E) = 0$, $E_F(0) = 9E$
13. b) T_E(plomo) ≈ 100 K, T_E(aluminio) ≈ 300 K y T_E(silicio) ≈ 500 K
15. a) 1.80×10^{29} electrones libres/m^3 b) 3
17. $E_F = 33.4$ MeV, $\bar{E} = 20$ MeV
19. 93.8%
21. a) 2.54×10^{28} electrones/m^3 b) 3.15 eV
c) 1.05×10^6 m/s
23. 3.40×10^{17} electrones

CAPÍTULO 11

1. a) 1.28 eV b) $\sigma = 0.272$ nm, $\varepsilon = 4.65$ eV
c) 6.55 nN
3. $R_0 = (I/\mu)^{1/2} = 1.13$ Å, igual que en el ejemplo 11.1.
5. a) 8.10 cm, 3.70 GHz, b) 4.53×10^{-45} kg · m^2
7. 5.69×10^{12} rad/s
$\ell = 0$ $E_{rot} = 0$
$\ell = 1$ $E_{rot} = 2.62 \times 10^{-3}$ eV
9. a) $\ell = 2$ $E_{rot} = 7.86 \times 10^{-3}$ eV
$\ell = 3$ $E_{rot} = 1.57 \times 10^{-3}$ eV
b) $K = 480$ N/m, $f = 8.66 \times 10^{13}$ Hz
c) $E_0 = 0.179$ eV, $A_0 = 0.0109$ nm, $E_1 = 0.538$ eV, $A_1 = 0.0189$ nm d) rotacional: 473 μm; de vibración: 3.46 μm
11. $E_{rot} = \hbar^2/mR_0^2[\ell(\ell + 1)]$, $\ell = 0, 1, 2, \ldots$
13. a) $R_\ell = R_0 + [\ell(\ell + 1)\hbar^2/(\mu\omega_0)^2]/R_0^3$
b) $U_0 \approx \ell(\ell + 1)\hbar^2/2\mu R_0^2$,
$\omega_\ell^2 \approx \omega_0^2 + 3[\ell(\ell + 1)\hbar^2]/\mu^2 R_0^4$

15. $\Delta E = \hbar\omega[1 - (v + 1)\hbar\omega/2U_0]$, $v_{máx} = \frac{2U_0}{\hbar\omega} - 1$,
$E_{máx} = U_0 - \frac{(\hbar\omega)^2}{16U_0}$

17. Cuando la energía del estado fundamental de rotación-vibración($v = 0$, $1 = 0$) se toma en cuenta ($E = 0.268$ eV por el problema 16), los resultados numéricos para $1 = 1, 2$ coinciden con las predicciones de la ecuación 11.10 con $\frac{\hbar^2}{I_{CM}}$ $\frac{\hbar^2}{I_{CM}}$ eV. Para valores mayores de 1. $E = 0.283$ eV ($v = 0$, $\ell = 1$) y $E = 0.313$ eV ($v = 0$, $\ell = 2$).
19. Estado fundamental: $E = (2x^2\hbar^2/mL^2)$, donde x es la raíz más pequeña de la ecuación $\tan x = -(2\hbar^2/mSL)x$. Primer estado excitado: $E = (2\pi^2\hbar^2/mL^2)$. Cuando $S \to \infty$, $x \to \pi$ y las dos energías coinciden; cuando $S \to 0$, $x \to \pi/2$, y las energías se reducen a los estados excitados fundamental y primero de un pozo infinito sin barrera.
21. a) $R_0 = 1.44$ bohrs
b) $K = 1.03$ Ry/bohr^2 = 801 N/m
23. El cruce requiere alrededor de 6.1 fs (= 6.1×10^{-15} s) para una frecuencia de cruce de 1.64×10^{14} Hz. Los estados de enlace y antienlace poseen energías $E = 6.379$ eV y $E = 6.718$ eV, respectivamente, para una separación $\Delta E = 0.339$ eV y una frecuencia característica $\Delta E/h = 8.20 \times 10^{13}$ Hz, aproximadamente la mitad de la frecuencia de cruce.

CAPÍTULO 12

3. 7.84 eV/par de iones
7. a) 7.12 eV/par de iones b) 6.39 eV/par de átomos
11. c) 3.9×10^5 cm/s d) 0.36 Ωm
13. a) 3.80×10^{-14} s b) 52.7 nm (c) $L/d \approx 200$
15. a) 2.75×10^{14} Hz b) 1 090 nm (IR)
19. b) 0.36 nm c) 6.7×10^{-4} nm. El factor de control es la longitud de la cavidad.
21. b) 10.7 kA
25. a) 2.98 mA b) 67.1 Ω c) 8.39 Ω

CAPÍTULO 13

1. a) 1.9 fm b) 7.44 fm c) 3.92
3. 8.57×10^{13}
5. a) 4.55×10^{-13} m b) 6.03×10^6 m/s
7. 2.2×10^{-6} eV
9. 30% ^{63}Cu
11. 2.657 MeV/nucleón
13. a) ^{139}Cs con $N/Z = 1.53$
b) ^{139}La, con 8.353 MeV/nucleón
c) ^{139}Cs, con una masa de 138.913 u
15. a) 8.03 MeV/nucleón b) 8.55 MeV/nucleón
c) 8.66 MeV/nucleón d) 7.92 MeV/nucleón
17. 160 MeV
19. a) $U = 3k\frac{(Ze)^2}{5R}$ b) 2.88×10^{-14} $(A^{5/3})$ J

c) 52.1 MeV
21. a) 0.805 h^{-1} b) 0.861 h
23. a) $\lambda = 1.55 \times 10^{-5}$ s^{-1}; $T_{1/2} = 12.4$ h
b) 2.39×10^{13} átomos c) 1.87 mCi

25. 36.3×10^{-6} g
27. 0.055 mCi
29. 9.46×10^{9}
31. b) $\lambda = 0.25\ \text{h}^{-1}$; $T_{1/2} = 2.77$ h c) 4×10^{3} conteos/min
d) 9.59×10^{6}
33. a) 18.3 conteos/min
35. 11.8 decaimientos/min · g
41. 2.26 MeV
43. b) 4.79 MeV c) 0.08 MeV d) El Po hijo transporta alrededor de 3×10^{-6} de la energía cinética en el decaimiento beta.
45. a) $Q = -1.82$ MeV, por lo que la reacción *no puede* ocurrir.
b) $Q = -1.68$ MeV, por lo que la reacción *no puede* ocurrir.
c) $Q = 1.86$ MeV, por lo que la reacción *sí puede* ocurrir.
47. Aplicando el principio de incertidumbre, se encuentra que los electrones en un núcleo poseen una energía aproximadamente igual a 100 MeV. Debido a que los electrones más energéticos emitidos en decaimiento beta poseen energías inferiores a 10 MeV, en el núcleo no hay electrones.
51. 18.6 keV
53. a) 3.96×10^{9} años b) No puede ser más antigua. La roca podría ser menos antigua si inicialmente hubiese algo de Sr.
55. b) R/λ
57. 2.66 días
59. De 5 400 años a 6 800 años
61. a) 4 Giga años b) 0.0199 y 4.60

CAPÍTULO 14

1. a) −2.4386 MeV b) 2.5751 MeV
3. 5.70 MeV
5. 17.35 MeV
7. a) $Q = -1.19$ MeV, $K_{cr} = 1.53$ MeV b) 17.35 MeV
9. b) 1.53 MeV
11. 0.0266 b
13. a) 0.0373 b) 0.0663 c) ≈ 1 d) 0.1 a 10 eV
15. a) 0.86 b) 6.1×10^{11} protones/s
c) 8.7×10^{10} protones/s
17. 2.25×10^{12}
19. 25
21. 200.6 MeV
23. a) $4.84\ V^{-1/3}$ b) $6\ V^{-1/3}$ c) $6.30\ V^{-1/3}$
d) Esfera e) Paralelepípedo
25. a) 3333 MW b) 2333 MW c) 1.04×10^{20} eventos/s
d) 1.34×10^{3} kg e) 3.7×10^{-8} kg/s
27. a) 2.70×10^{-15} m b) 720 keV
c) $v_F = v_0 m_D/(m_D + m_T)$ d) 1.2 MeV
e) Posiblemente por tunelaje
29. a) $K_n = 14.1$ MeV, $K_\alpha = 3.45$ MeV b) Sí; debido a que el neutrón carece de carga, no está confinado en el campo **B**, y sólo K_α contribuye directamente a lograr ignición crítica.
31. a) 1.9×10^{9} K b) 355 kJ
33. a) 52×10^{6} K b) $1.943 + 1.709 + 7.551 + 7.297 + 2.242 + 4.966 = 25.75$ MeV
c) Se pierde la mayor parte de la energía, ya que las secciones transversales de los neutrinos son tan bajas que no interactúan con la materia.
35. 5.3×10^{23} J
37. a) 3 000 MW b) 5.2×10^{6} L
39. a) $2.3 \times 10^{-19}\ Z_1 Z_2$ J b) 0.14 MeV
41. a) 2.63×10^{33} J b) 119 miles de millones de años.
43. a) $10^{14}/\text{cm}^3$ b) $2.2 \times 10^{5}\ \text{J/m}^3$ c) 2.35 T
45. a) 1.4×10^{-3} cm b) $I/I_0 = 0.426$
47. 3.85 cm
49. a) 0.0025 rem b) 38 veces la radiación de fondo de 0.13 rem/año.
51. Los dos trabajadores reciben la misma dosis en rad.
53. 18.8 J
55. a) 10 b) 10^{8}
59. a) $\sim 1 \times 10^{8}\ \text{m}^3$ b) $\sim 1 \times 10^{13}$ J c) $\sim 10^{14}$ J
d) ~ 10 kilotones

CAPÍTULO 15

1. 10^{-23} s
3. $f_{\text{mín}} = 2.26 \times 10^{23}$ Hz, $\lambda_{\text{máx}} = 1.32 \times 10^{-15}$ m
5. 2.2×10^{-18} m
9. a) No ocurre (viola el número bariónico).
b) Sí ocurre.
c) No ocurre (viola el número bariónico).
d) Sí ocurre.
e) Sí ocurre.
f) No ocurre (viola el número bariónico y el número muónico-leptónico).
11. a) Número de electrón y muónico-leptónico.
b) Número de electrónico-leptónico.
c) Extrañeza y carga.
d) Número bariónico.
e) Extrañeza.
13. a) 5.63 GeV b) 5.64 GeV
15. Por ejemplo, 15.5, $E = 48\%$; para el ejercicio 3, $E = 48\%$, $E = 46\%$; para el problema 13, $E = 33\%$.
17. Un neutrón, udd.
19. $m_u = 312.3\ \text{MeV}/c^2$, $m_d = 313.6\ \text{MeV}/c^2$
21.
u d d
W^-
e^-
$\bar{\nu}_e$
u d u
23. $19\ \text{eV}/c^2$
25. $K_p = 5.4$ MeV, $K_\pi = 32.3$ MeV
27. 9.3 cm
29. Un neutrón.
31. a) A Z^0 un bosón b) Un gluon
33. a) 0.782 MeV b) Velocidad del protón = $0.001266c$ = 380 km/s, velocidad del electrón = $0.9185c = 2.76 \times 10^{8}$ m/s c) el electrón es relativista; el protón no.
35. a) $p_\Sigma = 686\ \text{MeV}/c$, $p_\pi = 200\ \text{MeV}/c$ b) 627 MeV/c
c) $E_\pi = 244$ MeV, $E_n = 1\,130$ MeV, $E_\Sigma = 1\,370$ MeV
d) $1\,190\ \text{MeV}/c^2$, $0.500c$
37. a) $2Nmc$ b) $3^{1/2}Nmc$

Índice

Los números de página seguidos por una "f" indican figuras; por una "n", notas de pie de página; por una "t", tablas.

LOS AUTORES FIJARON TRES OBJETIVOS PRINCIPALES PARA ESTA OBRA:

1.- PROPORCIONAR EXPLICACIONES CLARAS, Y SIN COMPLICACIONES MATEMÁTICAS, DE CONCEPTOS Y TEORÍAS DE LA FÍSICA MODERNA.

2.- DARLE SOPORTE A ESAS EXPLICACIONES MEDIANTE APLICACIONES Y EJEMPLOS MUY ACTUALIZADOS.

3.- HACER MÁS HUMANO EL TEXTO CON NOTAS HISTÓRICAS BREVES DEL DESARROLLO DE LA FÍSICA MODERNA.

LO ANTERIOR, SUMADO A LA EXHAUSTIVA REVISIÓN Y A LAS SIGUIENTES CARACTERÍSTICAS, HACEN DE ESTE LIBRO EL MÁS ROBUSTO Y DIDÁCTICO EN ESTE TEMA.

- AMPLIO SITIO EN INTERNET QUE COMPLEMENTA Y ENRIQUECE EL MATERIAL.
- GRAN CANTIDAD DE EJEMPLOS RESUELTOS PARA QUE EL ESTUDIANTE COMPRENDA LOS CONCEPTOS Y LA CADENA DE RAZONAMIENTOS QUE LLEVAN A RESOLVER PROBLEMAS REALES.
- PRESENTA ENSAYOS DE DIVERSOS AUTORES, INVOLUCRADOS DIRECTAMENTE CON EL DESARROLLO DE ALGUNOS TEMAS ANALIZADOS.

MÉXICO Y AMÉRICA CENTRAL
Tel. 52(55) 1500-6000
Fax 52(55) 5281-2656
editor@thomsonlearning.com.mx
México, D.F., MÉXICO

AMÉRICA DEL SUR
thomson@thomsonlearning.com.ar
Buenos Aires, ARGENTINA

EL CARIBE
Tel. (787) 641-11-12
Fax (787) 641-11-19
San Juan, PUERTO RICO

PACTO ANDINO
Tel. (571) 340-9470
Fax (571) 340-9475
cliente@thomsonlearning.com.co
Bogotá, COLOMBIA

ESPAÑA
Tel. (3491) 446-3350
Fax (3491) 445-6218
clientes@paraninfo.es
Madrid, ESPAÑA



herramienta interactiva de aprendizaje sofisticada bastante flexible y de considerable alcance. Mediante el empleo de *QMTools*, los estudiantes serán capaces de elaborar paquetes de ondas de materia y estudiar su evolución temporal, encontrar energías y funciones de onda de estado estacionario, y determinar la probabilidad de transmisión y reflexión de partículas desde casi cualquier pozo o barrera de potencial. El acceso a *QMTools* está disponible en línea en **http://info.brookscole.com/mp3e**.

Nota importante: la administración de esta página en internet es responsabilidad de nuestra editora en Estados Unidos, Brooks Cole, por lo que Thomson Learning Latin America no se hace responsable por los cambios que pudieran ocurrir en estos materiales. Sin embargo, le sugerimos navegar frecuentemente dicho sitio a fin de mantenerse al tanto de cualquier actualización.

Estilo. Hemos intentado redactar este libro con un estilo claro y sucinto pero también informal, esperando que los lectores encuentren atractivo y agradable el texto. Se han definido cuidadosamente todos los términos nuevos, y hemos tratado de evitar la jerga.

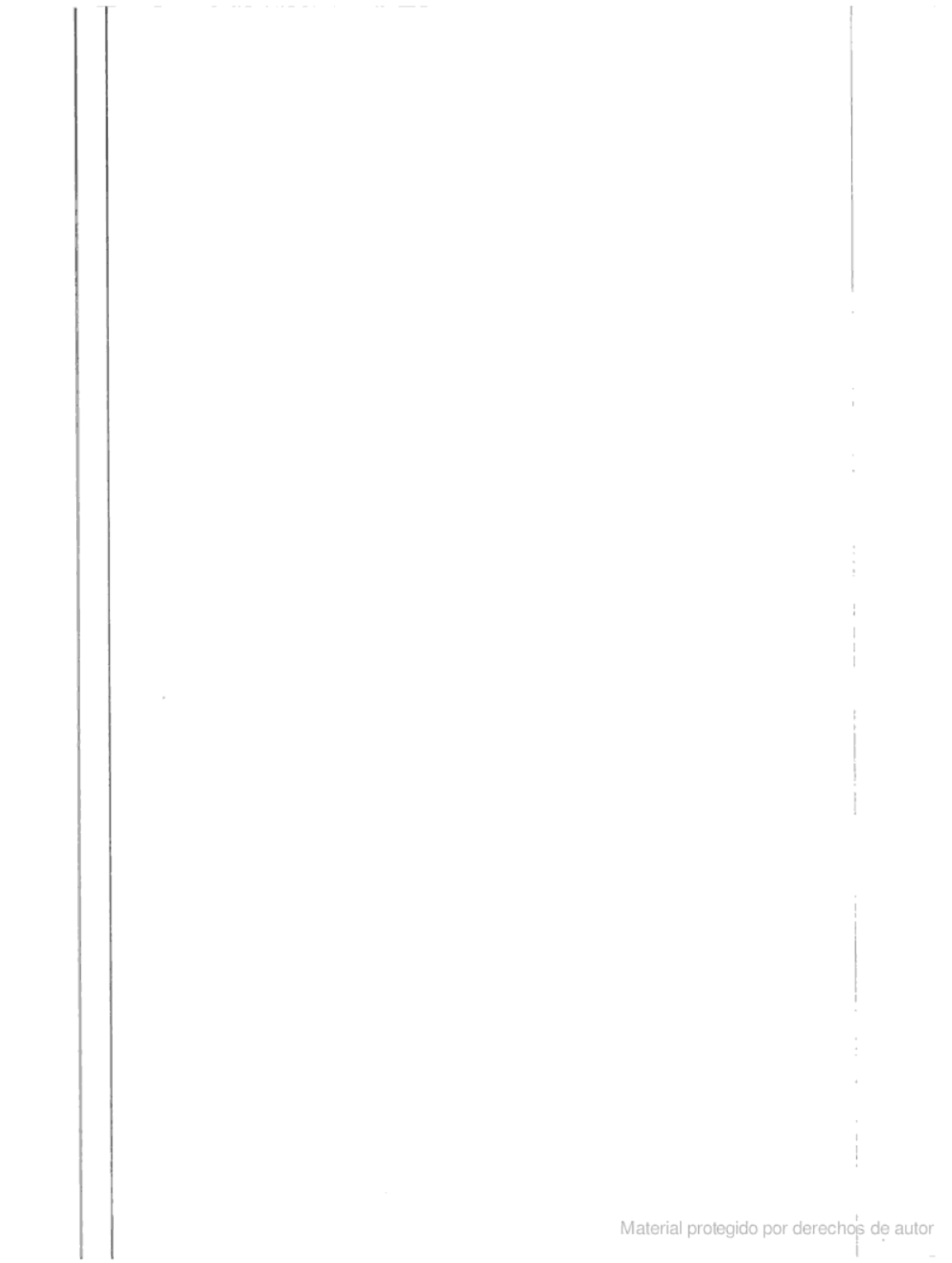
Ejemplos trabajados. Como ayuda para comprender tanto los conceptos como la cadena de razonamiento necesarios para resolver problemas realistas se ha introducido un gran número de ejemplos trabajados de dificultad variable. En muchos casos, estos ejemplos sirven como modelos para resolver algunos problemas presentados al final de cada capítulo. Los ejemplos están realzados con barras de colores para facilitar su localización, y la mayor parte de los ejemplos cuentan con títulos que describen su contenido.

Ejercicios a continuación de los ejemplos. Como característica agregada, luego de muchos de los ejemplos trabajados se presentan inmediatamente ejercicios con respuestas. Se pretende que estos ejercicios hagan más interactivo el texto con el estudiante y prueben de inmediato la comprensión que éste posee sobre conceptos clave y técnicas para resolver problemas. Los ejercicios representan extensiones de los ejemplos trabajados y están numerados por si el instructor desea dejarlos como tarea para el hogar.

Problemas y preguntas. Al final de cada capítulo se incluye un amplio conjunto de preguntas y problemas. La mayor parte de los problemas están enumerados según el tópico de la sección. Al final del libro se proporcionan las respuestas de los problemas impares. Los problemas abarcan una amplia gama de dificultades y los problemas más difíciles están identificados con números en gris. La mayor parte de las preguntas sirven para probar la comprensión del estudiante acerca de los conceptos presentados en un capítulo dado, y muchas pueden usarse para motivar discusiones en el aula.

Unidades. En todo el texto se utiliza el sistema internacional de unidades (SI). Ocasionalmente, cuando así lo determina el sentido común, se usan otras unidades (como el ángstrom, Å, y el cm^{-1}, que son de uso común entre los espectroscopistas), aunque todas estas unidades se han definido cuidadosamente en términos de unidades SI.

Formato de los capítulos. Cada capítulo empieza con un **resumen,** que incluye una breve descripción de los objetivos y el contenido del capítulo. Para ubicar conceptos y ecuaciones importantes en el texto se utilizan **notas al margen** a color. Afirmaciones importantes están escritas en cursivas o **resaltadas,** y ecua-





Física moderna, 3a. ed.
Raymond A. Serway, Clement J. Moses, Curt A. Moyer

Director editorial y de producción:
José Tomás Pérez Bonilla

Editor de desarrollo:
Pedro de la Garza Rosales

Traducción:
Hugo Villagómez

Gerente de producción:
Luis Villanueva Rebollo

Editor de producción:
Alejandro A. Gómez Ruiz

Supervisor de manufactura
Israel Robles Martínez

Revisión técnica:
Mirna Villavicencio Torres
UNAM-Facultad de Ciencias

Impreso en México
Printed in Mexico
1 2 3 4 08 07 06

Para mayor información contáctenos en:
Séneca, núm. 53
Col. Polanco
México, D.F., 11560

Puede visitar nuestro sitio en
http://www.thomsonlearning.com.mx

Traducido del libro *Modern Physics, 3rd.*, publicado en inglés por Brooks Cole, ©2005
ISBN 0-534-49339-4
Datos para catalogación bibliográfica:
Serway, Raymond A., Moses, Clement J., Moyer Curt A., *Física moderna,* 3a. edición.
ISBN 970-686-492-X
1. *Física moderna.* 2. Relatividad, Teoría cuántica, Ondas de materia, Mecánica cuántica, Tunelaje, Física estadística, Estructura molecular, Estado sólido, Estructura nuclear, Aplicaciones de la física nuclear, Partículas elementales, Cosmología.

División Iberoamericana

México y América Central:
Thomson Learning
Séneca, núm. 53
Col. Polanco
México, D.F., 11560
Tel. (52-55) 1500 6000
Fax (52-55) 5281 2656
editor@thomsonlearning.com.mx

América del Sur:
Thomson Learning
Calle 39 núm. 24-09
La Soledad
Bogotá, Colombia
Tel. (571) 340 9470
Fax (571) 340 9475
cliente@thomsonlearning.com.co

El Caribe:
Thomson Learning
598 Aldebarán
Altamira, San Juan
Puerto Rico
Zip Code: 00920
Tel. (787) 641 1112
Fax (787) 641 1119

España:
Thomson Learning
Calle Magallanes 25
28015 Madrid
España
Tel. 34 (0) 91 446 3350
Fax 34 (0) 91 445 6218
clientes@paraninfo.es

Cono Sur:
Buenos Aires, Argentina
thomson@thomsonlearning.com.ar

Esta obra se terminó de imprimir en agosto del 2005
Litográfica Ingramex
Centeno Núm. 162-1
Col. Granjas Esmeralda
Delegación Iztapalapa
09810 México, D.F.

libro en la red se encuentra el material necesario para obtener una deducción completa de estos resultados.

- El **capítulo 5** contiene una nueva sección sobre la Invención y los principios de operación de los microscopios de transmisión y exploración de electrones.
- El **capítulo 6,** "Mecánica cuántica en una dimensión", presenta una nueva aplicación sobre los principios de operación y la utilidad de los CCDs (dispositivos acoplados por carga: Charge-Coupled Devices).
- El **capítulo 8,** "Mecánica cuántica en tres dimensiones", incluye un nuevo análisis sobre el estudio de producción y espectroscopia del anti-hidrógeno, estudio que posee consecuencias importantes de varias cuestiones físicas fundamentales.
- El **capítulo 10** presenta material nuevo sobre la relación de la simetría de las funciones de onda con la condensación de Bose-Einstein y el principio de exclusión de Pauli, así como la descripción de aplicaciones potenciales de los condensados de Bose-Einstein.
- El **capítulo 11** contiene nuevo material que explica la dispersión de Raman, la fluorescencia y la fosforescencia, y que también proporciona aplicaciones de estos procesos a la detección de la contaminación y a la investigación biomédica. Este capítulo también se ha racionalizado al pasar el análisis de las integrales de traslape al sitio acompañante del libro en la red.
- El **capítulo 12** se ha revisado cuidadosamente para hacerlo más comprensible, y presenta material nuevo sobre dispositivos semiconductores, en particular MOSFETs y chips. Además, los hechos más relevantes sobre superconductividad se han resumido, actualizado e incluido en el capítulo 12. Para quienes deseen profundizar sus conocimientos sobre este tema, todo el capítulo de superconductividad de ediciones previas se encuentra disponible en el sitio acompañante del libro en la red, junto con ensayos sobre la historia del rayo láser y las celdas solares.
- El **capítulo 13** contiene material nuevo sobre resonancia magnética nuclear e imagenología por resonancia magnética, así como una historia interesante acerca del fechamiento de la antigüedad de la Tierra.
- El **capítulo 14** presenta secciones actualizadas sobre seguridad y disposición de residuos de un reactor de fisión nuclear, resultados del reactor de fusión nuclear y aplicaciones de la física nuclear al rastreo, al análisis de la activación de neutrones, a la terapia con radiación y otras áreas.
- El **capítulo 15** se ha rescrito exhaustivamente son objeto de presentar los esfuerzos hacia la unificación de la física de partículas. Mediante el logro de esta meta, se han introducido nuevos análisis de los positrones, de la masa y oscilación del neutrino, de las leyes de conservación y de las grandes teorías unificadas, incluyendo supersimetría y teoría del resorte.
- El **capítulo 16** es un nuevo capítulo dedicado exclusivamente al emocionante tema del origen y evolución del universo. Algunos de los temas que se abordan incluyen el descubrimiento del universo en expansión, la radiación primigenia, la inflación, la evolución futura del universo, la materia oscura y la expansión en aceleración del universo. Este capítulo sobre cosmología se encuentra disponible en el sitio acompañante del libro en la red.

CARACTERÍSTICAS DE ESTE TEXTO

QMTools Cinco capítulos contienen varios problemas nuevos que requieren el uso de nuestro software de simulación, *QMTools*. Este software constituye una

Algunas constantes fundamentales*

CANTIDAD	SÍMBOLO	VALOR
Unidad de masa atómica	u	1.6605×10^{-27} kg 931.49 MeV/c^2
Número de Avogadro	N_A	6.022×10^{23} partículas/mol
Magnetón de Bohr	$\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2m_e}$	9.274×10^{-24} J/T 5.788×10^{-5} eV/T
Radio de Bohr	$a_0 = \dfrac{\hbar^2}{m_e e^2 k}$	0.5292×10^{-10} m
Constante de Boltzmann	k_B	1.381×10^{-23} J/K 8.617×10^{-5} eV/K
Constante de Coulomb	$k = 1/(4\pi\epsilon_0)$	8.988×10^9 N · m²/C²
Carga del electrón	e	1.602×10^{-19} C
Masa del electrón	m_e	9.109×10^{-31} kg 5.486×10^{-4} u 0.5110 MeV/c^2
Constante gravitacional	G	6.673×10^{-11} N · m²/kg²
Energía del hidrógeno en estado fundamental	$E_0 = -\dfrac{m_e e^4 k^2}{2\hbar^2}$	−13.61 eV
Masa del neutrón	m_n	1.675×10^{-27} kg 1.009 u 939.6 MeV/c^2
Magnetón nuclear	$\mu_n = \dfrac{e\hbar}{2m_p}$	5.051×10^{-27} J/T 3.152×10^{-8} eV/T
Permeabilidad del espacio libre	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ N/A²
Permitividad del espacio libre	ϵ_0	8.854×10^{-12} C²/N · m²
Constante de Planck	h	6.626×10^{-34} J · s 4.136×10^{-15} eV · s
	$\hbar = h/2\pi$	1.055×10^{-34} J · s 6.582×10^{-16} eV · s
Masa del protón	m_p	1.673×10^{-27} kg 1.007 u 938.3 MeV/c^2
Constante de Rydberg	$R = \dfrac{m_e k^2 e^4}{4\pi c\hbar^3}$	1.097×10^7 m^{-1}
Velocidad de la luz en el vacío	c	2.998×10^8 m/s
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	5.6705×10^{-8} W/m²K⁴

* En el apéndice A se proporcionan valores más exactos de las constantes físicas.



Prefacio

Este libro está dedicado como texto de física moderna a estudiantes de la especialidad en ciencias e ingeniería que ya han estudiado un curso introductorio de física basado en cálculo. El contenido de este texto puede subdividirse en dos grandes categorías: una introducción a las teorías de la relatividad y de las físicas cuántica y estadística (capítulos 1 al 10) y aplicaciones de la teoría cuántica elemental a física molecular, de estado sólido, nuclear y de partículas (capítulos 11 al 16).

OBJETIVOS

Los objetivos de este libro son los siguientes:

1. Proporcionar explicaciones sencillas, claras y no complicadas matemáticamente de conceptos físicos y teorías de física moderna.
2. Clarificar y sustentar estas teorías a través de una amplia gama de aplicaciones y ejemplos actuales. En este sentido, hemos intentado contestar preguntas como ¿qué mantiene unidas a las moléculas? ¿Cómo perforan túneles los electrones a través de barreras? ¿Cómo se desplazan los electrones a través de los sólidos? ¿Cómo pueden persistir de manera indefinida las corrientes en superconductores?
3. Animar y humanizar el texto con breves bosquejos del desarrollo histórico de la Física del siglo XX, incluyendo anécdotas y citas de los personajes clave, así como fotografías interesantes de científicos de renombre y aparatos originales

COBERTURA

Tópicos. El material que abarca este texto está relacionado con temas fundamentales de física moderna con amplias aplicaciones en ciencia e ingeniería. En los capítulos 1 y 2 se presenta una introducción a la teoría especial de la relatividad. El capítulo 2 también contiene una introducción a la relatividad general. En los capítulos 3 al 5 se presenta una introducción histórica y conceptual a los primeros desarrollos de la teoría cuántica, incluyendo un análisis de experimentos cruciales que muestran los aspectos cuánticos de la naturaleza. Los capítulos 6 al 9 constituyen una introducción a los verdaderos aspectos prácticos de la mecánica cuántica, donde se abordan la ecuación de Schrödinger, los fenómenos de tunelización, el átomo de hidrógeno y átomos con electrones múltiples, mientras el capítulo 10 contiene una introducción a la física estadística. El resto del libro consta principalmente de aplicaciones

1948 (F) *Patrick M. S. Blackett*, por estudiar física nuclear con fotografías de cámara de nubes de interacciones de rayos cósmicos.

1949 (F) *Hideki Yukawa*, por pronosticar la existencia de los mesones (1935).

1950 (F) *Cecil F. Powell*, por desarrollar el método para estudiar rayos cósmicos con emulsiones fotográficas y por descubrir nuevos mesones.

1951 (F) *John D. Cockcroft* y *Ernest T. S. Walton*, por transmutar núcleos en un acelerador (1932).

(Q) *Edwin M. McMillan*, por producir neptunio (1940) y *Glenn T. Seaborg*, por producir plutonio (1941) y otros elementos transuránicos.

1952 (F) *Felix Bloch* y *Edward Mills Purcell*, por el descubrimiento de la resonancia magnética nuclear en líquidos y gases (1946).

1953 (F) *Frits Zernike*, por inventar el microscopio de contraste de fase, que aplica la interferencia para proporcionar alto contraste.

1954 (F) *Max Born*, por interpretar la función de onda como una probabilidad (1926) y otros descubrimientos mecánico cuánticos, y *Walther Bothe*, por desarrollar el método de coincidencia para estudiar partículas subatómicas (1930-1931), produciendo, en particular, la partícula que Chadwick interpretó como neutrón.

1955 (F) *Willis E. Lamb, Jr.*, por descubrir el desplazamiento de Lamb en el espectro del hidrógeno (1947) y *Polykarp Kusch* por determinar el momento magnético del electrón (1947).

1956 (F) *John Bardeen*, *Walter H. Brattain* y *William Shockley*, por inventar el transistor (1956).

1957 (F) *T.D. Lee* y *C.N. Yang*, por pronosticar que la paridad no se conserva en la desintegración beta (1956).

1958 (F) *Pavel A. Čerenkov* por el descubrimiento de la radiación de Čerenkov (1935) e *Ilya M. Frank* e *Igor Tamm* por interpretarla (1937).

1959 (F) *Emilio G. Segrè* y *Owen Chamberlain*, por el descubrimiento del antiprotón (1955).

1960 (F) *Donald A. Glaser*, por inventar la cámara de burbujas para estudiar partículas elementales (1952).

(Q) *Willard Libby*, por desarrollar el fechamiento con carbono (1947).

1961 (F) *Robert Hofstadter*, por el descubrimiento de la estructura interna en protones y neutrones y *Rudolf L. Mössbauer*, por el descubrimiento del efecto Mössbauer de la recesión en la emisión de rayos gamma (1957).

1962 (F) *Lev Davidovich Landau*, por estudiar teóricamente el helio líquido y otra materia condensada.

1963 (F) *Eugene P. Wigner*, por aplicar principios de simetría a la teoría de partículas elementales, y *Maria Goeppert Mayer* y *J. Hans D. Jensen*, por estudiar el modelo de capas de los núcleos (1947).

1964 (F) *Charles H. Townes*, *Nikolai G. Basov* y *Alexandr M. Prokhorov*, por desarrollar los máseres (1951-1952) y los láseres.

1965 (F) *Sin-itiro Tomonaga*, *Julian S. Schwinger* y *Richard P. Feynman*, por desarrollar la electrodinámica cuántica (1948).

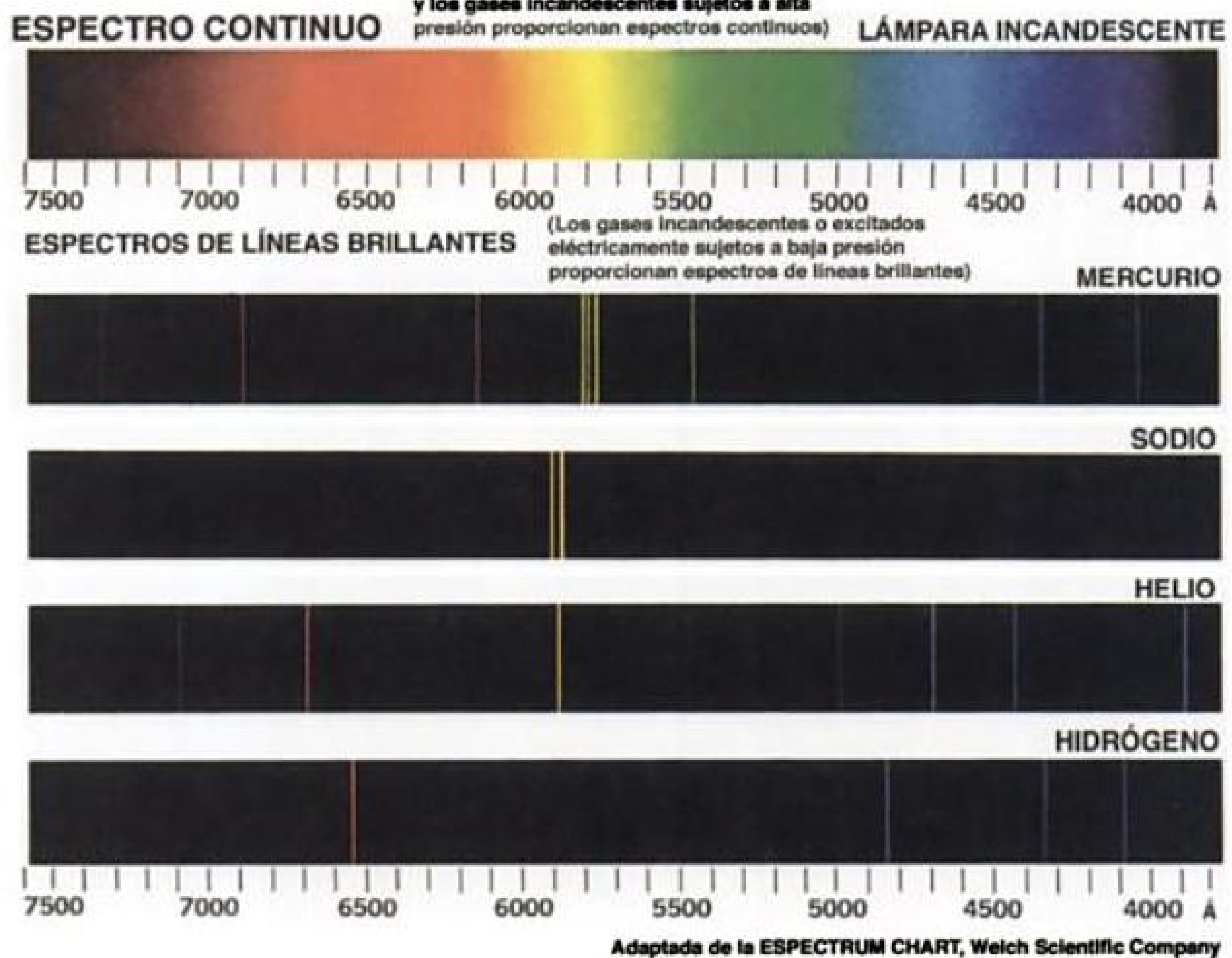
1966 (F) *Alfred Kastler*, por sus métodos ópticos para estudiar los niveles energéticos atómicos.

1967 (F) *Hans Albrecht Bethe*, por el descubrimiento de las rutas de producción de energía en estrellas (1939).

1968 (F) *Luis W. Alvarez*, por el descubrimiento de los estados de resonancia de las partículas elementales.

1969 (F) *Murray Gell-Mann*, por la clasificación de las partículas elementales (1963).

1970 (F) *Hannes Alfvén*, por desarrollar la teoría megnetohidrodinámica, y *Louis Eugène Félis Néel*, por el descubrimiento del antiferromagnetismo y ferromagnetismo (década de 1930).



Conversiones y combinaciones útiles

$$1\ \text{eV} = 1.602 \times 10^{-19}\ \text{J}$$

$$1\ \text{cal} = 4.184\ \text{J}$$

$$1\ \text{u} = 931.5\ \text{MeV}/c^2$$

$$1\ \text{MeV}/c^2 = 1.073 \times 10^{-3}\ \text{u} = 1.783 \times 10^{-30}\ \text{kg}$$

$$1\ \text{Å} = 10^{-10}\ \text{m} = 0.1\ \text{nm}$$

$$1\ \text{fm} = 10^{-15}\ \text{m}$$

$$1\ \text{pulg} = 2.540\ \text{cm}$$

$$1\ \text{mi} = 1609\ \text{m}$$

$$hc = 1.240 \times 10^3\ \text{eV}\cdot\text{nm} = 1.986 \times 10^{-25}\ \text{J}\cdot\text{m}$$

$$\hbar c = 1.973 \times 10^2\ \text{eV}\cdot\text{nm} = 3.162 \times 10^{-26}\ \text{J}\cdot\text{m}$$

$$k_B T = 0.02525\ \text{eV en } T = 300\ \text{K}$$

$$ke^2 = e^2/4\pi\epsilon_0 = 1.440\ \text{eV}\cdot\text{nm}$$

$$1\ \text{barn} = 10^{-28}\ \text{m}^2$$

$$1\ \text{curie} = 3.7 \times 10^{10}\ \text{decaimiento/s}$$

$$1\ \text{MeV}/c = 5.344 \times 10^{-22}\ \text{kg}\cdot\text{m/s}$$

Física moderna

Tercera edición

RAYMOND A. SERWAY
Emeritus
James Madison University

CLEMENT J. MOSES
Emeritus
Utica College of Syracuse University

CURT A. MOYER
University of North Carolina-Wilmington

Revisión técnica:
Mirna Villavicencio Torres
UNAM-Facultad de Ciencias



Australia • Brasil • Canadá • España • Estados Unidos • México • Reino Unido • Singapur

Thomson México y Centroamérica clientes@thomsonlearning.com.mx.

Thomson América del Sur clithomson@andinet.com

Thomson Caribe amy.reyes@thomsonlearning.com

OPCIONES DE ENSEÑANZA

Como ya se observó, el texto puede subdividirse en dos partes básicas: los capítulos 1 al 10, que contienen una introducción a la relatividad, física cuántica y física estadística, y los capítulos 11 al 16, que abordan aplicaciones a moléculas, el estado sólido, física nuclear, partículas elementales y cosmología. Se sugiere cubrir secuencialmente la primera parte del libro. No obstante, los capítulos sobre relatividad pueden cubrirse realmente en cualquier momento, ya que la única fórmula de estos capítulos que es esencial para capítulos ulteriores es $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$. Los capítulos 11 al 16 son independientes entre sí y pueden abordarse en cualquier orden con una excepción: el capítulo 14, "Aplicaciones de la física nuclear" debe tratarse luego del capítulo 13, "Estructura nuclear"

Un curso tradicional de primero o segundo año universitarios de física moderna para estudiantes de ciencias, matemáticas e ingeniería cubre la mayor parte de los capítulos 1 al 10 y varios de los demás capítulos, dependiendo de la destreza del estudiante. Por ejemplo, un alumnado integrado esencialmente por estudiantes de ingeniería eléctrica podría cubrir la mayor parte de los capítulos 1 al 10 con atención especial a la tunelización y los dispositivos de tunelización del capítulo 7, la distribución de Fermi-Dirac del capítulo 10, los semiconductores en el capítulo 12 y los detectores de radiación en el capítulo 14. Los estudiantes de química e ingeniería química pueden cubrir la mayor parte de los capítulos 1 al 10 prestando atención especial a los átomos en el capítulo 9, a la estadística clásica y cuántica en el capítulo 10 y a los enlaces moleculares y espectroscopía en el capítulo 11. Los estudiantes de matemáticas y física deben prestar atención particular al desarrollo único de métodos del operador y al concepto de observables nítidas y vagas introducido en el capítulo 6. En el capítulo 8 se desarrolla con mayor detalle la estrecha relación entre observables nítidas con las cantidades conservadas clásicamente y el rol fundamental de las observables nítidas en la conformación de las funciones de onda del sistema.

Nuestra experiencia indica que en este libro hay más material del que puede cubrirse en un curso normal de tres horas crédito por semestre. Por ello en la segunda parte del libro es necesario escoger temas, como ya se mencionó. No obstante, el texto también puede usarse en una secuencia de dos semestres con algún material complementario, como el que puede encontrarse en las numerosas monografías sobre relatividad, y/o en lecturas selectas en los campos de física de estado sólido, nuclear y de partículas elementales. Al final de cada capítulo se proporciona una bibliografía de obras selectas.

AGRADECIMIENTOS

Deseamos expresar nuestro agradecimiento a los usuarios y revisores de las dos primeras ediciones de este libro, quienes generosamente compartieron con nosotros sus comentarios y críticas. En la preparación de esta tercera edición, tenemos una deuda especial de gratitud con los siguientes revisores:

de la teoría presentada en capítulos previos a campos más especializados de la física moderna. En particular, en el capítulo 11 se analiza la física de moléculas, y el capítulo 12 es una introducción a la física de sólidos y dispositivos electrónicos. Los capítulos 13 y 14 cubren física nuclear, métodos para obtener energía a partir de reacciones nucleares, y aplicaciones médicas y otras de procesos nucleares. El capítulo 15 trata la física de partículas elementales y el capítulo 16 (disponible en el sitio **http://info.brookscole.com/mp3e**) se ocupa de la cosmología.

Nota importante: para mayor información de los recursos y complementos que apoyan a este libro, favor de comunicarse con el representante local de Thomson Learning Latin America.

CAMBIOS EN LA TERCERA EDICIÓN

La tercera edición presenta dos cambios importantes respecto a la segunda edición: *primero*, esta edición se ha vuelto a escribir ampliamente con objeto de clarificar conceptos difíciles, ayudar a una mejor comprensión y actualizar el texto con aplicaciones técnicas de física cuántica que están desarrollándose rápidamente. Como ayuda para llevar a acabo este proceso se revisaron las ilustraciones y el orden de presentación de ciertos tópicos. (Al texto se agregaron muchas fotografías nuevas de físicos, y en el sitio acompañante del libro en la red también está disponible una nueva colección de fotografías a color de fenómenos físicos modernos). Típicamente, cada capítulo contiene nuevos ejemplos trabajados y cinco nuevas preguntas y problemas al final del capítulo. Por último, la *bibliografía adicional sugerida* también se ha revisado según era necesario.

Segundo, esta edición refiere al lector a un nuevo paquete de simulación en línea (independiente de plataforma), *QMTools,* creado por uno de los autores, Curt Moyer. Consideramos que estas simulaciones clarifican, animan y complementan las soluciones analíticas presentadas en el texto. Iconos en el texto resaltan los problemas diseñados para ser usados con este software, que proporciona herramientas de modelado para ayudar a que los estudiantes visualicen conceptos abstractos. Todas las instrucciones sobre el uso general del software, así como las instrucciones específicas para cada problema están contenidas en el sitio en la red acompañante del libro, con lo cual se minimizan las interrupciones al flujo lógico del texto. El sitio en la red que acompaña al libro **http://infobrookscole.mp3e** también contiene apéndices y mucha información complementaria sobre investigaciones y aplicaciones recientes en física, permitiendo a los lectores interesados profundizar en muchos tópicos.

A continuación se mencionan los cambios específicos por capítulo en esta tercera edición:

- El **capítulo 1** en ediciones previas, "Relatividad", se ha revisado profundamente y dividido en dos capítulos. El nuevo **capítulo 1,** titulado "Relatividad I", contiene la historia de la relatividad, nuevas derivaciones de las transformaciones de velocidad y de coordenadas de Lorentz y una nueva sección sobre espacio tiempo y causalidad.
- El **capítulo 2,** titulado "Relatividad II", cubre los temas de dinámica y energía relativistas e incluye nuevo material sobre relatividad general, radiación gravitacional y las aplicaciones GPS (sistema de posicionamiento global: GPS, Global Positioning System) y LIGO (Laser-Interferometer Gravitational-ware Observatory).
- El **capítulo 3** se racionalizó con un tratamiento más conciso de las leyes de cuerpo negro de Rayleigh-Jeans y Planck. En el sitio acompañante del

Melissa Franklin, Universidad de Harvard

Edward F. Gibson, Universidad Estatal de California, Sacramento

Grant Hart, Universidad Brigham Young

James Hetrick, Universidad del Pacífico

Andrés H. La Rosa, Universidad Estatal de Portland

Pui-tak (Peter) Leung, Universidad Estatal de Portland

Peter Moeck, Universidad Estatal de Portland

Timothy S. Sullivan, Colegio Kenyon

William R. Wharton, Colegio Wheaton

Agradecemos al equipo profesional de Brooks-Cole Publishing por su excelente trabajo durante el desarrollo y creación de este texto, especialmente a Jay Campbell, Chris Hall, Teri Hyde, Seth Dobrin, Sam Subity, Kelley McAllister, Stacey Purviance, Susan Dust Pashos y Dena Digilio-Betz. Gracias a Suzon O. Kister por su útil trabajo de referencia, así como a todos los autores de los ensayos aquí presentados: Steven Chu, Melissa Franklin, Roger A. Freedman, Clark A. Hamilton, Paul K. Hansma, David Kestenbaum, Sam Marshall, John Meakin y Clifford M. Will.

Por último, agradecemos a nuestras familias por su paciencia y apoyo continuos.

Raymond A. Serway
Leesburg, VA 20176

Clement J. Moses
Durham, NC 27713

Curt A. Moyer
Wilmington, NC 28403

Diciembre del 2003

ciones importantes se han escrito dentro de un recuadro a color a fin de recalcar su importancia y facilitar su consulta. Cada capítulo concluye con un **resumen,** que repasa conceptos y ecuaciones importantes analizados en ese capítulo.

Además, muchos capítulos contienen **secciones de temas especiales** que están indicadas más claramente como **opcional.** Estas secciones presentan al estudiante material ligeramente más avanzado, ya sea en forma de descubrimientos interesantes actuales o como desarrollos más completos de conceptos o cálculos analizados en ese capítulo. Muchas de estas secciones de tópicos especiales son de particular interés para ciertos grupos de estudiantes, como los que están especializados en el campo de la química o de la física y los ingenieros eléctricos.

Ensayos de autores invitados. Otra característica de este texto es la inclusión de material interesante en forma de ensayos elaborados por autores invitados. Estos ensayos cubren una amplia gama de temas y su objetivo es proporcionar el punto de vista de personas estrechamente relacionadas con el tema en cuestión de avances actuales en física moderna. Además, los temas abordados en tales ensayos constituyen extensiones y/o aplicaciones del material analizado en capítulos específicos. Algunos de los temas que abordan estos ensayos constituyen desarrollos recientes en la relatividad general, el microscopio de exploración de electrones, dispositivos superconductores, la historia del rayo láser, el enfriamiento de átomos con rayo láser, las celdas solares y cómo fue detectado el quark top. Estos ensayos están incluidos en el texto, o en sitios idóneos del texto se hace referencia a ellos en el sitio en la red.

Nivel matemático. Los estudiantes que utilicen este texto deben haber terminado un detallado curso de cálculo de un año de duración, ya que el cálculo se aplica en todo el texto. No obstante, hemos intentado que lo principal sean los conceptos físicos a fin de no empañar nuestras presentaciones con matemáticas demasiado elegantes. Cuando se desarrollan ecuaciones básicas se muestra la mayor parte de los pasos, aunque en los apéndices se presentan demostraciones excepcionalmente largas y detalladas que interrumpen el flujo de los razonamientos físicos.

Apéndices y tablas. Los apéndices de este texto tienen varios propósitos. Deducciones tediosas de resultados importantes necesarios en los análisis físicos se presentan en el sitio acompañante en la red a fin de evitar interrumpir el flujo principal de razonamientos. Otros apéndices necesarios para hacer consultas rápidas se encuentran al final del libro. Estos apéndices contienen constantes físicas, una tabla de masas atómicas y una lista de galardonados con el premio Nobel de Física. Las tablas en las cubiertas del libro contienen importantes constantes físicas y abreviaciones comunes de unidades utilizadas en el libro, así como factores de conversión para consulta rápida, y en la cubierta interior del final se incluye una tabla periódica de los elementos.

COMPLEMENTOS

Este libro cuenta con una serie de complementos para el profesor, los cuales están en inglés y sólo se proporcionan a los docentes que adopten la presente obra como texto para sus cursos. Para mayor información, favor de comunicarse con las oficinas de nuestros representantes o a los siguientes correos electrónicos:

Acerca de los autores



Raymond A. Serway se doctoró en el Illinois Institute of Technology y es profesor emérito en la Universidad James Madison. El Dr. Serway comenzó su carrera pedagógica en la Universidad Clarkson, donde dirigió proyectos de investigación y enseñanza de 1967 a 1980. Su segundo trabajo académico fue en la Universidad James Madison como profesor de física y jefe del Departamento de Física de 1980 a 1986. Permaneció en esta universidad hasta que se retiró en 1997. Fue galardonado con el Madison Scholar Award en la Universidad James Madison en 1990, el Distinguished Teaching Award en la Universidad Clarkson en 1977 y el Alumni Achievement Award del Utica College en 1985. Como científico invitado en el IBM Research Laboratory en Zürich, Suiza, trabajó con K. Alex Müller, premio Nobel de Física en 1987. El Dr. Serway también realizó trabajos de investigación en el centro Rome Air Development de 1961 a 1963, en el IIT Research Institute de 1963 a 1967 y como científico visitante en el Argonne National Laboratory, donde colaboró con su mentor y amigo, Sam Marshall. Además de ediciones previas de este libro, el Dr. Serway es coautor de *Physics for Scientists and Engineers*, 6a. edición, *Principles of Physics*, 3a. edición, *College Physics*, 6a. edición, y el texto de bachillerato *Physics*, publicado por Holt, Rinehart, and Winston. Además, el Dr. Serway ha publicado más de 40 artículos de investigación en el campo de física de materia condensada y ha realizado más de 60 presentaciones en encuentros profesionales. Al Dr. Serway y a su esposa Elizabeth les gusta viajar, jugar golf, pescar y disfrutan estar con sus cuatro hijos y siete nietos.



Clement J. Moses es profesor emérito de física en el Utica College. Nació y creció en Utica, Nueva York y es licenciado en Filosofía y Letras por el Hamilton College, máster en Ciencias por la Universidad Cornell, y doctor por la Universidad Estatal de Nueva York en Binghamton. Posee más de 30 años de experiencia escribiendo y enseñando ciencias a nivel universitario y es coautor de *College Physics*, 6a. edición, con Serway y Faughn. Su obra en investigación, tanto en el marco industrial como universitario, está relacionada con defectos en sólidos, celdas solares y la dinámica de átomos en superficies. Además de escribir sobre ciencia, al Dr. Moses le gusta leer novelas, la jardinería, cocinar, cantar y asistir a la ópera.



Curt A. Moyer ha sido profesor y cátedra del Departamento de Física y Oceanografía Física en la Universidad de Carolina del Norte-Wilmington desde 1999. Antes de trabajar en esta universidad, enseñó en el Physics Department en la Universidad Clarkson de 1974 a 1999. El Dr. Moyer obtuvo una licenciatura en Ciencias en la Lehigh University y se doctoró en la Universidad Estatal de Nueva York en Stony Brook. Ha publicado más de 45 artículos de investigación en los campos de física de materia condensada y ciencias de la superficie. Además de ser un maestro con experiencia, el Dr. Moyer es un abogado del uso de las computadoras en el terreno educativo y desarrolló el software *QMTools* basado en la red que acompaña a este texto. Él y su esposa, V. Sue, disfrutan viajar y el tiempo especial que dedican a sus cuatro hijos y tres nietos.

Tabla periódica de los elementos

Símbolo — Ca 20 — Número atómico; Masa atómica † — 40.078; $4s^{2}$ — Configuración electrónica

Grupo I	Grupo II	Elementos de transición										Grupo III	Grupo IV	Grupo V	Grupo VI	Grupo VII	Grupo 0
H 1 1.007 9 $1s$																H 1 1.007 9 $1s^{1}$	He 2 4.002 6 $1s^{2}$
Li 3 6.941 $2s^{1}$	Be 4 9.0122 $2s^{2}$											B 5 10.811 $2p^{1}$	C 6 12.011 $2p^{2}$	N 7 14.007 $2p^{3}$	O 8 15.999 $2p^{4}$	F 9 18.998 $2p^{5}$	Ne 10 20.180 $2p^{6}$
Na 11 22.990 $3s^{1}$	Mg 12 24.305 $3s^{2}$											Al 13 26.982 $3p^{1}$	Si 14 28.086 $3p^{2}$	P 15 30.974 $3p^{3}$	S 16 32.066 $3p^{4}$	Cl 17 35.453 $3p^{5}$	Ar 18 39.948 $3p^{6}$
K 19 39.098 $4s^{1}$	Ca 20 40.078 $4s^{2}$	Sc 21 44.956 $3d^{1}4s^{2}$	Ti 22 47.867 $3d^{2}4s^{2}$	V 23 50.942 $3d^{3}4s^{2}$	Cr 24 51.996 $3d^{5}4s^{1}$	Mn 25 54.938 $3d^{5}4s^{2}$	Fe 26 55.845 $3d^{6}4s^{2}$	Co 27 58.933 $3d^{7}4s^{2}$	Ni 28 58.693 $3d^{8}4s^{2}$	Cu 29 63.546 $3d^{10}4s^{1}$	Zn 30 65.39 $3d^{10}4s^{2}$	Ga 31 69.723 $4p^{1}$	Ge 32 72.61 $4p^{2}$	As 33 74.922 $4p^{3}$	Se 34 78.96 $4p^{4}$	Br 35 79.904 $4p^{5}$	Kr 36 83.80 $4p^{6}$
Rb 37 85.468 $5s^{1}$	Sr 38 87.62 $5s^{2}$	Y 39 88.906 $4d^{1}5s^{2}$	Zr 40 91.224 $4d^{2}5s^{2}$	Nb 41 92.906 $4d^{4}5s^{1}$	Mo 42 95.94 $4d^{5}5s^{1}$	Tc 43 (98) $4d^{5}5s^{2}$	Ru 44 101.07 $4d^{7}5s^{1}$	Rh 45 102.91 $4d^{8}5s^{1}$	Pd 46 106.42 $4d^{10}$	Ag 47 107.87 $4d^{10}5s^{1}$	Cd 48 112.41 $4d^{10}5s^{2}$	In 49 114.82 $5p^{1}$	Sn 50 118.71 $5p^{2}$	Sb 51 121.76 $5p^{3}$	Te 52 127.60 $5p^{4}$	I 53 126.90 $5p^{5}$	Xe 54 131.29 $5p^{6}$
Cs 55 132.91 $6s^{1}$	Ba 56 137.33 $6s^{2}$	57-71*	Hf 72 178.49 $5d^{2}6s^{2}$	Ta 73 180.95 $5d^{3}6s^{2}$	W 74 183.84 $5d^{4}6s^{2}$	Re 75 186.21 $5d^{5}6s^{2}$	Os 76 190.23 $5d^{6}6s^{2}$	Ir 77 192.2 $5d^{7}6s^{2}$	Pt 78 195.08 $5d^{9}6s^{1}$	Au 79 196.97 $5d^{10}6s^{1}$	Hg 80 200.59 $5d^{10}6s^{2}$	Tl 81 204.38 $6p^{1}$	Pb 82 207.2 $6p^{2}$	Bi 83 208.98 $6p^{3}$	Po 84 (209) $6p^{4}$	At 85 (210) $6p^{5}$	Rn 86 (222) $6p^{6}$
Fr 87 (223) $7s^{1}$	Ra 88 (226) $7s^{2}$	89-103**	Rf 104 (261) $6d^{2}7s^{2}$	Db 105 (262) $6d^{3}7s^{2}$	Sg 106 (266)	Bh 107 (264)	Hs 108 (269)	Mt 109 (268)	Ds 110 (271)	111†† (272)	112†† (285)		114†† (289)				

*Serie del lantano	La 57 138.91 $5d^{1}6s^{2}$	Ce 58 140.12 $5d^{1}4f^{1}6s^{2}$	Pr 59 140.91 $4f^{3}6s^{2}$	Nd 60 144.24 $4f^{4}6s^{2}$	Pm 61 (145) $4f^{5}6s^{2}$	Sm 62 150.36 $4f^{6}6s^{2}$	Eu 63 151.96 $4f^{7}6s^{2}$	Gd 64 157.25 $5d^{1}4f^{7}6s^{2}$	Tb 65 158.93 $5d^{1}4f^{8}6s^{2}$	Dy 66 162.50 $4f^{10}6s^{2}$	Ho 67 164.93 $4f^{11}6s^{2}$	Er 68 167.26 $4f^{12}6s^{2}$	Tm 69 168.93 $4f^{13}6s^{2}$	Yb 70 173.04 $4f^{14}6s^{2}$	Lu 71 174.97 $5d^{1}4f^{14}6s^{2}$
**Serie del actinio	Ac 89 (227) $6d^{1}7s^{2}$	Th 90 232.04 $6d^{2}7s^{2}$	Pa 91 231.04 $5f^{2}6d^{1}7s^{2}$	U 92 238.03 $5f^{3}6d^{1}7s^{2}$	Np 93 (237) $5f^{4}6d^{1}7s^{2}$	Pu 94 (244) $5f^{6}6d^{0}7s^{2}$	Am 95 (243) $5f^{7}6d^{0}7s^{2}$	Cm 96 (247) $5f^{7}6d^{1}7s^{2}$	Bk 97 (247) $5f^{8}6d^{1}7s^{2}$	Cf 98 (251) $5f^{10}6d^{0}7s^{2}$	Es 99 (252) $5f^{11}6d^{0}7s^{2}$	Fm 100 (257) $5f^{12}6d^{0}7s^{2}$	Md 101 (258) $5f^{13}6d^{0}7s^{2}$	No 102 (259) $6d^{0}7s^{2}$	Lr 103 (262) $6d^{1}7s^{2}$

◻ Los valores de las masas atómicas que se proporcionan son promedios sobre isótopos en los porcentajes en que existen en la naturaleza.
† Para un elemento inestable, entre paréntesis se proporciona el número de masa del isótopo conocido más estable.
†† Los elementos 111, 112 y 114 aún no están identificados.
††† Para consultar datos atómicos, visite el sitio physics.nist.gov/atomic